Tópicos de Física Clássica I – Aula 11

Sistemas contínuos: a corda vibrante

a c tort

ENERGIA POTENCIAL

$$\Delta U = W = T_0\,(\Delta\ell - \Delta x) = T_0 \left\{ \left[1 + \left(\frac{\partial\, y(x,t)}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2} - 1 \right\} \Delta x.$$

Supondo que as deformações sejam pequenas, expandimos a equação acima em série de Taylor

$$\left[1 + \left(\frac{\partial\, y(x,t)}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\, y(x,t)}{\partial x} \right)^2,$$

logo,

$$\Delta U \approx \frac{T_0}{2} \left(\frac{\partial\, y(x,t)}{\partial x} \right)^2.$$

A energia potencial total da corda é

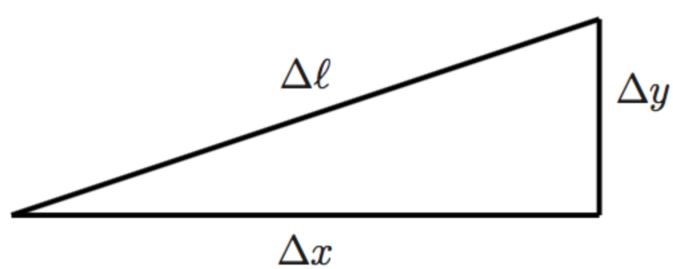

Figura 1: Seção infinitesimal da corda vibrante de comprimento ℓ.

$$U = \frac{T_0}{2} \int_0^{\ell} \left(\frac{\partial\, y(x,t)}{\partial x} \right)^2 dx.$$

A densidade linear de energia potencial é

$$\mathcal{U} = \frac{T_0}{2} \left(\frac{\partial\, y(x,t)}{\partial x} \right)^2 .$$

<u>ENERGIA CINÉTICA</u>

$$dT = \frac{1}{2}\, \rho(x) dx \left(\frac{\partial\, y(x,t)}{\partial t} \right)^2 ,$$

onde ρ é a densidade linear de massa da corda. A energia cinética total é

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \rho(x) \left(\frac{\partial\, y(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx.$$

A densidade de energia cinética é

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}\, \rho(x) \left(\frac{\partial\, y(x,t)}{\partial t} \right)^2 .$$

A densidade lagrangiana é

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U} = \frac{1}{2}\, \rho(x) \left(\frac{\partial\, y(x,t)}{\partial t} \right)^2 - \frac{T_0}{2} \left(\frac{\partial\, y(x,t)}{\partial x} \right)^2 , \qquad (1)$$

logo

$$L = \int \mathcal{L}\, dx.$$

Observe que

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(y(x,t), \partial_x y(x,t); \partial_t y(x,t); x, t).$$

A **densidade de momento canônico** é dada por

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\dfrac{\partial y}{\partial t} \right)}. \qquad (2)$$

A **ação clássica** para a corda é

$$S = \int_{t_a}^{t_b} L\,dt = \int_{t_a}^{t_b} \int_0^{\ell} \mathcal{L}\,dt. \tag{3}$$

<u>EQUAÇÕES DE EULER-LAGRANGE</u>

$$L \;\to\; \mathcal{L};$$

$$q_k(t) \;\to\; y(x,t);$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)} - \frac{\partial}{\partial t}\,\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial y}{\partial t}\right)} = 0. \tag{4}$$

Da densidade lagrangiana dada pela equação (1) temos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)} = -T_0\,\frac{\partial y}{\partial x}; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial y}{\partial t}\right)} = \Pi = \rho\,\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Segue que

$$0 + T_0\,\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial y}{\partial x} - \rho\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{\partial y}{\partial t} = 0,$$

ou ainda

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\rho}{T_0}\,\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0.$$

Supondo que a densidade linear de massa da corda seja uniforme, definimos a velocidade de propagação da onda na corda por

$$v_{\rm p} = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}, \tag{5}$$

e obtemos, finalmente, a equação da corda vibrante

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v_{\rm p}^2}\,\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0. \tag{6}$$

A solução geral é dada por

$$y(x,t) = F(x - v_{\rm p}\,t) + G(x + v_{\rm p}\,t). \tag{7}$$

Esta é a solução de d'Alembert para a corda vibrante, densidade uniforme e pequenas deformações.

Formulação hamiltoniana

A densidade lagrangiana se escreve:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\phi, \partial_t\phi, \partial_x\phi; x, t\right); \tag{8}$$

Equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial x}\right)} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial t}\right)} = 0. \tag{9}$$

A densidade de momento canônico é definida por:

$$\Pi(x,t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_t \phi}, \tag{10}$$

e a densidade hamiltoniana é definida por

$$\mathcal{H} = \Pi\ (\partial_t\phi) - \mathcal{L}.$$

Portanto,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}\left(\phi, \partial_x\phi, \Pi, \partial_x\Pi, x, t\right). \tag{11}$$

<u>Equações de Hamilton</u>

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial x}\right)}; \tag{12}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Pi} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial\left(\dfrac{\partial \Pi}{\partial x}\right)}. \tag{13}$$

Observe os termos adicionais que justificaremos mais adiante.

A corda vibrante

No caso da corda vibrante:

$$\mathcal{H} = \frac{\Pi^2}{2\rho} + \frac{T_0}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2.$$

Segue que

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial t} = 0 - \frac{\partial}{\partial x}\, T_0\, \frac{\partial y}{\partial x} = -T_0\, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2};$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\Pi}{\rho}.$$

Portanto,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho}\, \frac{\partial \Pi}{\partial t},$$

ou

$$-\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial \Pi}{\partial t} = T_0\, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

ou ainda

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\rho}{T_0}\, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.$$

Novamente obtemos a equação da corda vibrante.

Justificando as equações de Hamilton da corda vibrante

Nesta seção queremos justificar as equações (12) e (13). A densidade hamiltoniana é dada por:

$$\mathcal{H} = \Pi \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \mathcal{L};$$

O hamiltoniano é

$$H = \int_{t_a}^{t_b} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H} \left(\phi, \partial \phi / \partial t, \Pi, x, t \right)\, dx\, dt.$$

A ação clássica é:

$$S = \int_{t_a}^{t_b} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}\, dx dt = \int_{t_a}^{t_b} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\Pi \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \mathcal{H} \right] dx\, dt.$$

Se variarmos os campos ϕ e Π, a ação varia de acordo com

$$\delta S = \delta \int_{t_a}^{t_b} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\Pi \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \mathcal{H} \right] dx\, dt. = \int_{t_a}^{t_b} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta \left[\Pi \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \mathcal{H} \right] dx\, dt.$$

Efetuando as variações

$$\delta S = \int_{t_a}^{t_b} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\Pi\, \delta \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \delta \Pi \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \delta \mathcal{H} \right] dx\, dt.$$

Agora:

$$\delta \mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}\, \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial_x \phi)}\, \delta (\partial_x \phi) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Pi}\, \delta \Pi.$$

Portanto,

$$\delta S = \int_{t_a}^{t_b} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, dt \left[\Pi\, \delta \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) + \delta \Pi \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi}\, \delta \phi - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial_x \phi)}\, \delta (\partial_x \phi) - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Pi}\, \delta \Pi \right].$$

Lembre-se que x e t são fixos. Lembre-se também que:

$$\delta (\partial_x \phi) = \frac{\partial}{\partial x}\, \delta \phi,$$

e

$$\delta \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t}\, \delta \phi$$

logo podemos escrever:

$$\delta S = \int_{t_a}^{t_b} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, dt \left[\Pi \frac{\partial}{\partial t}\, \delta \phi + + \delta \Pi \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi}\, \delta \phi - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial_x \phi)} \frac{\partial}{\partial x}\, \delta \phi - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Pi}\, \delta \Pi. \right]$$

Integrando por partes o primeiro termo e o quarto, e usando a condição $\delta \phi = 0$ nos extremos:

$$\delta S = \int_{t_a}^{t_b} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, dt \left[-\frac{\partial \Pi}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial_x \phi)} \right] \delta \phi + \left[\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Pi} \right] \delta \Pi.$$

Impondo a condição $\delta S = 0$, obtemos as equações (12) e (13).