

---

# EL MÉTODO DE CAMINOS MÚLTIPLES DE FEYNMAN COMO REFERENCIA PARA INTRODUCIR LOS CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE LA MECÁNICA CUÁNTICA EN LA ESCUELA SECUNDARIA<sup>+</sup>\*

---

*Maria de los Ángeles Fanaro*

Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires  
Buenos Aires – Argentina

*Marcelo Arlego*

Instituto de Física La Plata  
Institute of Theoretical Physics  
University of Braunschweig – Alemania

*Maria Rita Otero*

Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires  
Buenos Aires – Argentina

## **Resumen**

*En las investigaciones en Enseñanza de las Ciencias se plantea recurrentemente la necesidad de introducir conocimientos relativos a la Física cuántica en la escuela secundaria. Sin embargo, los aportes en relación a qué conceptos enseñar son escasos y controvertidos, porque se enfocan por un lado, hacia la conveniencia o no de seguir la génesis estrictamente histórica y por otro lado, hacia la discusión acerca de basarse o no en las nociones clásicas para introducir los conceptos cuánticos. En este trabajo se presenta y analiza el enfoque de los caminos múltiples (path integrals) desarrollado por R. Feynman en 1948. Se lo toma como referencia para reconstruir una posible estructura conceptual alternativa a las vigentes, que permita abordar los fun-*

---

<sup>+</sup> Feynman's multiple ways method as a reference to introduce the fundamental concepts of the Quantum Mechanics at High Schools

<sup>\*</sup> *Recebido: novembro de 2006.  
Aceito: junho de 2007.*

*damentos de la Mecánica Cuántica en la escuela secundaria. Se analizan las simplificaciones matemáticas necesarias para este nivel y se esboza una propuesta basada en este enfoque alternativo, discutiendo sus potencialidades y limitaciones para la enseñanza.*

**Palabras clave:** *Aspectos fundamentales de Mecánica Cuántica, experiencia de la doble rendija, suma de caminos múltiples, estructura conceptual propuesta para enseñar.*

### **Abstract**

*Investigations in Science Education recurrently consider the necessity of Teaching Quantum Physics at High School. Nevertheless, the contributions about what concepts have to be taught are little and controversial. These recurrently focus towards the convenience to follow or not, the strictly historical genesis and whether the introduction of the Quantum Physics has to be based on Classical concepts. In this work, the Path Integrals method, developed by R Feynman, is analyzed and it is considered as a reference to construct a possible Proposed Conceptual Structure to teach the foundations of the Quantum Mechanics at High School. This is an alternative to the current ways to introduce the subject. Mathematical simplifications, according to this level, are also analyzed and a proposal based on this approach is outlined, analyzing and discussing its advantages and limitations.*

**Keywords:** *Quantum Mechanics, double slit experiment, Path Integrals, proposed conceptual structure for teaching.*

## **I. Presentación del problema**

Las investigaciones internacionales acerca de la enseñanza de la Física (CUPPARI; RINAUDO; ROBUTTI; VIOLINO, 1997; FISCHLER; LICHTFELDT, 1992; GONZÁLEZ; FERNÁNDEZ; SOLBES, 2000; GRECA; MOREIRA; HERSCOVITZ, 2001; HANC; TULEJA, 2005; PAULO; MOREIRA, 2004; MONTENEGRO; PESSOA, 2002; MOREIRA; GRECA, 2000; MÜLLER; WIESNER, 2002; NIEDDERER, 1996; OLSEN, 2002; OSTERMANN; MO-

REIRA, 2000; OSTERMANN; RICCI, 2004; PESSOA,1997; PINTO; ZANETIC, 1999; TAYLOR; VOKOS; O'MEARAC; THORNERD, 1998; TAYLOR, 2003; ZOLLMAN, 1999) y los programas curriculares de muchos países, como lo reportan Lobato y Greca, (2005) proponen el tratamiento escolar de los conceptos fundamentales de la teoría cuántica. En nuestro país, la propuesta curricular para la asignatura Física tiene entre sus expectativas, la comprensión y descripción de los conceptos fundamentales de las teorías cuánticas. Sin embargo, la cultura escolar ignora su estudio y cuando ocasionalmente lo aborda, lo hace en forma tangencial, más dentro de la disciplina Química, que desde la Física.

Sin pretensión de exhaustividad, podríamos mencionar las siguientes razones por las cuales los profesores de Física ignoran el mandato curricular y se resisten a enseñar mecánica cuántica en la escuela:

- **El desconocimiento de los conceptos cuánticos**

Suele considerarse que en comparación con los tópicos de la física clásica, los conceptos de la mecánica cuántica están demasiado alejados de las percepciones cotidianas. Es cierto que estos últimos desafían ciertas nociones que hemos naturalizado a partir de las observaciones cotidianas del mundo a escala macroscópica. Sin embargo, no hay razones para que el comportamiento del mundo atómico y subatómico deba seguir las mismas pautas que los objetos de nuestra experiencia diaria, siendo este, un hecho que por sí solo justifica incluirlo en la enseñanza. Por otro lado, como ha sido mostrado en investigaciones que destacan las serias dificultades de los estudiantes con la física clásica –sin ir más lejos, las leyes del movimiento de Newton- los calificativos “difícil y abstracto” también se aplican a los conceptos de la Física Clásica, además de a los conceptos cuánticos.

- **La complejidad matemática involucrada**

Suele considerarse que la física en general y la contemporánea en particular, sólo puede ser formulada, comprendida y enseñada en términos de conceptos matemáticos. También se asume que su potencialidad explicativa sólo puede apreciarse a través de un buen manejo del formalismo. Por lo tanto, en las escasas propuestas que intentan introducir la física cuántica en la escuela, predomina el formalismo matemático que oculta los principios fundamentales en un pequeño conjunto de ecuaciones matemáticas “relativamente sencillas”. Como los estudiantes acaban por aprender dichas ecuaciones mecánicamente, se producen fenómenos de pérdida de significado, que desalientan la incorporación de la física cuántica al conocimiento escolar.

- **La competencia lograda en la formación de profesor**

Según reporta la investigación de González, Fernandez y Solbes, (2000) los profesores declaran haber estudiado durante su formación, tópicos que se corresponden con los índices de los libros de introducción a la física moderna general. En orden cronológico, entre ellos se encuentran: la radiación de cuerpo negro, el átomo de Bohr, el efecto fotoeléctrico, la dualidad onda partícula, la ecuación de Schrödinger, etc. Es decir, los profesores reflejan un adecuado conocimiento “informativo” de los tópicos desarrollados en la etapa anterior a Bohr, pero lo que en ellos prevalecen son nombres y cuestiones fragmentadas e inconexas. Por lo tanto, estos investigadores consideran que los profesores tienen visiones reduccionistas, donde los conceptos cuánticos aparecen asociados con ideas clásicas y no del todo diferenciados de ellas. Esto señala una seria limitación en los procesos de enseñanza.

- **La propuesta de los libros de texto**

Los libros de texto son los medios a disposición de los profesores para reconstruir la Estructura Conceptual Propuesta para Enseñar (**ECPE**). A raíz de que los libros, tanto los dirigidos a los estudiantes como los de consulta para el profesor, presentan los conceptos de una manera que refleja los aspectos mencionados previamente, tampoco resulta alentador el tratamiento escolar de la mecánica cuántica. En otras palabras, se trata de un saber que así planteado “no vive” en el ámbito escolar, mientras si son “ecológicamente viables” estructuras conceptuales relativas a física clásica.

Un aspecto destacable es la cuestión ¿es necesario estudiar la mecánica cuántica en la escuela? Para responder a esta pregunta basta mencionar que toda la tecnología actual se basa directa o indirectamente en la mecánica cuántica. Por citar solo algunos ejemplos, la misma es la base de la electrónica basada en semiconductores, del láser y la tecnología nuclear. Además la mecánica cuántica juega un rol central en el desarrollo de futuras tecnologías como la computación cuántica y la nanotecnología. Si adoptamos la importancia de la mecánica cuántica como criterio para introducir su estudio en la escuela media, debemos reconocer, además de los avances tecnológicos, los siguientes aspectos:

- Las implicaciones filosóficas y epistemológicas de la mecánica cuántica, han modificado la concepción del proceso de medición y de predicción en Física. Incluso no existe una única interpretación de la mecánica cuántica que sea universalmente aceptada entre la comunidad de los físicos y filósofos de la ciencia.

- Desde el punto de vista del conocimiento básico, la mecánica cuántica, por un lado es la base de la química y por lo tanto es imprescindible

para una comprensión de la estructura de la materia a escala macroscópica. No es posible comprender las propiedades de los metales, por ejemplo, sin la mecánica cuántica. Por otro lado, la mecánica cuántica, junto con la teoría de la relatividad, provee el marco adecuado para describir las interacciones fundamentales a nivel sub-nuclear y a energías arbitrarias a través del modelo estándar. Incluso teorías aún especulativas acerca de la unificación de todas las interacciones (incluida la gravedad), como lo es la teoría de *cuerdas*, no contradicen los principios de la mecánica cuántica.

El advenimiento de la mecánica cuántica constituye un hito en la evolución intelectual de la especie humana, y en consecuencia, la escuela es un ámbito apropiado para invitar a que los estudiantes la conozcan. El conocimiento básico de dicha revolución debería integrar el bagaje cultural de una población educada y desarrollada, al igual que la literatura, la matemática o la economía política. La mecánica cuántica incide en diversos campos de la actividad cognitiva y obliga a reformular explicaciones y conceptos muy arraigados en nuestra experiencia cotidiana. La conceptualización de un sistema cuántico requiere ingresar en un nuevo dominio explicativo y aceptar categorías que desafían a las originadas en la experiencia macroscópica, acerca del comportamiento ondulatorio y corpuscular como mutuamente excluyentes.

La idea de que el observador está involucrado en lo que observa, es decir, que sus distinciones no aluden a un mundo pre-dado independiente de él, ha sido reconocida hace tiempo en la filosofía de las ciencias y supone la renuncia a fundamentos últimos para el conocimiento. El advenimiento de la mecánica cuántica, introduce limitaciones *fundamentales* acerca de la precisión con que pueden medirse ciertas magnitudes en un sistema cuántico. Este aspecto se formaliza en el *principio de incerteza*, el cual desafía nuestros pre-conceptos sobre el rol del observador y el sistema analizado. Dicho principio es una manifestación del abandono del carácter determinístico de la física clásica por una teoría que provee *solo* la probabilidad de un evento dado, considerando ciertos estados inicial y final. En física clásica naturalizamos la idea de que los sistemas físicos tienen ciertas propiedades, y que así, diseñamos y llevamos a cabo experimentos como si nos brindaran información de ese sistema físico pre-existente. En física cuántica, es la conjunción de un sistema cuántico y un mecanismo de medición lo que nos brinda un resultado definitivo. Ya que diferentes mediciones proporcionan resultados incompatibles con características del sistema que son pre-existentes, no podemos entonces definir ninguna clase de realidad física a menos que describamos el sistema físico que estamos investigando y el tipo de medición que estamos llevando a cabo sobre ese sistema. Esta conclusión resulta asombro-

sa ya que nuestra educación se ha basado en la premisa de la existencia de una realidad externa, objetiva y definitiva, sin importar cuánto o cuán poco conociéramos de ella. Es muy anti-intuitivo aceptar que la “realidad” de algo se materializa en el acto de medir-observar, hasta tanto eso no ocurre, no existe realidad.

Estudiar los conceptos y principios que rigen el comportamiento cuántico en la escuela media, es indispensable para conjurar el fracaso social – entendido como resignación del saber – que reduce la física escolar a contenidos de una física anterior a 1900. Pero ¿qué clase de aproximación al “mundo cuántico” podemos proporcionar a los estudiantes de la escuela media? En este trabajo nos restringimos a proponer el estudio de aquellos conceptos que resulten fundamentales de la mecánica cuántica, para lo cual adoptaremos, analizaremos y discutiremos el “Método de caminos múltiples” de Feynman (1949) como Estructura Conceptual de Referencia<sup>1</sup>, y en base a este enfoque, reconstruiremos una ECPE.

La introducción a la mecánica cuántica propuesta es alternativa a la adopción de una línea estrictamente histórica en la organización de los conceptos. Entendemos como estrictamente histórica, a la estructura que proponen buena parte de los textos y planes de estudio de la denominada “física moderna” – aunque ya tenga más de ochenta años. Quizás, este seguimiento estrictamente histórico se relacione con el hecho de que cuando los textos que aún se usan fueron editados, la construcción de la teoría cuántica tenía apenas veinte años. Actualmente, parece poco sensato reconstruir fielmente los vaivenes atravesados por la física hasta llegar al conocimiento actualmente compartido. Sobre todo porque las soluciones de Planck al problema de la radiación del cuerpo negro, Bohr y de Broglie a la estabilidad del átomo, y Einstein al efecto fotoeléctrico, solo insinúan la necesidad de plantear soluciones que no podían contemplarse desde la física conocida hasta el momento, pero sin tener una teoría coherente que respalde las hipótesis “ad hoc” que en ese momento propusieron. Cuando Planck propuso la cuantización de la energía radiada, no pensaba que había abierto las puertas de una nueva física. Por el contrario, él solo atribuyó a los cuantos el carácter de artilugio matemático, sin significación física genuina, y abrigó la

---

<sup>1</sup> ECR (Estructura Conceptual de Referencia) es el conjunto de conceptos y sus relaciones, relativos a un cierto campo conceptual, según aparece formulado y consensuado en las conversaciones y en los textos especializados propios de una cierta comunidad científica de referencia. En cambio, Estructura Conceptual Propuesta para Enseñar (ECPE) es el conjunto de conceptos y las relaciones entre ellos, relativos a un cierto campo conceptual, que debe ser reconstruida por los profesores a partir de una estructura conceptual de referencia (ECR) a la que también contribuyen los programas oficiales y textos escolares, con el objeto de convertirla en enseñable en un contexto y en una institución dada (OTERO, 2006).

esperanza de que estaba frente a un enigma –resoluble dentro de la física clásica– y no frente a una anomalía. En consecuencia, la reconstrucción estrictamente histórica, no resalta los aspectos fundamentales de la mecánica cuántica. Eso no implica que una vez introducidos los conceptos fundamentales, no recurramos a la historia de la física para contextualizar el nuevo conocimiento y considerar dimensiones sociales, filosóficas, políticas, etc., que nos permiten reflexionar acerca de la ciencia, sus características, sus dificultades, su falibilidad.

El método de caminos múltiples no solo no sigue la génesis histórica, sino que también es alternativo al formalismo canónico que los estudiantes universitarios de física aprenden en los cursos de mecánica cuántica. En este trabajo, nuestro desafío es extraer las ideas principales, sin el manejo matemático formal, e implementarlas con asistencia de software como herramienta para introducir los conceptos cuánticos. (FANARO; OTERO; ARLEGO, 2007) Para nuestros propósitos, la principal ventaja es que en el formalismo de caminos múltiples la transición entre el comportamiento clásico y cuántico se puede mostrar de una manera sencilla, que creemos accesible a estudiantes de escuela secundaria<sup>2</sup>. Asimismo, el tratamiento muestra claramente la emergencia del comportamiento ondulatorio y corpuscular en un marco unificado que es conceptualmente simple. Sobre esta base, se analiza una posible reconstrucción de la Estructura Conceptual Propuesta para Enseñar.

## **II. Las investigaciones sobre la enseñanza de la Mecánica Cuántica en la escuela secundaria**

Sin pretensión de exhaustividad acerca del “estado del arte” de las investigaciones sobre la enseñanza de la mecánica cuántica en la escuela, es posible sintetizar lo investigado hasta el momento en lo que se refiere a propuestas de enseñanza<sup>3</sup>, diciendo que mayoritariamente, la preocupación se ha concentrado en estudiar las consecuencias de utilizar o no la mecánica clásica como apoyo para enseñar mecánica cuántica. Tradicionalmente, la enseñanza de la Mecánica Cuántica en los cursos introductorios de la universidad o en algunas escuelas

---

<sup>2</sup> Nos referimos a estudiantes de 16-17 años.

<sup>3</sup> Otros aspectos investigados son: justificación para su inserción en el currículum, exploración de concepciones de los estudiantes y de los profesores respecto de los conceptos cuánticos, para identificar las concepciones erróneas. Estas últimas cuestiones quedan fuera de nuestros propósitos debido a que nuestra propuesta estará dirigida a aquellos estudiantes en los que se presentan por primera vez los conceptos fundamentales de la mecánica cuántica.

medias de otros países, se caracteriza por el predominio de un enfoque que acompaña estrictamente la génesis histórica. Se comienza *“por la vieja teoría cuántica, y algunos de los experimentos reveladores de la estructura cuántica de los sistemas microscópicos, en los cuales se hace uso (y abuso) de analogías y modelos clásicos”* (GRECA, 2004). De esta forma, se trata al inicio el problema de la radiación de cuerpo negro, pasando luego por los primeros modelos atómicos hasta el átomo de Bohr, y se presenta la ecuación de onda de Schrödinger. Según Greca (2004) aunque la intención de este tipo de abordajes es que los estudiantes adquieran familiaridad con los conceptos cuánticos, los resultados son insatisfactorios.

Por otro lado, en los materiales para enseñar y cursos introductorios, ante la escasa formación matemática de los estudiantes, el formalismo no se presenta de forma integral, sino que solo se proponen algunas fórmulas aisladas, como la fórmula de Plank, y la ecuación de Schrödinger. Como consecuencia de la adopción de la ECR anteriormente descrita una de las mayores pérdidas de sentido que pueden mencionarse es que la constante de Planck se reduce a un factor de proporcionalidad en una fórmula que liga la energía con la frecuencia. No se analizan ni la magnitud de la constante, ni las consecuencias que ella tiene para los conceptos en las que está presente. Usualmente dichas propuestas otorgan un papel exclusivo a la ecuación de Schrödinger y a sus soluciones, *“oscureciendo la física con el álgebra, dejando a los estudiantes la impresión que la mecánica cuántica se logra comprender más a medida que más se dominan las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales”* (DOWRICK, 1997).

Alternativamente al abordaje tradicional, investigaciones como las de Fischler y Litchfeldt (1992) y como la de Greca y Moreira (2000) explícitamente proponen evitar que los estudiantes interpreten fenómenos cuánticos a partir de conceptos clásicos, desvinculándolos con ideas previas y enfatizando los aspectos singulares de la descripción cuántica. Sin embargo, los resultados del estudio de Paulo y Moreira (2004) sugieren que la comprensión y construcción de los conceptos cuánticos no se ve obstaculizada por el aprendizaje significativo de ciertos tópicos de física clásica, en particular de la mecánica ondulatoria.

Algunas investigaciones que se ocupan de la enseñanza de la mecánica cuántica en la escuela media, destacan la importancia de evitar expresiones como “doble naturaleza” de los sistemas cuánticos y abandonar la terminología “onda-partícula”. Esto conduciría a que *“los estudiantes se confundan al intentar aunar ambos conceptos, en vez de conceptualizar que se trata de sistemas cuánticos, con características propias, peculiares”* (FISCHLER; LICHTFELDT, 1992)

Otras investigaciones destacan la necesidad de evitar frases un tanto



confusas como “los electrones se comportan como ondas” (STRNAD, 1981). Estas recomendaciones también serán consideradas en nuestra propuesta.

El trabajo de Hanc y Tuleja (2005) sintetiza el estado actual de la enseñanza de la mecánica cuántica basada en la propuesta de Feynman, especialmente de aquellos que usan software de modelización en computadora. Según estos autores, el pionero es el trabajo de Edwin F. Taylor (MIT, Massachusetts, US) quien en 1996 elaboró el curso “Desmitificando la mecánica cuántica”. Este curso está basado en el famoso libro “QED: The strange theory of the light and matter” de Feynman (1985) escrito para un público no especializado en el tema, en el cual Feynman explica su método de la integral de camino en un lenguaje no técnico y accesible. El curso de Taylor (2003) se basa en la modelización en computadora y software realizado en una plataforma independiente de lenguaje cT. Según Hanc y Tuleja (2005), *“aunque este software tiene un gran valor pedagógico, hoy día resulta rudimentario y no permite un control confortable para el usuario, además de ser ese un lenguaje no muy bien soportado”* .

También en Estados Unidos desde 1985, Dan F. Styer (Oberlin College, Ohio) ha abordado en su libro este enfoque y ha desarrollado un curso basado en la formulación de Feynman que comienza con sistemas cuánticos simples, pero a diferencia del curso de Taylor, no considera la evolución en el tiempo de la función de onda. También trata las paradojas como las de Einstein-Podolsky-Rosen y trata las aplicaciones modernas como la computación cuántica y la criptografía. Las lecturas del curso están condensadas en su libro “The StrangeWorld of Quantum” (Styer, 2000)

Por su parte, en Reino Unido, entre el 2003 y el 2004, John Ogborn (Institute of Education, University of London, UK), a través del proyecto “Advancing Physics” ha propuesto una nueva currícula de Física para los dos últimos años de la escuela secundaria (estudiantes de 16 años de edad aproximadamente) que intenta reflejar una física actual. Las ideas de Feynman de la mecánica cuántica forman una parte esencial del programa, y representan adaptaciones del libro de Feynman y de algunas partes del curso de Taylor.

Actualmente en Slovakia, Hanc y Tuleja han desarrollado materiales para enseñar mecánica cuántica exclusivamente con la computadora. Utilizaron el libro QED de Feynman y los materiales de Taylor, en una versión más extensa que la de Ogborn. A diferencia de éstos, la propuesta también incluye el estudio en el nivel universitario. Si bien la propuesta original se programó en Delphi, actualmente se están revisando los programas y extendiéndolos a la forma de aplicaciones Java. La organización de contenidos puede encontrarse en Hanc y Tuleja (2005), y aunque ellos declaran que su aproximación entusiasma a los estudiantes y logran una comprensión más conceptual de las ideas cuánticas fun-

damentales, no resulta claro cómo realizaron el testeo del material, ni se muestran en su comunicación resultados precisos de ello.

Estas propuestas de enseñanza basadas en el enfoque de Feynman, y con un predominio del uso de herramientas computacionales, en general focalizan en el comportamiento dual de la luz. Partiendo del carácter ondulatorio de la radiación electromagnética se arriba a un comportamiento corpuscular de la luz, bajo ciertas condiciones, como ser bajando la intensidad de la luz en un experimento de la doble rendija. Este enfoque inevitablemente lleva al concepto de fotón. Si bien esta es una alternativa posible, consideramos que la utilización del concepto de fotón a nivel de escuela secundaria, tal vez no sea la forma más sencilla de introducir la mecánica cuántica, al menos en una primera etapa.

En cambio, nuestro enfoque es en cierta forma opuesto. Pretendemos construir una imagen del comportamiento dual de la materia a través del análisis de la emergencia del comportamiento ondulatorio a partir del comportamiento corpuscular. Nuestro ejemplo paradigmático será el experimento de la doble rendija con partículas de masas cada vez más pequeñas. En dicho experimento, que llevaremos a cabo hipotéticamente a través de simulaciones, la transición entre un comportamiento corpuscular a ondulatorio se manifiesta a través de la aparición de un patrón de interferencia en la pantalla de detección al disminuir sucesivamente la masa de las mismas.

Para nuestros propósitos, la principal ventaja es que en el formalismo de caminos múltiples la transición entre el comportamiento clásico y cuántico se puede mostrar de una manera que podría resultar más accesible a los estudiantes de escuela secundaria<sup>4</sup>.

### **III. El enfoque de Feynman: la integral de camino ó suma de todas las alternativas**

En esta sección desarrollaremos la idea principal de la propuesta de Feynman, la formulación de caminos múltiples (path integrals) o “Suma de todas las alternativas” (STA), como lo llamaremos de ahora en adelante. Esta técnica fue desarrollada por Richard Feynman en 1948. La misma es equivalente a la formulación tradicional de la mecánica cuántica (formalismo canónico), desarro-

---

<sup>4</sup> Nos referimos a estudiantes de 16-17 años.

llada previamente por E. Schrödinger, W. Heisenberg y P. M. Dirac en 1925-1926. Ambas formulaciones han mostrado ser complementarias en el sentido que ciertos problemas como el átomo de hidrogeno son muy simples de abordar en el formalismo canónico mientras que son difíciles de resolver en la STA. Inversamente, ciertos tópicos avanzados tales como el modelo estándar de las partículas elementales admiten una formulación más sencilla en términos de la STA.

A continuación desarrollamos la técnica que se tomará como *punto de partida* para la futura implementación de un conjunto de actividades *contextualizadas y adaptadas* a los conocimientos matemáticos que los estudiantes del nivel medio poseen.

La razón principal para sugerir la STA como técnica apropiada para introducir las ideas cuánticas en la escuela media es que, como hemos mencionado, conceptualmente la idea es accesible a dichos estudiantes así como también lo es, la transición entre el comportamiento clásico y cuántico, como mostramos más adelante.

En la formulación de STA el concepto de acción juega un rol central. Por ello comencemos repasando el principio de mínima acción de la mecánica clásica. Por simplicidad consideremos el caso **unidimensional** de una partícula macroscópica de masa  $m$  sometida a un potencial  $V(x)$ . Dado un estado inicial  $I = x_i(0)$  y un estado final  $F = x_f(T)$  existe una *única* relación funcional entre la posición y el tiempo<sup>5</sup>,  $x_{cl}(t)$  que une ambos estados, describiendo el movimiento observado de la misma y está dada por la solución de la segunda ley de Newton. Este mismo problema clásico se resuelve a través del *principio de mínima acción*, cuya formulación es la siguiente.

Se parte de la definición de la acción  $S[x(t)]$ :

$$S[x(t)] = \int_0^T L[x(t)] dt \quad (1)$$

donde  $L$  representa el *Lagrangiano* del sistema:

$$L[x(t)] = \frac{1}{2} m \left( \frac{dx(t)}{dt} \right)^2 - V(x(t)),$$

---

<sup>5</sup> Si bien es común que la bibliografía en inglés utilice el término “trajectory”, para designar la relación posición-tiempo preferimos no utilizar la palabra trayectoria con los estudiantes, ya que esto da lugar a confundir esta relación con la curva que en el espacio dimensional forman todos los puntos por los que pasa la partícula. Para ello, como nos referiremos siempre al caso del movimiento unidimensional, nos referiremos a la relación espacio/tiempo utilizando la notación  $x(t)$ .

es decir la energía cinética menos la potencial. Para cada función  $x(t)$  que describe una posible alternativa para ir desde el estado inicial al estado final la acción  $S[x(t)]$  toma un valor. El principio de mínima acción establece que de todas estas posibles  $x(t)$ , la clásica  $x_{cl}(t)$ , es la que minimiza a la acción, es decir:  $S[x_{cl}(t)]$  es mínimo. La equivalencia entre el principio de mínima acción y la segunda ley de Newton se muestra en los libros de texto de mecánica clásica (por ejemplo GOLDSTEIN, 1966).

Como es sabido, las leyes de la Física clásica no son válidas para masas arbitrariamente pequeñas. En dicho caso la descripción adecuada es a través de las leyes de la mecánica cuántica. La misma describe correctamente el comportamiento a escala atómica o menor e incluye a la mecánica clásica como caso particular cuando las masas son macroscópicas. El principal cambio de paradigma respecto de la mecánica clásica es que dadas ciertas condiciones iniciales y finales, en la mecánica cuántica ya no hablamos de una *única* función  $x_{cl}(t)$  describiendo la evolución del sistema desde un estado inicial I hasta un estado final F, sino de la *probabilidad* de arribar a F partiendo de I. En la formulación de STA de la mecánica cuántica, el cálculo de dicha probabilidad involucra la evaluación de *todas* las  $x(t)$  alternativas (de allí el nombre del método) que conectan los estados iniciales y finales. Como veremos, esto es particularmente relevante en el dominio atómico o subatómico.

La formulación de STA de la mecánica cuántica, para el problema **unidimensional** que estamos tratando, puede formularse a través de las siguientes reglas:

- Para cada posible  $x_\alpha(t)$  que une el estado inicial  $I = x_i(0)$  con el final  $F = x_f(T)$ , calculamos la acción correspondiente  $S[x(t)]$  a través de la Ec.(1)

- A esta acción,  $S[x(t)]$ , asociamos un número complejo unitario  $Z_\alpha = \exp(i S[x(t)] / \hbar)$ , siendo  $\hbar = h / 2\pi$ , donde  $h = 6.625 \times 10^{-34}$  J.s se denomina *constante de Planck*.

- La probabilidad de arribar a F partiendo de I es:  
 $P[I \rightarrow F] = |A[I \rightarrow F]|^2$ , donde la *amplitud de probabilidad*  $A[I \rightarrow F]$  se obtiene sumando todos los  $Z_\alpha$ :

$$A[I \rightarrow F] = C \sum_{\text{todas las } x(t)} e^{(i \frac{S[x(t)]}{\hbar})}, \quad (2)$$

siendo C es una constante de proporcionalidad.

La ecuación anterior se interpreta del siguiente modo: cada una de las formas o caminos alternativos  $x_\alpha(t)$  de ir de I a F contribuyen a la amplitud de probabilidad  $A[I \rightarrow F]$  con un número complejo de módulo 1 *pero* con una fase

diferente, dada por el valor de  $S[x(t)] / \hbar$ . La amplitud de probabilidad resultante es el vector resultante de *sumar* cada uno de los vectores  $Z_\alpha$  asociados a cada alternativa posible. Es decir, para eventos alternativos la amplitud se obtiene sumando las amplitudes para cada alternativa. Luego elevamos al cuadrado el módulo de la amplitud de probabilidad resultante  $A [I \rightarrow F]$ , y obtenemos la probabilidad de arribar a F partiendo de I.

Desde un punto de vista estrictamente matemático, el método STA presenta problemas formales, principalmente en relación a la definición y la convergencia de la suma. En la práctica, la suma sobre todos los caminos puede evaluarse en algunos casos sencillos como el de la partícula libre o el oscilador armónico. En casos más complejos se recurre a tratamientos aproximados en forma de desarrollos en serie alrededor de casos con solución exacta (teoría de perturbaciones) o a la evaluación estadística de las sumas (métodos de Monte Carlo) entre otras técnicas. Una ventaja de la formulación de la STA es que permite obtener una serie de resultados formales (no perturbativos) a los que es difícil de arribar mediante el formalismo canónico.

El tratamiento de la STA es generalizable a sistemas de partículas y campos, incluso en el dominio relativista, empleando el Lagrangiano correspondiente. Por su parte, la equivalencia de la técnica STA con el formalismo canónico de operadores se muestra en muchos libros de texto de mecánica cuántica (véase SHANKAR, 1980).

#### IV. La elección del enfoque STA

En esta sección esbozamos las características de una **ECPE** basada en la STA de Feynman como alternativa al abordaje estrictamente histórico y también al formal o canónico. Los aspectos fundamentales a remarcar a favor de introducir este enfoque en la escuela media son los siguientes:

- El enfoque STA permite conceptualizar los aspectos fundamentales de la física cuántica, utilizando un nivel matemático basado en operaciones elementales con vectores y enfatizando principalmente la idea probabilística de la mecánica cuántica.
- Según el *Principio de correspondencia*, la descripción física de los eventos en la escala cuántica se debe extender al mundo macroscópico en el límite de grandes valores de masas (estrictamente grandes valores de la acción con respecto a  $\hbar$ ). Es decir, la mecánica cuántica debe predecir los mismos resultados que la mecánica clásica para objetos macroscópicos, donde en la práctica puede considerarse  $\hbar$  tan pequeño en relación con las dimensiones macroscó-

picas, que  $\hbar \rightarrow 0$ . Una ventaja importante del enfoque STA, es que su formulación permite explicar la transición entre el comportamiento microscópico y macroscópico, como mostramos a continuación:

Consideremos una masa macroscópica  $m$  desde el punto de vista de la formulación de la STA de la mecánica cuántica. Supongamos dos  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  arbitrarias. Las mismas aportan a la amplitud:  $\exp(i S[x_1(t)]/\hbar) + \exp(i S[x_2(t)]/\hbar)$ . Como  $m$  es macroscópica,  $\Delta S = S[x_1(t)] - S[x_2(t)] \gg \hbar$  lo que significa que el cambio de fase es muy grande. Por lo tanto en promedio, al sumar los vectores  $Z_\alpha$  correspondientes a  $x_\alpha(t)$  arbitrarias tenderán a anularse y no aportarán a la suma (notar que este es un razonamiento estadístico). Sin embargo esto no sucederá para *todas* las  $x_\alpha(t)$ . ¿Que ocurre con  $x_{cl}(t)$ , la trayectoria que definitivamente sigue la partícula macroscópica? Sabemos que la acción es mínima en ese caso. Esto implica que al menos en un entorno extremadamente reducido alrededor de la trayectoria clásica, indistinguible macroscópicamente, los caminos aportan todos con aproximadamente la misma fase (ya que en el mínimo el cambio en la acción es cero a primer orden en  $\Delta x = x - x_{cl}$ ). Es decir  $x_{cl}(t)$  es la única que prácticamente aporta a la suma. Por lo tanto, para una masa macroscópica la probabilidad para la  $x_{cl}(t)$  de mínima acción tiende a uno y así obtenemos a partir de la mecánica cuántica, vía la formulación STA los mismos resultados de la mecánica clásica. Por supuesto el rol “especial” de la  $x_{cl}(t)$  se pierde en el dominio atómico, en el caso general de un potencial arbitrario, donde para cada  $x(t)$ ,  $S \approx \hbar$  y entonces todas las posibles formas de  $x(t)$  aportan a la suma y por ende deben considerarse. Sin embargo, debemos aclarar que para el caso de un sistema libre ( $V=0$ ), incluso en el dominio atómico la forma  $x(t)$  clásica y su entorno juegan un rol especial. Aunque esto no es válido en general, haremos uso de este caso simple para interpretar los resultados del experimento de interferencia de electrones, en la próxima sección.

- Otra ventaja es que a pesar del nivel matemático avanzado que implica su implementación técnica, la comprensión de la idea principal y los resultados de la STA, se ve facilitada mediante el uso de herramientas informáticas de simulación accesibles a los estudiantes de la escuela media. En particular estas herramientas reemplazan el lenguaje algebraico por el geométrico, utilizando un marco de operaciones básicas con vectores. (FANARO; OTERO; ARLEGO, 2007). Para evitar el uso de números complejos, que no son familiares para los estudiantes, a la amplitud de probabilidad se la representará como un vector unitario de ángulo  $S/\hbar$ , que expresado en forma polar está dado por:

$$\longrightarrow$$

$$\text{Amplitud} = (1; S/\hbar)$$

O bien, en forma de coordenadas cartesianas:

$$\longrightarrow$$
$$\text{Amplitud} = (\cos S/\hbar; \sin S/\hbar)$$

El lenguaje geométrico permite a los alumnos visualizar el proceso de suma, que se reduce a una adición de vectores, la cual es conocida por los estudiantes de nivel medio y reafirmar la idea que es la fase o ángulo del vector y no el módulo quien varía de una  $x(t)$  a otra.

Durante el desarrollo de la situación didáctica basada en este enfoque, se supone que pueden surgir entre los estudiantes cuestiones como las siguientes: ¿qué son “realmente” las partículas atómicas tales como el electrón? o ¿Cómo se las podría visualizar en términos de conceptos macroscópicos, que son los únicos con los cuales tenemos experiencia directa? Otra pregunta podría ser acerca de si las partículas atómicas “recorren todos los caminos”. Para disipar estos inconvenientes es necesario dejar muy en claro que el método STA es *solo* un dispositivo de cálculo. Para dar un ejemplo, podemos controlar la salida de electrones de una fuente y observar que llegan al detector con una cierta distribución de probabilidades. Luego podemos analizar el problema mediante el formalismo de STA o canónico, calculando dicha distribución de probabilidades. Finalmente observamos que nuestro cálculo está de acuerdo con lo que se midió. Eso es todo lo que la mecánica cuántica puede decir al respecto y su poder y vigencia radica en la capacidad de predecir los resultados de los experimentos.

Para evitar problemas conceptuales y de nomenclatura, llamaremos “sistemas cuánticos” a los objetos de tamaño microscópico (atómico o subatómico). Evitaremos el término *partícula cuántica*, que tiende a confundir más que a clarificar conceptos, porque sigue enfatizando la idea de partícula. Remarcaremos que los sistemas cuánticos exhiben bajo ciertas circunstancias un comportamiento que asociamos con el *concepto macroscópico de partícula* y en otras con el *concepto macroscópico de onda*. Pero que en realidad los sistemas cuánticos exhiben su propio *comportamiento cuántico* caracterizado por esta *dualidad* y de allí su carácter peculiar. Se hará énfasis en la diferencia del comportamiento entre éstos y los objetos macroscópicos con los que tenemos experiencia directa.

Admitiendo que los estudiantes de la escuela viven en un mundo clásico y que por lo tanto estos son los conocimientos que poseen hasta el momento, nuestra propuesta contempla la selección de conceptos que actuarían como base para aprender los aspectos fundamentales de la mecánica cuántica, sin bloquear su aprendizaje. Los estudiantes deberían conocer los siguientes conceptos al momento de reconstruir la propuesta para enseñar:

- Ideas básicas de Mecánica clásica, como trayectoria y relación  $x(t)$  “única” para objetos macroscópicos, segunda ley de Newton y concepto de energía.
- Conocimientos básicos de los fenómenos ondulatorios. Experimentos de difracción e interferencia en cubas de agua u otros sistemas mecánicos que exhiben comportamiento ondulatorio.

## V. La reconstrucción de la ECPE

Como hemos remarcado, a diferencia de los trabajos previos mencionados en Hanc y Tuleja (2005), que utilizan el enfoque de Feynman para explicar la emergencia de los aspectos corpusculares de la luz a través del concepto de fotón, partiendo del carácter ondulatorio de la misma, nuestra propuesta estudia la emergencia del comportamiento ondulatorio de objetos materiales al reducir la masa.

La propuesta comienza con el análisis de la experiencia de la doble rendija y la discusión de sus resultados, ya que ella “*resulta clave para poner en evidencia el comportamiento cuántico de los electrones, e ir directamente a los aspectos fundamentales de la mecánica cuántica*” (FEYNMAN, 1965)

El esquema cronológico de acciones didácticas en el cual nos basaremos para llevar a cabo nuestra propuesta es el siguiente:

1- Discutir los resultados de la experiencia de la doble rendija cuando se realiza con objetos macroscópicos, por ejemplo balas. Se busca llegar a la conclusión que debido a que cada bala responde a una única relación funcional entre posición y tiempo desde que sale hasta que llega a la pantalla la curva resultante cuando ambas rendijas están abiertas, es una curva de “no interferencia”, en el sentido que ella se obtiene sumando las curvas individuales por separado. Un software de simulación que permitiría visualizar esto es “Experimento de la doble fisión em Mecánica Cuántica”, creado por Muthsam, K del Physics Education Research Group of the University of Munich y que se encuentra disponible en Internet em:

<http://www.physik.uniuenchen.de/didaktik/Downloads/doppelspalt/dslit.html>

2- Introducir los conceptos necesarios para poder interpretar los resultados clásicos obtenidos en la experiencia de la doble rendija con balas, que serán fundamentales para comprender el enfoque STA. Se comenzará con el estudio del caso de movimiento unidimensional, revisando el significado de la relación  $x(t)$  como conjunto de pares (tiempo; posición). Luego se debe definir la acción para una partícula libre  $S$  dadas las condiciones iniciales  $(0, x_i)$  y finales



( $T, x_f$ ) Como no es usual que los estudiantes estudien en la escuela los conceptos de derivada e integral, éstos se reemplazarán por valores medios. De esta forma  $S = \langle EC \rangle \cdot T$

La magnitud  $\langle EC \rangle$  se refiere al valor promedio de la energía cinética, concepto conocido por los estudiantes. Se utilizará el software de simulación interactivo *Modellus*<sup>TM</sup><sup>6</sup> para que los alumnos se familiaricen con el concepto de acción y evalúen el cambio de  $S$  al elegir diferentes alternativas de  $x(t)$ . De esta forma, es posible establecer el principio de mínima acción de la mecánica clásica en el caso de la partícula libre. La idea aquí es que los alumnos corroboren que la acción  $S$  es mínima para la relación funcional  $x(t)$  clásica, en este caso una recta, comparándola con otras  $x(t)$  arbitrarias<sup>7</sup>. Se debe enfatizar la idea de  $x(t)$  única en el dominio clásico y que la física clásica describe correctamente el comportamiento de los objetos macroscópicos. Por ejemplo, el experimento de la doble rendija con objetos macroscópicos.

3- Analizar los resultados del experimento de la doble rendija con electrones. Anticipamos aquí que los estudiantes muy posiblemente tengan conceptualizados a los electrones como “pequeñas partículas” y que por lo tanto, no sería esperable un patrón de interferencia. Se pretende confrontar esto con los resultados obtenidos. Dada la imposibilidad de realizar esta experiencia en el contexto escolar, haremos uso de un software de simulación de la experiencia interactivo y una filmación de la experiencia. Con ambas herramientas es posible visualizar como se va construyendo el patrón de interferencia obtenido a partir de los impactos de los electrones individuales al llegar a la pantalla. El principal aspecto a destacar aquí es que a pesar de que los electrones llegan en unidades discretas, el patrón resultante es de interferencia, es decir que la curva resultante cuando ambas rendijas están abiertas, no se puede obtener sumando las curvas individuales (abriendo las rendijas de a una por vez).

4- Interpretar los resultados anteriores desde el punto de vista del comportamiento ondulatorio. Repasar los resultados obtenidos de la experiencia de la doble rendija realizada con ondas mecánicas (por ejemplo con ondas en el agua). Se busca arribar a la conclusión fundamental que afirma que aunque los

---

<sup>6</sup> MODELLUS<sup>TM</sup> versión 2.5 se puede obtener de <http://phoenix.sce.fct.unl.pt/modellus>.

<sup>7</sup> Hasta podría sugerirse generalizar el principio de mínima acción para incluir potenciales sencillos (por ejemplo potencial gravitatorio  $m \cdot g \cdot x$ )

electrones llegan en unidades enteras, es decir exhibiendo carácter de partícula, se distribuyen en la pantalla formando un patrón de interferencia, es decir, también exhiben características ondulatorias. Esto hace que ya no se los pueda seguir considerando como partículas, ni como ondas, sino como algo totalmente nuevo, que se llamará “sistema cuántico”. Introducir la idea de que una formulación capaz de predecir el diagrama de interferencia en el experimento de la doble rendija con electrones, partiendo del hecho experimental que los mismos arriban a la pantalla en unidades discretas y medibles, necesariamente debe poseer un carácter probabilístico. El hecho que la intensidad en un punto de la pantalla sea proporcional a la fracción de electrones que llega a dicho punto, naturalmente sugiere que la pregunta adecuada que la teoría debe responder es: dado un electrón en cierto estado inicial (a la salida de la fuente en este caso) ¿cuál es la probabilidad que un electrón arribe a un punto dado de la pantalla? Esta probabilidad es igual a dicha fracción en un muestreo estadístico del experimento. Al final de este punto se debe enfatizar en que el carácter probabilístico de las predicciones es un aspecto central de la teoría cuántica.

5- Introducir los principios de la mecánica cuántica a través de los conceptos de la STA. Se comienza con el problema de una masa libre y arbitrariamente pequeña (tomar por ejemplo la masa del electrón). De acuerdo a las discusiones previas de los resultados del experimento de la doble rendija resulta claro que a nivel cuántico la pregunta correcta es: ¿Cual es la probabilidad de arribar al estado final  $F = (T, x_f)$  partiendo del estado inicial  $I = (0, x_i)$ ? Se enuncian los pasos a seguir para obtener dicha probabilidad en forma de reglas:

i) Para cada  $x(t)$  posible que une el estado inicial I con el final F, calculamos la acción S correspondiente (como se hizo previamente).

ii) Con dicha acción S asociamos un vector en el plano de módulo uno y cuyo ángulo (con respecto al eje de abscisas positivo) está dado por  $S / \hbar$ , siendo  $\hbar = h/2\pi$ , donde  $h = 6.625 \times 10^{-34}$  J.s es la constante de Planck. Es decir: para cada  $x(t)$  hay una acción S, y para cada acción un *vector* unitario de ángulo  $S / \hbar$ .

iii) La probabilidad de arribar al estado final, partiendo del estado inicial se obtiene sumando todos los vectores asociados a las diferentes  $x(t)$  que conectan ambos estados y elevando el módulo del vector resultante final, al cuadrado.

En la Fig. 1 se muestra un gráfico posición-tiempo con algunas funciones posibles que conectan los estados iniciales y finales, además de la clásica.

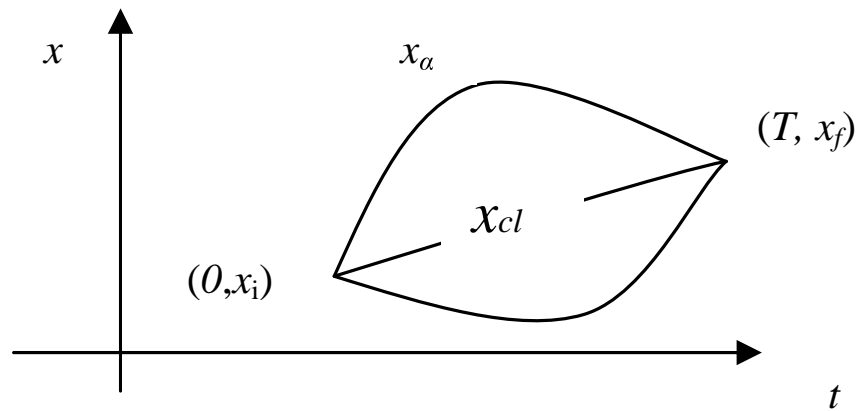


Fig. 1 - Algunos de los caminos que contribuyen a la suma. Cada uno de ellos tiene asociado un valor de acción y para cada acción se asocia un vector unitario en el plano.

Se debe remarcar a los estudiantes el principio fundamental que cada una de las formas o caminos alternativos  $x(t)$  que van del estado inicial I al final F contribuyen a la amplitud de probabilidad con un vector en el plano de módulo 1 pero con un ángulo diferente, según el valor de  $S/\hbar$ . La amplitud de probabilidad es el vector resultante de sumar cada uno de los vectores asociados a cada alternativa posible. El módulo de la resultante al cuadrado, es la probabilidad.

6- Familiarizar a los estudiantes con los conceptos de la formulación de la STA, enunciados en el ítem anterior, mediante el uso de un software de simulación que modeliza el comportamiento cuántico de los electrones en términos del enfoque STA de Feynman. El mismo permitiría la evaluación rápida del cambio de fase al pasar de un camino a otro, como así también sumar los aportes de diferentes caminos.

Aunque no es posible desde un punto de vista computacional evaluar los aportes de **todas** las  $x(t)$  para una situación general, el caso de la **masa arbitraria (incluso microscópica) libre** es particularmente sencillo ya que sólo los caminos “alrededor” de la  $x(t)$  clásica,  $x_{cl}(t)$ , son los que aportan en forma coherente (SHANKAR, 1980). De este modo, el resultado de la suma para una masa arbitraria libre puede expresarse como el aporte de la trayectoria clásica, multiplicado por un factor que tiene en cuenta las contribuciones coherentes de los caminos en la vecindad de la trayectoria clásica. La selección de este caso particularmente sencillo forma parte de nuestra estrategia para obtener resultados cuánticamente correctos, sin tener que evaluar todos los caminos, lo cual resulta prohibitivo.

La Fig. 2 muestra una representación esquemática de la suma en el caso  $V=0$ . En la misma se puede observar que los caminos cercanos a  $x_{clas}(t)$

contribuyen en forma coherente, mientras otras se cancelan unas con otras y pueden despreciarse cuando se calcula la amplitud.

Suma geométrica de los vectores amplitud de probabilidad asociados a cada  $x(t)$  en el plano cartesiano

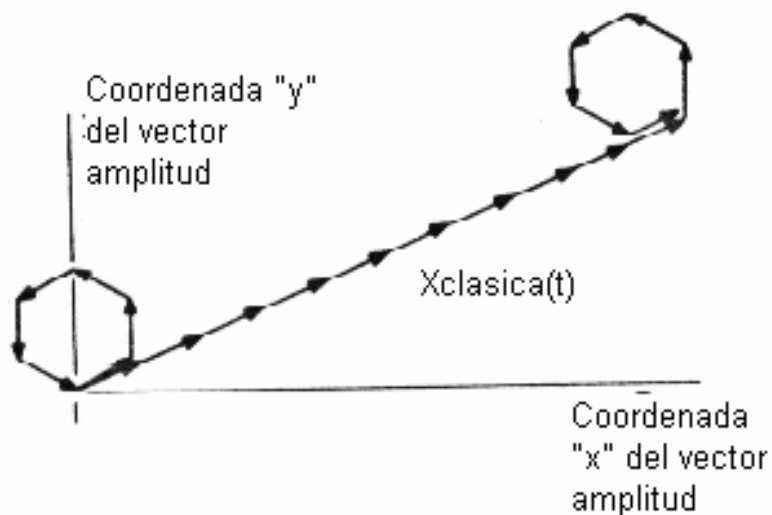


Fig. 2 - Representación esquemática de la suma de amplitudes de un conjunto finito de  $x(t)$  posibles que conectan los puntos iniciales y finales en el caso  $V=0$ . Cada vector representado es unitario y de ángulo  $S/\hbar$ , y corresponde a la amplitud asociada a una  $x(t)$  particular de conectar los puntos iniciales y finales.

Entonces, si el potencial es nulo, ( $V = 0$  corresponde al caso de una partícula libre), la amplitud de probabilidad total para un sistema cuántico para ir de  $I \rightarrow F$  es:

$$A(I \rightarrow F) = C \exp(i S_{cl} / \hbar)^8 \quad (V = 0 \text{ y masa arbitraria}) \quad (3)$$

donde  $S_{cl}$  es la acción (que es mínima en este caso) asociada a la  $x(t)$  clásica y  $C$  es una constante de proporcionalidad que “contabiliza” el rango de  $x(t)$  alrededor del camino clásico que aporta en fase a la suma. Es fundamental recalcar que dicha fórmula no es válida para un potencial arbitrario. En el caso general todas las  $x(t)$  aportan y deben considerarse.

Comenzando con una masa microscópica, se propone que el alumno “descubra” la Ec.(3) sumando con el software los aportes de los diferentes caminos. Haciendo un muestreo de  $x(t)$  se puede observar que no sólo aportan a la

<sup>8</sup> Como los estudiantes no están familiarizados con la notación de los números complejos, se utilizarán expresiones vectoriales equivalentes. Por ahora se sigue utilizando esta notación, por cuestiones de claridad y familiaridad para el lector-profesor de Física.

amplitud la  $x(t)$  clásica sino que también las trayectorias de sus “alrededores<sup>9</sup>” contribuyen constructivamente a la suma, como así también la anulación de los aportes provenientes de las  $x(t)$  demasiado alejadas del camino clásico.

7- Como primer ejemplo de la transición de la física cuántica a la clásica, proponemos repetir el cálculo anterior con una masa macroscópica. Se observará que la única contribución que no se anula de la suma es la contribución de la  $x(t)$  clásica, para el cual  $S$  es mínima y no como sucedía en el caso de la masa microscópica, en la cual los caminos de “alrededor” de la  $x(t)$  clásica contribuían constructivamente en la suma. Se interpreta esta transición en términos del valor de la constante de Planck en relación a los valores de las magnitudes macroscópicas. Es decir, la tendencia hacia la  $x(t)$  clásica como la única concebible macroscópicamente se debe al pequeño valor de dicha constante en un contexto macroscópico.

8- Interpretación del experimento de la doble rendija para electrones. Este es uno de los puntos centrales de nuestro análisis. Se parte del hecho que, excepto en las pantallas, el electrón no está sujeto a ningún potencial, es decir es libre y por lo tanto válida la Ec.3. Nuestro tratamiento es simplificado, ya que ignora la difracción de los electrones en cada rendija. La pregunta que debemos responder es: ¿Cual es la probabilidad que el electrón arribe a un punto  $p$  en la pantalla partiendo de la fuente? Para ello sean:

$A(O_1 \rightarrow p) = C \exp(i S_{cl} [O_1 \rightarrow p] / \hbar)$  y  $A(O_2 \rightarrow P) = C \exp(i S_{cl} [O_2 \rightarrow p] / \hbar)$   
las amplitudes de arribar a  $P$  pasando por uno de los dos orificios  $O_1$  o el otro orificio  $O_2$ , respectivamente. De acuerdo la misma STA, la amplitud total de arribar al punto  $p$  – que notaremos con  $A(p)$  – es la suma de arribar a  $p$  pasando por uno u otro orificio, es decir:

---

<sup>9</sup> Es importante discutir con los estudiantes que cuánto "alrededor" es el aporte coherente en realidad lo dicta la masa de la partícula. Para un objeto macroscópico, "alrededor" es tan cerca de la partícula clásica que es ella misma. A medida que la masa de la partícula considerada tiene dimensiones microscópicas "alrededor" va significando regiones cada vez mas alejadas de la trayectoria clásica. Por ejemplo, el cambio de fase entre la trayectoria clásica para la partícula libre:  $x = t$  y otra arbitraria:  $x = t^2$  es enorme para una masa macroscópica, de modo que es aceptable despreciar el aporte de  $x = t^2$  o de cualquiera de se aleje mínimamente de  $x = t$ . Sin embargo para un electrón el aporte de  $x = t$  y  $x = t^2$  difieren poco, entonces además del aporte clásico, esta posible alternativa contribuye a la amplitud de probabilidad; por lo tanto despreciar la contribución de  $x = t^2$  y otras trayectorias alejadas de la clásica no es aceptable.

$$A(p) = A(O_1 \rightarrow p) + A(O_2 \rightarrow p) = C(\exp(i S_{cl} [O_1 \rightarrow p]/\hbar) + \exp(i S_{cl} [O_2 \rightarrow p]/\hbar))$$

ahora bien, la acción clásica es  $S_{cl} [O_{1,2} \rightarrow p] = \frac{1}{2} m \frac{(R_{1,2})^2}{T}$ , siendo  $R_{1,2}$  el módulo

del vector posición desde cada orificio hasta  $p$  y  $T$  el tiempo transcurrido entre los arribos a ambas pantallas. La probabilidad  $P$  de arribar al punto  $p$  en el tiempo  $T$  es:

$$P(p) = |A(p)|^2 = |C(\exp(i \alpha R_1^2) + \exp(i \alpha R_2^2))|^2; \text{ siendo } \alpha = m/(2 \hbar T) \quad (4)$$

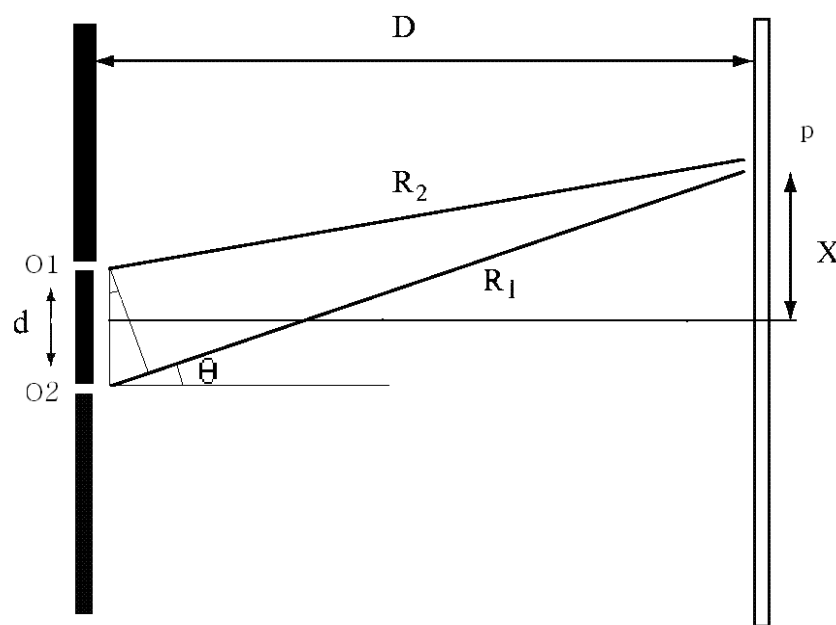


Fig. 3 - Ilustración esquemática de la experiencia de la doble rendija con electrones.

Desarrollando la Ec(4), y considerando que la pantalla está muy alejada de las rendijas, las rectas de las dos rendijas al un punto  $x$  de la pantalla son aproximadamente paralelas y la diferencia de caminos vale aproximadamente  $d \cdot \sin \theta$ , donde  $d$  es la separación de las rendijas, de acuerdo al diagrama anterior, se obtiene:

$$P(p) \sim \cos [(p/\hbar) (d \cdot \sin \theta)],$$

ó

$$P(p) \sim \cos [(p/\hbar) (d x / R)]. \quad (5)$$

La utilidad de obtener esta expresión radica en que los alumnos pueden reconocer a partir de ella que el patrón de interferencia que resulta en la experiencia con electrones – la distribución de probabilidades – está descrito mediante una función coseno, y que la forma de explicar sus máximos y mínimos en los distintos puntos de la pantalla resulta del análisis de los parámetros diferencia

de caminos ( $d x / R$ ) y de la longitud de onda asociada al electrón ( $\hbar / p$ ). Nuestra propuesta es que los alumnos reconstruyan dicho patrón mediante el análisis y la evaluación de la Ec.(4) en diferentes puntos de la pantalla, con la ayuda del software. Es sumamente instructivo además que los alumnos reconozcan en la Ecuación 5 la misma fórmula que obtendrían para el patrón de interferencia en el experimento de la doble rendija con ondas electromagnéticas clásicas o mecánicas de longitud de onda  $\lambda$ . Llevando a cabo la derivación correspondiente deberían arribar a la conclusión que el rol de  $\lambda$  lo lleva el cociente ( $\hbar / p$ ) en el experimento de la doble rendija para electrones.

9- Estudiar la transición entre la mecánica cuántica y la mecánica clásica en el experimento de la doble rendija. Se busca que los alumnos identifiquen el rol de la masa y la constante de Planck en la formación del patrón de interferencia. Para ello se propone repetir los cálculos del ítem anterior con masas de tamaño creciente, hasta llegar a una masa macroscópica, manteniendo todos los demás parámetros constantes. Los alumnos deben observar la desaparición del diagrama de interferencia con el incremento de la masa. En este punto el docente debe guiar la discusión para introducir el concepto de longitud de onda asociada a dicha masa, y que ella se relaciona con la masa de la forma:  $\lambda \propto \hbar / m$ . Por último, se llegará a la conclusión que es dicho cociente quien rige la transición entre el comportamiento cuántico y clásico.

## VI. Conclusiones

Se propone una ECPE que toma como referencia la formulación de caminos múltiples de Feynman como alternativa para introducir los principios fundamentales de la Mecánica Cuántica en la Escuela Secundaria. Se focaliza en el análisis de la emergencia de los aspectos ondulatorios de la materia a medida que el tamaño de los objetos tiende al dominio atómico. Como caso paradigmático consideramos experimentos idealizados de interferencia de haces de partículas de masas sucesivamente decrecientes, comenzando por objetos macroscópicos y finalizando con electrones.

Desde un punto de vista conceptual la principal novedad en nuestro abordaje es que, a diferencia de las aproximaciones tradicionales al tema, adaptamos el formalismo de integrales de camino (path integrals) de Feynman, simplificando el lenguaje matemático del cálculo diferencial e integral en múltiples dimensiones y de los números complejos, a un marco geométrico donde intervienen sumas vectoriales. De este modo, consideramos que la transición entre el comportamiento corpuscular y ondulatorio al disminuir el valor de la masa se

vuelve de esta forma más accesible para los estudiantes. Para hacer viable esta implementación se propone además la utilización de herramientas informáticas de simulación como las que ya mencionamos, para ayudar a visualizar los conceptos involucrados evitando el formalismo matemático.

La implementación de la propuesta que presentamos aquí será próximamente ejecutada en la escuela media con estudiantes de 16-17 años, previa construcción y puesta a prueba de una secuencia didáctica que estamos elaborando, y que sigue los lineamientos aquí bosquejados. En ella analizamos y discutimos los aspectos didácticos y cognitivos dirigidos a promover el aprendizaje significativo de los conceptos involucrados. En esa dirección se dirigen nuestras investigaciones actuales.

## **Bibliografía**

CATALOGLU, E; ROBINETT, R Testing the development of student conceptual and visualization understanding in quantum mechanics through the undergraduate career. **American Journal of Physics**, v. 70, n. 3, p. 238-251, 2002.

CUPPARI, A; RINAUDO, G; ROBUTTI, O.; VIOLINO, P. Gradual introduction of some aspects of quantum mechanics in a high school curriculum. **Physics Education**, v. 32, p. 302-308, 1997.

DOWRICK, N. J. Feynman's sum-over-histories in elementary quantum mechanics. **European Journal of Physics**, v. 18, p. 75-78, 1997.

EXPERIMENTO DE LA DOBLE FISIÓN EM MECÁNICA CUÁNTICA. Software free. Creado por Muthsam, K. (Versión 3.3 traducido al español por Wolfamann y Brickmann) Physics Education Research Group of the University of Munich. 2003. Disponible en:

<<http://www.physik.unimuenchen.de/didaktik/Downloads/doppelspalt/dslit.html>>

FANARO, M; OTERO, R.; ARLEGO, M. Software de simulación y reconstrucción de fundamentos de la mecánica cuántica en la escuela. **Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología (TE&ET)**, Universidad Nacional de La Plata, 2007 (en prensa).

FANARO, M; OTERO, R.; ARLEGO, M. Nociones matemáticas necesarias para reconstruir fundamentos de la mecánica cuántica en la escuela: la importancia de



los vectores y los números complejos. In: ENCUENTRO NACIONAL SOBRE ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA, I, 2007, UNCPBA, Argentina. **Actas...**

FEYNMAN, R. **El carácter de la ley Física**. Tusquets Editores, 1965.190 p.

FEYNMAN, R. **QED The strange theory of light and matter**. USA: Penguin Books, Princeton University Press, 1985. 158 p.

FISCHLER, H.; LICHTFELDT, M. Modern Physics and students' conceptions. **International Journal of Science education**, v. 14, n. 2, p. 181-190, 1992.

GOLDSTEIN, H. **Mecánica Clásica**. Madrid: Aguilar, 1966.

GONZÁLEZ, E.; FERNÁNDEZ, P.; SOLBES, J. Dificultades de docentes de ciencia en la conceptualización de temas de Física actual. In: SIMPOSIO DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN EN FÍSICA, V, 2000, Argentina. **Actas...** Tomo 1, p. 138-147.

GORDON, J.; AUBRECHT, I. Redesigning courses and textbooks for the twenty-first century. **American Journal of Physics**, v. 57, n. 4, 1989.

GRECA, I.; MOREIRA, M. A.; HERSCOVITZ, V. Uma Proposta para o Ensino de Mecânica Quântica. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 23, n. 4, p. 444-457, 2001.

GRECA, I.; MOREIRA, M. A. **Obstáculos representacionales mentales en el aprendizaje de conceptos cuánticos**. En Sobre el cambio conceptual, obstáculos representacionales, modelos mentales, esquemas de asimilación y campos conceptuales. Porto Alegre: Instituto de Física da UFRGS, p. 26-40, 2004.

HANC, J.; TULEJA, S. The Feynman Quantum Mechanics with the help pf Java applets and physlets in Slovakia. In: WORKSHOP ON MULTIMEDIA IN PHYSICS. TEACHING AND LEARNING, 10, 2005, Berlin. Disponible en:

<[http://pen.physik.uni-kl.de/w\\_jodl/MPTL/MPTL10/contributions/hanc/Hanc-Tuleja.pdf](http://pen.physik.uni-kl.de/w_jodl/MPTL/MPTL10/contributions/hanc/Hanc-Tuleja.pdf)>

JONES, D. G. C. Teaching modern physics- misconceptions of photon can damage understanding. **Physics Education**, v. 26, p. 93-98, 1991.

PAULO, I. J. C.; MOREIRA, M. A. Abordando conceitos fundamentais da mecânica quântica no nível médio. In: ENCUENTRO IBEROAMERICANO SO-

BRE INVESTIGACIÓN BÁSICA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, II, 2004, España. **Actas...**

LOBATO, T.; GRECA, I. Analise da insercao de conteúdos de teoria quântica nos currículos de física do ensino médio. **Ciencia y Educación**, v. 11, n. 1, p. 119-132, 2005.

MODELLUS TM versión 2.5 Creado por Victor Duarte Teodoro, Joao Paulo Duque Viera; Filipe Costa Clérigo Faculty of Sciences and Technology Nova University, Lisbon, Portugal. Disponible en: <<http://phoenix.sce.fct.unl.pt/modellus>> Acceso en: dic. 2006.

MONTENEGRO, R. L.; PESSOA Jr., O. Interpretações da teoria quântica e as concepções dos alunos do curso de Física. **Investigações em Ensino de Ciências**, v. 7, n. 2, 2002. Disponible en: <<http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/revista.htm>> Acceso en: may. 2006.

MOREIRA, M. A.; GRECA, I. Introdução à Mecânica Quântica: seria o caso de evitar a aprendizagem significativa (subordinada)? In: ENCONTRO INTERNACIONAL SOBRE APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA, III, 2000, Peniche, Portugal. **Atas...**

MÜLLER, R.; WIESNER, H. Teaching quantum mechanics on an introductory level. **American Journal of Physics**, v. 70, n. 3, 2002.

NIEDDERER, H. Teaching quantum atomic physics in college and research results about a learning pathway. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON UNDERGRADUATE PHYSICS EDUCATION (ICUPE), 1996, University of Maryland, College Park, USA. **Proceedings...**

OLSEN, R. Introducing quantum mechanics in the upper secondary school: a study in Norway. **International Journal of Science Education**, v. 24, n. 6, p. 565–574, 2002.

OSTERMANN, F.; MOREIRA, M. A. Uma revisão bibliográfica sobre a área de pesquisa física moderna e contemporânea no ensino médio. **Investigações em ensino de ciências**, v. 5, n. 1, 2000. Disponible en:

<[http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol5/n1/v5\\_n1\\_a2.htm](http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol5/n1/v5_n1_a2.htm)> Acceso en: may. 2006.

OSTERMANN, F.; RICCI, T. Construindo uma unidade didática conceitual sobre mecânica quântica: um estudo na formação de professores de Física. **Ciência e Educação**, v. 10, n. 2, p. 235-257, 2004.

OTERO, M. R. Emociones, sentimientos y razonamientos en Didáctica de las Ciencias. **Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias**, v. 1, n. 1, p. 24-53. Disponible en: <<http://www.exa.unicen.edu.ar/reiec/>> Acceso en: oct. 2006.

PESSOA JR, O. Interferometria, interpretação e intuição: uma introdução conceitual à Física Quântica. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 19, n. 1, p. 27-47, 1997.

PINTO, A. C.; ZANETIC, J. É possível levar a Física Quântica para o Ensino Médio? **Caderno Catarinense de Ensino de Física**, v. 16, n. 1, p. 7-34, 1999.

SHAFFER, S; AMBROSE, B.; Mc DERMOTT, L. Student understanding of the wave nature of matter: Diffraction and interference of particles Physics. **American Journal of Physics**, v. 68, n. 7, 2000.

SHANKAR, R. **Quantum Mechanics**. New York: Plenum Press, 1980. 675 p.

STRNAD, J. Pitfalls in the teaching of introductory quantum physics. **Eur. J. Phys**, v. 2, n. 4, p. 250-254, 1981.

STYER, D. F. **The Strange World of Quantum mechanics**. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

TAYLOR, E. **Desmityfing QM**. Quantum Mechanics Workbook, 2000. Disponible en: <<http://www.eftaylor.com/>> Acceso en: may. 2006.

TAYLOR, E. A call to action. **American Journal of Physics**, v. 71, n. 5, p. 425, 2003.

TAYLOR, E; STAMATIS VOKOS, S; O'MEARAC, J.; THORNBERD, N. Teaching Feynman's sum-over-paths quantum theory. **Computers in Physics**, v. 12, n. 2, p. 190-199, 1998.

ZOLLMAN, D. Research on teaching and learning quantum mechanics. In: ANNUAL MEETING NATIONAL ASSOCIATION FOR RESEARCH IN SCIENCE TEACHING (NARST), 1999. Disponible en:

< [http://web.phys.ksu.edu/papers/narst/QM\\_papers.pdf](http://web.phys.ksu.edu/papers/narst/QM_papers.pdf) >