

Capítulo 1

Estatística de Contagem e Propagação de Erro



Favor comunicar ao professor os erros encontrados
Terceira versão 2007.1

Neste curso você estará envolvido em medidas de processos randômicos como decaimentos radioativos, espalhamentos, etc...Nestes experimentos, as medidas são sujeitas as flutuações estatísticas. Estas flutuações representam uma fonte inevitável de incerteza nas medidas em física corpuscular e não obstante constituem uma fonte de imprecisão e erro. O termo *estatística de contagem* inclui a descrição da análise estatística necessária para processar os dados obtidos nos experimentos e a predição sobre a precisão esperada das quantidades derivadas destas medidas.

1 – Caracterização dos dados

Começaremos supondo que temos uma coleção de N medidas independentes de uma mesma grandeza física: x_1, x_2, \dots, x_n . Duas propriedades elementares deste conjunto são a soma S

$$S = \sum_{i=1}^N x_i \quad (1)$$

e a média experimental

$$\bar{x}_e = \frac{S}{N} \quad (2)$$

a média experimental é escrita com um sub-escrito para diferir-la da média de um modelo estatístico em particular, conforme será definido mais adiante.

É frequentemente conveniente representar o conjunto de dados por uma *distribuição de freqüências* correspondente $F(x)$. O valor de $F(x)$ é a freqüência relativa com que o número aparece no conjunto de dados. Por definição

$$F(x) = (\text{número de ocorrências do valor } x) / (\text{número de medidas } (N)) \quad (3)$$

A distribuição é automaticamente normalizada, ou seja,

$$\sum_{x=0}^{\infty} F(x) = 1 \quad (4)$$

A forma relativa de $F(x)$ dá uma indicação qualitativa das flutuações internas no conjunto de dados e é de certa forma centrada em torno do valor médio. Uma conclusão óbvia é que a largura da distribuição é a medida relativa da quantidade de flutuações em torno da média em um dado conjunto de dados.

É possível calcular a média experimental usando a função distribuição

$$\bar{x}_e = \sum_{x=0}^{\infty} xF(x) \quad (5)$$

É também possível derivar outro parâmetro, conhecido como *variância*, que serve para quantificar as flutuações internas no conjunto de dados. O primeiro passo é definir o *desvio* de qualquer ponto da média

$$\mu_i = x_i - \bar{x}_e \quad (6)$$

Há uma contribuição igual dos desvios positivos e negativos, de modo que

$$\sum_1^N \mu_i = 0 \quad (7)$$

Se no entanto, tomarmos os quadrados de cada desvio, resultará sempre em um número positivo. Podemos então introduzir a *variância experimental* como

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_1^N \mu_i^2 \quad (8)$$

que servirá como um índice do grau de flutuação inerente ao conjunto de dados original. Conforme N torna-se razoavelmente grande, a variância experimental é essencialmente o valor médio do desvio quadrático de cada ponto. Sendo mais preciso, a variância experimental é mais fundamentalmente definida como o valor médio do desvio quadrático (desvio padrão da população) de cada ponto do *valor médio real* \bar{x} (*valor verdadeiro de uma grandeza*⁵) que seria obtido se um número infinito de medidas fossem acumulados ou quando se conhecem todos os valores possíveis da população

$$\sigma^2 \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad (9)$$

Onde N é o tamanho da população. Mas como não podemos conhecer \bar{x} a partir de um conjunto finito de medidas, usamos no seu lugar o valor \bar{x}_e ($\bar{x} \approx \bar{x}_e$) derivado a partir dos dados para calcular os valores dos desvios. O valor verdadeiro de uma grandeza é independente do conjunto de dados, enquanto que o valor experimental é dependente. O uso do valor experimental em vez do valor médio verdadeiro teórico fará com que o desvio médio e conseqüentemente resultará em uma variância normal menor. No linguajar estatístico, o número de graus de liberdade do sistema terá sido reduzido por uma unidade. Na equação 8, a média experimental é usada para calcular os valores de μ_i . Entretanto, a soma é dividida por $N-1$ (ao invés de N) para fazer o valor calculado de s^2 um pouco maior, levando em conta o grau de liberdade perdido. Deve-se notar que a variância amostral é uma medida absoluta da flutuação interna nos dados e não depende, em primeira aproximação, do número de valores no conjunto de dados. Por exemplo, se um determinado conjunto de dados fosse aumentado coletando-se 30 valores adicionais pelo mesmo processo, não esperaríamos que a variância amostral calculada para o novo conjunto estendido fosse substancialmente diferente do valor inicial.

Outra grandeza é o desvio padrão da média cuja expressão matemática é

$$\bar{s} = \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (10)$$

Podemos também calcular a variância diretamente da função distribuição $F(x)$. A equação 9 mostra que s^2 é simplesmente o valor médio de $(x - \bar{x})^2$, podemos escrever que a mesma média como

$$\sigma^2 = \sum_{x=0}^{\infty} (x - \bar{x})^2 F(x) \quad (11)$$

Uma expansão da equação 11 resultará na expressão bem conhecida

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \quad (12)$$

Modelos estatísticos

Sob certas condições, podemos prever a função distribuição que descreverá os resultados de várias medições repetidas. Podemos definir uma medida (veja também a definição 7) como uma contagem do número de sucessos resultando de um dado número de tentativas. Cada tentativa é ou um sucesso ou não. Para tudo que se segue, supomos que a probabilidade de sucesso é uma constante para todas as tentativas. Por exemplo, ao tentarmos observar um dado decaimento nuclear por um tempo t , o número de tentativas é equivalente ao número de núcleos na amostra sob observação, e a medida consiste em contar aqueles núcleos que decaem.

Três modelos estatísticos específicos são introduzidos:

- 1 - *A Distribuição Binomial*. Este é o modelo mais geral e é largamente aplicável para todos os processos de probabilidade constante. Infelizmente, computacionalmente é muito trabalhosa, para sistemas grandes, por exemplo em decaimentos nucleares, e é muito pouco utilizada em aplicações nucleares.
- 2 - *Distribuição de Poisson*. Este modelo é uma simplificação matemática da distribuição binomial sob condições que a probabilidade de sucesso é pequena. Em termos práticos, a condição implica que escolhemos um tempo de observação pequeno comparado com a meia-vida da fonte, ou que a eficiência de detecção é pequena.
- 3 - *Distribuição Gaussiana ou Normal*. A terceira distribuição importante é a Gaussiana, a qual é a uma simplificação ainda maior se o número médio de sucessos é relativamente grande (maior do que 20 ou 30). Esta condição se aplicará para qualquer situação na qual acumulamos mais dos que algumas contagens durante a medida. Este é o caso mais frequente de modo que a o modelo Gaussiano é largamente aplicável a muitos problemas em estatística de contagem.

Lembramos que os modelo acima tornam-se idênticos para processos com uma probabilidade individual de sucesso pequena, mas com um número grande de tentativas de modo que o número médio esperado de sucessos é grande.

A distribuição binomial

A distribuição binomial é a mais geral dos modelos estatísticos discutidos aqui. Se n e o número de tentativas para o qual cada tentativa tem uma probabilidade de sucesso p , então a probabilidade de contar exatamente x sucessos é dada por

$$P(x) = \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x} \quad (13)$$

$P(x)$ é a função probabilidade, como dada pela distribuição binomial e é definida somente para valores inteiros de n e x .

Algumas propriedades da distribuição binomial são importantes. Primeiramente, a distribuição é normalizada:

$$\sum_{x=0}^n P(x) = 1 \quad (14)$$

Também, sabemos que a média ou valor médio de uma distribuição é dada por

$$\bar{x} = \sum_{x=0}^n xP(x) \quad (15)$$

Se substituirmos a equação 13 para $P(x)$ e realizarmos a soma, encontramos

$$\bar{x} = pn \quad (16)$$

O valor médio é sem dúvidas uma propriedade fundamental de qualquer distribuição.

É importante obtermos um parâmetro que descreve a flutuação prevista por uma dada distribuição. Nós já definimos tal parâmetro, chamado de variância amostral, para um conjunto de dados experimentais na equação 11. Por analogia definimos agora a variância prevista σ^2 , que é uma medida de como os dados estão distribuídos em torno da média prevista por modelo estatístico específico $P(x)$:

$$\sigma^2 \equiv \sum_{x=0}^n (x - \bar{x})^2 P(x) \quad (17)$$

Convencionalmente, σ^2 é chamada de variância, e enfatizamos o fato de que ela é associada com a distribuição de probabilidade prevista, por isto o nome *variância prevista*. É convenção definirmos também o *desvio padrão* como a raiz quadrada de σ^2 .

Agora, se realizarmos a soma em (17) para o caso específico da distribuição binomial, obtemos:

$$\sigma^2 = np(1-p) \quad (18)$$

Mas, usando (16), temos ainda

$$\sigma^2 = \bar{x}(1-p) \quad (19)$$

$$\sigma = \sqrt{\bar{x}(1-p)} \quad (20)$$

Distribuição binomial para o decaimento radioativo

Considere o decaimento radioativo em um tempo t de um sistema contendo N_o átomos radioativos. Este N_o átomos podem ser divididos em dois grupos, aqueles que

decairão em um tempo t e aqueles que não decairão. A partir da lei do decaimento exponencial para espécies radioativas, a probabilidade de que um dado átomo não decaia é $e^{-\lambda t}$ (vide capítulo 9), onde λ é a constante de decaimento para a espécie em questão. Então, a probabilidade p para o decaimento é

$$p = 1 - e^{-\lambda t} \quad (21)$$

Usando a equação 13, temos a probabilidade $P(x)$ de que x átomos decairão em um tempo t

$$P(x) = \frac{N_o!}{(N_o - x)!x!} (1 - e^{-\lambda t})^x (e^{-\lambda t})^{N_o - x} \quad (22)$$

o número médio *verdadeiro* de decaimentos no tempo t é

$$\bar{x} = N_o(1 - e^{-\lambda t}) \quad (23)$$

e o desvio padrão é

$$\sigma = [N_o(1 - e^{-\lambda t})e^{-\lambda t}]^{1/2} = (\bar{x}e^{-\lambda t})^{1/2} \quad (24)$$

para $\lambda t \ll 1$, ou seja, para tempos de observação curtos comparados com a meia vida, o desvio padrão é simplesmente

$$\sigma = \bar{x}^{1/2} \approx \bar{x}_e^{1/2} \quad (25)$$

Se ε é a probabilidade de uma desintegração resultar em um contagem (eficiência de detecção), então a probabilidade de um de um átomo produzir uma contagem em um tempo t é

$$p = (1 - e^{-\lambda t})\varepsilon$$

ainda para a condição $\lambda t \ll 1$, a equação 24 continua válida.

A distribuição de Poisson

Várias categorias de processos binários podem ser caracterizados por uma baixa probabilidade de sucesso para cada tentativa individual. Por exemplo, em um experimento típico de física de colisões atômicas, apenas uma fração muito pequena do feixe de projéteis, interage com os centros espalhadores do alvo gasoso. Nestes casos, a aproximação $p \ll 1$ será válida e algumas simplificações matemáticas podem ser aplicadas à distribuição binomial. Usando que

$$\frac{n!}{(n-x)!} \approx n^x \quad (26a)$$

e

$$(1-p)^{n-x} \approx e^{-pn} \quad (26b)$$

Mostrar-se que, neste limite a distribuição binomial se reduz a

$$P(x) = \frac{(pn)^x e^{-pn}}{x!} \quad (26)$$

Repare que a distribuição binomial possui dois parâmetros: o número de tentativas n e a probabilidade individual de sucesso p . Mas, a partir de (16) podemos ver que apenas um parâmetro é necessário na distribuição de Poisson, o produto np . Esta é uma simplificação muito útil porque precisamos conhecer apenas o valor médio da distribuição para reconstruir sua amplitude $P(x)$ para todos os outros valores do argumento x .

Algumas das propriedades da distribuição binomial, também são válidas para o caso da distribuição de Poisson. Em particular, as equações (14-17) também se aplicam para o caso da distribuição de Poisson. Contudo, a variância no caso da distribuição de Poisson é dada por

$$\sigma^2 = \bar{x} \quad (27)$$

conseqüentemente, o desvio padrão é dado pela raiz quadrada da equação (27). Note que este resultado é obtido diretamente das equações (19 e 20) no limite de $p \ll 1$.

Ex. (University of Columbia, EUA) Se o número médio de contagens por segundo de uma fonte radioativa é 4, qual a probabilidade de acumular 8 contagens em um segundo?

$$R. P(8) = 4^8 e^{-4}/8! = 0,03$$

A distribuição Gaussiana

Consideremos agora uma outra simplificação, que o valor médio da distribuição é alto (maior do que 20), pode-se mostrar que esta simplificação adicional leva à distribuição gaussiana:

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{x}}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\bar{x}}} \quad (28).$$

De novo, as equações (14-17), assim como a equação (27) são válidas para o caso da distribuição gaussiana. Podemos tecer algumas observações sobre a distribuição gaussiana: ela é simétrica em relação ao seu valor médio e devido ao fato do valor médio ser alto, os valores de $P(x)$ para valores de x adjacentes não diferem muito, ou seja, a distribuição varia lentamente.

Aplicação dos modelos estatísticos

Uma aplicação rotineira dos modelos estatísticos é o caso no qual temos somente uma única medida de uma grandeza em particular e desejamos associar um dado grau de incerteza com aquela medida. O que gostaríamos objetivamente é ter uma estimativa da

variância esperada se repetíssemos a medida várias vezes. A raiz quadrada da variância amostral deveria ser uma medida típica do desvio de qualquer medição de um valor médio real e assim servir com um único índice do grau de precisão que podemos associar com uma medida típica daquele conjunto. Porque temos somente um única medida, contudo, a variância não pode ser calculada diretamente mas deve ser estimada por analogia com um modelo estatístico apropriado.

Se supormos que o resultado da medida é parte de uma população cuja distribuição teórica descrita por uma distribuição Gaussiana ou de Poisson, então devemos ajustar a distribuição ao dado disponível. Para ambos os modelos devemos começar com um valor para a média $\langle x \rangle$ da distribuição. O valor de nossa única medida x é a única informação que dispomos. Não temos outra escolha a não ser supor que a média da distribuição é igual ao único dado disponível, ou seja $\langle x \rangle = x$. Tendo agora obtido o suposto valor para $\langle x \rangle$, a função probabilidade é totalmente definida para todos os valores de x . Podemos imediatamente encontrar um valor para a variância da distribuição. Podemos usar a associação que, se o dado foi retirado da mesma distribuição, uma estimativa da variância s^2 deste conjunto de dados deve ser dada por σ^2 . Concluimos que $s = \sigma = x^{1/2}$, é a melhor estimativa para o desvio da média verdadeira. No caso da distribuição Gaussiana, o intervalo $x \pm x^{1/2}$ conterá a média verdadeira com 68 % de probabilidade.

Como ilustração, suponha que você meça o número de partículas de incidem em um detector em um dado intervalo de tempo. Se 100 foi o número encontrado, então $\sigma = 100^{1/2} = 10$ é a incerteza desta medição. Há várias formas de expressar a incerteza de uma medida. A escolha convencional é escrever o valor mais ou menos um valor que representa um desvio padrão σ , ou seja, 100 ± 10 . Este intervalo supostamente contém o valor médio verdadeiro com uma probabilidade de 68%. Se desejarmos aumentar a probabilidade de que a média verdadeira esteja incluída, devemos expandir o intervalo de incerteza. Por exemplo, para alcançar 99 % de certeza de que a média esteja naquele intervalo, o intervalo deve ser expandido para $2,58\sigma$, ou $100,0 \pm 25,8$, no caso de nosso exemplo. A menos que seja indicado o contrário, as incertezas são expressas com um desvio padrão.

O desvio padrão fracional, definido como σ/x , de uma única medida é dado por $x^{1/2}/x$ ou $x^{-1/2}$.

Exceções

Todas as conclusões da seção anterior não se aplicam a medidas de um certo número de sucessos (número de caras ou coroas num lançamento de uma moeda, etc..) Numa medida de decaimento nuclear, devemos aplicar diretamente $\sigma = x^{1/2}$ somente de x representa um número de eventos em um dado tempo de observação.

Não podemos aplicar o desvio padrão $\sigma = x^{1/2}$ para qualquer quantidade que não seja um número de contagens medido diretamente. Por exemplo, a associação não se aplica a:

- a- taxas de contagens;
- b- somas ou diferenças de contagens;

- c- médias de contagens independentes;
- d- qualquer quantidade derivada;

Em todos estes casos a quantidade é calculada como uma função do número de contagens acumuladas em cada experimento. A incerteza associadas com esta quantidade deve então ser calculada de acordo com os métodos de propagação de erro.

Exemplo 1: Considere um espectro (de um fonte radioativa, por exemplo) onde o número real de contagens deve ser corrigido subtraindo-se o fundo (vide fig.1)

$$\underline{\text{Área líquida}} = \underline{\text{área total}} - \underline{\text{fundo}}$$

Como tanto a área total como o fundo são medidos diretamente como contagens, o desvio padrão esperado de cada um deve ser a sua raiz quadrada. A área líquida é uma quantidade derivada e portanto sua incerteza deve ser obtida propagando-se os as incertezas das quantidades medidas diretamente, ou seja:

$$\sigma_{\text{liquida}} = \sqrt{\sigma^2_{\text{total}} + \sigma^2_{\text{fundo}}}$$

Se a área total for 1500 contagens e o fundo 400 contagens,

$$\sigma_{\text{liquida}} = \sqrt{1500 + 400} = 43.6$$

Como as incertezas são representadas com no máximo dois algarismos significativos, a área líquida é dada por

$$\text{Área líquida} = 1100 \pm 44 \text{ contagens}$$

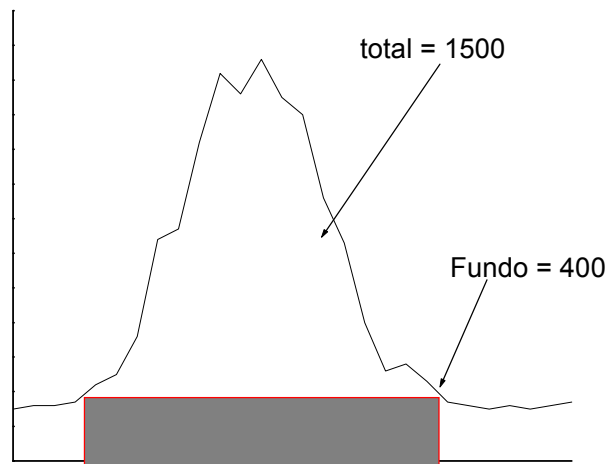


Fig. 1 – A área de um pico devem ser subtraída do fundo (background).

Exemplo 2 – Valor médio de várias contagens independentes. Suponha que tenhamos medido N vezes a contagem de uma mesma fonte em tempos iguais. Os resultados são representados por x_1, x_2, \dots, x_N e a soma S ,

$$S = x_1 + x_2 + \dots + x_N$$

Aplicando as regras de propagação de erro, temos

$$\sigma_S^2 = \sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 + \dots + \sigma_{x_N}^2$$

Mas porque $\sigma_{x_i} = x_i^{1/2}$ para cada contagem independente

$$\sigma_S^2 = x_1 + \dots + x_N = S$$

$$\sigma_S = \sqrt{S}$$

Este resultado mostra que o desvio padrão para a soma de todas as contagens é o mesmo que se a medida fosse realizada de uma única vez, estendendo-se o tempo de medida. O valor médio é dado por

$$\bar{x} = \frac{S}{N}$$

E a incerteza associada é dada por

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\bar{x}}{N}}$$

Concluimos que o valor médio baseado em N medidas independentes terá uma incerteza que será menor por um fator $N^{1/2}$ comparada com uma única medida. Uma outra conclusão é que se quisermos melhorar a precisão estatística por um fator 2, devemos acumular um tempo quatro vezes maior.

Em geral podemos supor que um campo de radiação "constante" é estritamente randômico em relação a quantas partículas são detectadas em um dado ponto por unidade de área e intervalo de tempo. Pode-se mostrar que o numero de partículas observadas em medições repetidas (supondo condições iguais) são descritas por uma distribuição de Poisson. Para um número grande de eventos, esta distribuição aproxima-se da distribuição normal (Gaussiana) e as flutuações são devido a natureza estocástica do campo de radiação.

Intervalos entre eventos sucessivos

De modo a derivar uma função distribuição que descreve os intervalos de tempos entre eventos randômicos adjacentes, primeiramente suponha que um evento ocorrera em $t=0$. Qual a probabilidade diferencial que o próximo evento aconteça dentro de um tempo diferencial dt após um intervalo de tempo t ? Dois processos independentes devem acontecer: Nenhum evento podem ocorrer dentro do intervalo 0 a t , mas um evento deve

ocorrer no próximo incremento de tempo diferencial dt . A probabilidade final será então dada pelo produto das probabilidades que caracterizam os dois processos, ou seja, a *probabilidade do próximo evento ocorrer em dt após o atraso de t = probabilidade de nenhum evento ocorrer durante o intervalo tempo 0 a t × probabilidade de um evento ocorrer durante dt*

$$P_S(t)dt = P_N(0) \times rdt$$

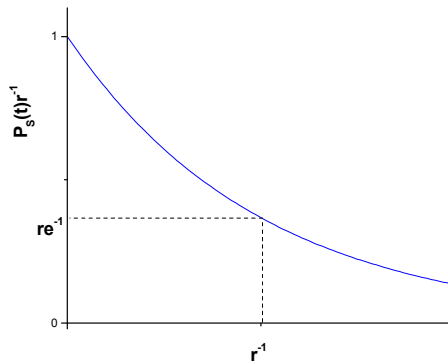
O primeiro fator a direita segue diretamente da discussão anterior sobre a distribuição de Poisson. Procuramos por uma probabilidade de que nenhum evento ocorra durante um intervalo de tempo t no qual o número médio de eventos deveria ser rt . Usando a Eq. 20,

$$P(0) = \frac{(rt)^0 e^{-rt}}{0!} = e^{-rt}$$

Então

$$P_S(t)dt = re^{-rt} dt$$

$P_S(t)$ é uma função distribuição para intervalos entre eventos aleatórios adjacentes. Este tipo de distribuição aparece por exemplo, como fundo (background) em experimentos de coincidência, como veremos nos próximos capítulos.



Escolha do tempo de contagem

Do que vimos até agora, podemos aplicar para um julgamento criterioso que pode nos poupar bastante tempo em um experimento.

Quando uma única medida é realizada os resultados da tabela 1 podem ser utilizados diretamente.

σ incerteza %	contagens
0,1	10^6
0,3	$1,1 \times 10^5$
1	10^4

3	$1,1 \times 10^3$
10	100

Tabela 1 – total de contagens para uma da incerteza.

Uma medida mais comum consiste em determinar o número de contagens líquida de uma fonte, a partir de uma taxa de contagens total (incluindo fundo). A divisão do tempo de contagem ótima entre o determinação do numero de contagens total e a determinação do fundo de modo a minimizar as incertezas pode ser obtida. Duas situações surgem e devem ser consideradas.

Se é preciso realizar uma série de contagens de amostras diferentes (diferentes fontes) e se durante o período de medidas não há razão para suspeitar que a taxa de contagens do fundo variou, é vantajoso fazer uma medida acurada do fundo de modo de a sua incerteza seja desprezível (uma ordem de grandeza menor do que a incerteza da medida da taxa total). Deve-se fazer várias medidas de modo a checar a constancia do fundo . Por exemplo, uma determinação pode ser feita no inicio e outra no final de cada serie de medidas.

A outra situação é quando temos um tempo fixo para realizar tanto a contagem total quanto a contagem do fundo. Se t_f e t_T são os tempos de medidas para o fundo e a taxa total e T_T e T_f as taxas de contagens total e de fundo, respectivamente, então o desvio padrão da contagem líquida é dada por (vide problema 6)

$$\sigma_l = \sqrt{\left(\frac{T_T}{t_T} + \frac{T_f}{t_f} \right)} \quad (29)$$

minizando a equação 29 encontra-se

$$\frac{t_f}{t_T} = \left(\frac{T_f}{T_T} \right)^{1/2} \quad (30)$$

para o uso otimizado do tempo de contagem. Para determinar esta razão obtem-se valores aproximados no inicio das medidas.

Algarismos significativos

Devido ao grande número de pessoas (alunos o professores) que apresentam dúvidas sobre algarismos significativos, reveremos a seguir algumas regras úteis. Os resultados de medidas ou cálculos, os valores descritos devem ter um número limitado de algarismos significativos. "Os algarismos significativos de uma medida são os algarismos considerados corretos, a contar do primeiro diferente de zero, e o último algarismo, que é o duvidoso " [6]. Algumas regras devem ser seguidas: os zeros à direita, em números decimais, apenas devem ser escritos quando são significativos, Ex : 1,20 possui três algarismos significativos. Os zeros apenas são significativos se situados à direita de um algarismo significativo, Ex : 0,012 tem dois algarismos significativos. Os zeros à

esquerda dos algarismos 1 e 2 apenas expressam que o resultado da medição é inferior a unidade.

Exercícios

Quantos algarismos significativos tem os números abaixo?

a) 145,9000 b) 73,009 c) 1,2 d) 0,543 e) 0,03450

Resp. a) 7 b) 5 c) 2 d) 3 e) 4

Arredondamento

Segundo a *ABNT-NBR 5891:1977 – Regras de arredondamento na numeração decimal*, ao arredondarmos um número, devemos seguir as seguintes regras : O último algarismo de um número deve sempre ser acrescido de uma unidade caso o algarismo descartado seja superior a cinco (Ex: 235,8 → 236; 421,0012 → 421,001). No caso do algarismo descartado ser igual a cinco, se após o cinco descartado existirem quaisquer outros algarismos diferentes de zero, o último algarismo retido será acrescido de uma unidade (Ex: 2,0502 → 2,1). No caso do algarismo descartado ser igual a cinco, se após o cinco descartado só existirem zeros ou não existir outro algarismo, o último algarismo retido será acrescido de uma unidade somente se for ímpar (Ex: 2,3500 → 2,4; 2,25 → 2,2).

Operações com algarismos significativos

Adição e subtração → somamos ou subtraímos normalmente as parcelas e o resultado da operação deve ter o mesmo número de casas decimais da parcela que possuir o menor número de casas decimais. Ex: $73,5 + 4,56 + 0,003 = 78,063 \rightarrow 78,1$.

Multiplicação e divisão → Multiplicamos ou dividimos normalmente as parcelas e o resultado da operação deve ter o mesmo número de algarismos significativos da parcela que possuir o menor número de algarismos significativos. Ex: $25 \div 2,25 = 11,111.. \rightarrow 11$.

Raiz quadrada → a raiz quadrada de um número de n significativos pode ter no máximo n e, no mínimo, n-1 significativos. Ex: $(3,45)^{1/2} = 1,857417 \rightarrow 1,86$ ou $1,9$.

Exercícios

Calcule :

a) $(25,5)^{1/2} + 5,0 =$

b) $61,890 \times 2,5 =$

Resp. a) 9,8 b) $1,5 \times 10$

Algumas definições

As definições de vários termos metrológicos são extraídos das referências [3 e 4]

¹*Incerteza* (de medição) – parâmetro, associado ao resultado de uma medição, que caracteriza a dispersão dos valores que podem ser razoavelmente atribuídos ao mensurando.

²*Incerteza padrão* – incerteza do resultado de uma medição expressa como um desvio padrão.

³*Avaliação da Incerteza Tipo A* – método de avaliação da incerteza pela análise estatística de séries de observações

⁴*Avaliação da Incerteza Tipo B* – método de avaliação da incerteza por outros meios que não a análise estatística de séries de observações

⁵*Valor verdadeiro de uma grandeza* – valor consistente com a definição de uma dada grandeza específica. É um valor que seria obtido por uma medição perfeita. Os valores verdadeiros são por natureza, indeterminados. O artigo indefinido “um” é usado preferivelmente ao artigo definido “o”, em conjunto com “valor verdadeiro”, porque pode haver muitos valores consistentes com a definição de uma dada grandeza específica.

⁶*Valor verdadeiro convencional de uma grandeza* – valor atribuído a uma grandeza específica e aceito, às vezes por convenção, como tendo uma incerteza apropriada para uma dada finalidade. Ex: o CODATA (1986) recomendou o valor para a constante de Avogrado como sendo $A = 6,0221367 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

⁷*Medição* – Conjunto de operações que tem por objetivo determinar o valor de uma grandeza

Referências:

- 1- G. F. Knoll, *Radiation Detection and Measurement*
- 2- W. R. Leo, *Techniques for Nuclear and Particle Physics Experiments*
- 3- *Guia para a Expressão da Incerteza de Medição*, Terceira edição Brasileira *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement* agosto 2003, ABNT, INMETRO
- 4- *Vocabulário Internacional de Termos Fundamentais e Gerais de Metrologia (VIM)*
- 5- Homero Lenz César, *Algarismo Significativo Erro Arredondamento*, Segunda edição. Edições UFC, Fortaleza 1995
- 6- Alexandre Mendes e Pedro Paulo Rosário, *Metrologia & Incerteza de Medição* EPSE, 2005
- 7- W. J. Price, *Nuclear Radiation Detection*, McGraw-Hill Book Company, Second edition, 1958.
- 8- P. R. Bevington, D. K. Robinson, *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences*, 2 ed.

Problemas

1 – Um átomo contendo 8 elétrons independentes (não há correlação eletrônica) é múltiplamente ionizado em uma colisão com um íon. A probabilidade de que cada elétron individual seja ionizado é $p=0,2$.

- Calcule a probabilidades $P(x)$ de ionizar 1, 2,...,8 elétrons. (dica: utilize a distribuição binomial)
- Mostre que $\sum_{x=0}^n P(x) = 1$.
- Calcule o número médio de elétrons ionizados.
- Calcule o desvio padrão do número de elétrons ionizados.

2 – Contagens provenientes de uma fonte são acumuladas em um contador por 1 minuto dando 561 contagens. A fonte é removida e acumula-se também por 1 minuto contagens de fundo dando 410 contagens. Qual o numero real de eventos devido a fonte somente e qual o desvio padrão associado ?

3– Um acumulo de 10 minutos de contagens de uma fonte + fundo resulta em 846 contagens. O fundo sozinho resulta em 73 contagens em um mesmo tempo de aquisição. Qual o numero de contagens líquida e o desvio padrão associado?

4 – O seguinte conjunto de leituras foi realizado usando um detetor para períodos de tempo de um minuto. 18500, 18410, 18250, 18760, 18600, 18220, 18540, 18270, 18670, 18540

- Qual o valor médio para o numero de contagens?
- Qual o desvio padrão ?
- Qual o valor teórico mínimo para o desvio padrão da media ?
- Qual o desvio padrão para uma simples leitura ?
- Qual o valor teórico mínimo para o desvio padrão para uma leitura simples?

5 – Matéria viva, ou que já viveu, contém uma pequena atividade de ^{14}C . Acredita-se que esta atividade é proveniente do bombardeamento do nitrogênio atmosférico por nêutrons provenientes dos raios cósmicos, predominante na alta atmosfera. Este carbono radioativo entra em sistemas vivos por processos de troca e alcança uma concentração de equilíbrio. Após a morte, a troca pára, e a quantidade de carbono radioativo diminui devido à meia-vida finita do ^{14}C . Comparando-se a atividade específica em um material morto com a da atmosfera, pode-se calcular o tempo passado desde a sua morte. Em um experimento em particular deste tipo, a taxa de contagens total foi de 14,0 contagens/minuto, e o fundo (background) foi de 9,5 contagens por minuto. Quanto tempo é necessário para medir a atividade do ^{14}C com uma precisão de 4 %?

6 – Obtenha as equações 29 e 30.

7 – Uma hora é disponível para uma determinação da taxa de contagem incluindo a medida do fundo. Qual a divisão ótima do tempo de aquisição (amostra e fundo) de modo a minimizar a incerteza da contagem líquida neste período de tempo ?

a) caso 1 : as taxas total e de fundo são 1000 e 20 contagens por minuto, respectivamente.

b) caso 2 : as taxas total e de fundo são 60 e 20 contagens por minuto, respectivamente. Calcule as incertezas em casa caso.

8 – A probabilidade de que um elétron esteja a uma distancia r do centro do núcleo do átomo de hidrogênio é dado por $P(r) = C \exp(-r/R)$. Encontre o raio médio $\langle r \rangle$ e o desvio padrão. Encontre o valor da constante C .

9 – Mostre que a tangente a uma função Gaussiana é extrema (máxima ou mínima) para $x = \mu \pm \sigma$, e portanto cruza a curva nos pontos $\exp(-0,5)$. Mostre também que estas tangentes cruzam o eixo y em $x = \mu \pm 2\sigma$.

10 – Um problema surge quando acumulamos dados com contadores eletrônicos nos quais podem saturar quando as taxas são muito altas, dando origem ao `tempo morto`. Por exemplo, apos uma partícula ter passado por um detector, o equipamento estará `morto` enquanto o detector se recupera e o restante da eletrônica armazena a informação. Se uma segunda partícula chega ao detector neste intervalo de tempo, ela não sera contada.

a) Suponha que o contador tem um tempo morto de 200 ns e esta exposto a um feixe de 1×10^6 particulas por segundo de tal modo que o numero médio de partículas chegando ao contador no intervalo de 200 ns é $\mu = 0.2$. A partir da distribuição de Poisson para este processo, encontre a eficiência do contador; ou seja, a razão entre o numero de partículas contadas e o numero médio de partículas incidentes no intervalo de 200 ns.

b) Repita os cálculos pra taxas de feixe de 2, 4, 6, 8, e 10×10^6 partículas por segundo, e faça um gráfico da eficiência do contador em função da taxa do feixe.

11 – Em um experimento de espalhamento para medir a polarização de uma partícula elementar, um total de $N = 1000$ partículas foram espalhadas pelo alvo. Destas, $N_d = 670$ foram espalhadas para a direita e $N_e = 330$ para a esquerda. Suponha que não ha incerteza no numero total de partículas espalhadas $N = N_d + N_e$.

a) qual a incerteza em N_d e em N_e ?

b) O parâmetro de assimetria é definido com $A = (N_d - N_e) / (N_d + N_e)$. Calcule a assimetria experimental e sua incerteza.

c) Suponha que a assimetria foi prevista como $A = 0,400$ e recalcule as incertezas do item a) e b) usando a probabilidade prevista.

12- Em uma dada medida de 10 minutos resultou em uma incerteza estatística de 2,8 %. Quanto tempo mais deveria ser medido para reduzir a incerteza estatística para 1,0 % ?

13 – Um fisico de partículas realiza medidas preliminares da distribuição angular dos mesons K espalhados por um alvo de nitrogênio liquido. Ela sabe que deveria ter um numero igual de partículas espalhadas pra frente e pra trás no referencial do centro de massa do sistema de partículas. Ela mediu 1000 interações e encontrou que 472

espalharam para frente e 528 para trás. Qual as frações dos mésons espalhados para frente e para trás? Qual a incerteza ela deveria adotar para estes estes números ?

Respostas

1- a) $P(1) = 0,336$

c) $\langle x \rangle = pN = 1,6$

d) 1,1

2- 151 contagens. $\sigma = 31$ contagens.

3- 773 contagens. $\sigma = 30$ contagens.

4- a) 18476 b) 58 c) 43 d) 184 e) 136

5-

6-

7-

8- $C = 4/R^2$

9-

10 – numero médio $\bar{x} = \sum_{x=1}^{\infty} P(x, \mu) = 1 - P(0, \mu) = 1 - e^{-\mu}$, eficiência = $\mu/\exp(-\mu)$

11-

12-

13- $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{1000 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} \approx 15.8$

fração para frente = $(472 \pm 15.8)/1000 = 0,47 \pm 0,16$

fracao para trás = $(528 \pm 15.8)/1000 = 0,53 \pm 0,16$

Se o experimentalista não sabe a priori as probabilidades de espalhamento, ela teria que estimar a partir das medidas $p = 472/1000$ e $q = 528/1000$