Tópicos de Física Clássica I – Aula 7
O problema de Dido; condições auxiliares II

a c tort

O problema de Dido

> *Fugindo de seu irmão Pigmalião que havia assasinado seu tio e marido, Dido de Tiro, mais tarde fundadora e rainha de Cartago, chega às costas do norte da África por volta de 825 a. C. acompanhada de um séquito de servos e trazendo seus recursos econômicos. Negociando com o chefe berber do lugar, Dido obtém direito a uma porção de terra junto à linha costeira. Um porção tão grande quanto a pele curtida de um boi pudesse cobrir! Mas Dido era mais sagaz do que o chefe berber e fez com que o couro fosse cortado em tiras bem finas e que estas fossem presas umas às outras pelas extremidades com isso formando uma faixa de couro estreita e muito longa que ela utilizou para demarcar as terras obtidas no acordo.*

Por lidar com um conjunto de curvas de mesmo comprimento, o perímetro, o problema de Dido também é conhecido como o **problema isoperimétrico**. Eis um enunciado possível para o problema isoperimétrico: *dada uma curva simples, fechada e retificável que encerra uma região $\mathcal{R}$ determinar a equação da curva particular que extremiza (maximiza) a área encerrada pela mesma.*

A solução do problema de Dido

Pelo teorema de Green no plano, veja no final desta nota de aula, a área pode ser calculada com a expressão:

$$\mathcal{A} = \iint_{\mathcal{R}} dxdy = \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{C}} (x\, dy - y\, dx)\,.$$

A condição auxiliar é dada por

$$\ell = \int_0^\ell ds = \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \text{constante},$$

onde ℓ é o comprimento da curva ou perímetro. É conveniente descrever a curva por meio de um parâmetro que denotaremos por t, com $t_a \leq t \leq t_b$, neste caso:

$x = x(t)$ e $y = y(t)$ com a condição $x(t_a) = x(x_b)$ e $y(t_a) = y(t_b)$, e o problema de Dido se escreve:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} (x\,\dot{y} - y\,\dot{x})\; dt,$$

onde $\dot{x} = dx/dt$, etc. A condição auxiliar se rescreve

$$\ell = \int_{t_a}^{t_b} \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{1/2}\; dt.$$

Segue que

$$\bar{F} = F + \lambda\, G = \frac{1}{2}\,(x\,\dot{y} - y\,\dot{x}) + \lambda\,\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{1/2}.$$

Há uma equação de Euler-Lagrange para $x(t)$ e outra para $y(t)$:

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{F}}{\partial \dot{x}} = 0,$$
$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{F}}{\partial \dot{y}} = 0.$$

Considere primeiro a equação de Euler-Lagrange para $x(t)$. Efetuando as derivadas necessárias obtemos:

$$\frac{1}{2}\,\dot{y} - \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}\,y + \frac{\lambda\,\dot{x}}{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{1/2}}\right) = 0,$$

Integrando em t:

$$y - \frac{\lambda\,\dot{x}}{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{1/2}} = \mathrm{C}_y.$$

Da mesma forma a equação de Euler-Lagrange para $y(t)$ nos dá:

$$-x - \frac{\lambda\,\dot{y}}{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{1/2}} = \mathrm{C}_x.$$

Com um pouco de álgebra chegamos à equação da curva procurada:

$$\left(x - \mathrm{C}_x\right)^2 + \left(y - \mathrm{C}_y\right)^2 = \lambda^2.$$

Que é a equação de um círculo centrado no ponto $(\mathrm{C}_x, \mathrm{C}_y)$ e raio λ. Para Dido, confinada pela linha da costa, a resposta é um semicírculo.

Condição auxiliar na forma $G(y, z; x) = 0$

Se a condição auxiliar for da forma

$$G(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

Multiplicamos a condição auxiliar por $\lambda(x)$, escolhemos y e z como funções de x e integramos o resultado de x_a até x_b:

$$\int_{x_a}^{x_b} \lambda(x) G(y, z; x)\, dx = 0. \tag{2}$$

Obviamente,

$$\delta \int_{x_a}^{x_b} \lambda(x) G(y, z; x)\, dx = 0. \tag{3}$$

Escrevendo $F + \lambda G$ e definindo um novo funcional por

$$\bar{J} = \bar{J}[y, z] = \int_{x_a}^{x_b} (F + \lambda G)\, dx. \tag{4}$$

Novamente

$$\delta \bar{J} = \delta \bar{J}[y, z] = \delta \int_{x_a}^{x_b} (F + \lambda G)\, dx, \tag{5}$$

que nos leva às equações de Euler-Lagrange para $\bar{F} = F + \lambda\, G$:

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \bar{F}}{\partial y'} = 0; \tag{6}$$

e

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \bar{F}}{\partial z'} = 0. \tag{7}$$

Ou se preferirmos:

Lembre-se que G não depende das derivadas de y e z.

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} + \lambda(x) \frac{\partial G}{\partial y} = 0; \tag{8}$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} + \lambda(x) \frac{\partial G}{\partial y} = 0. \tag{9}$$

No caso da mecânica, $G(x, y, z; t) = 0$ ou $G(x, y, z) = 0$, neste caso:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} + \lambda(t) \frac{\partial G}{\partial x} = 0; \tag{10}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} + \lambda(t) \frac{\partial G}{\partial y} = 0; \tag{11}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{z}} + \lambda(t)\,\frac{\partial G}{\partial z} = 0; \tag{12}$$

Exemplo 1 Considere um dos problemas que já resolvemos anteriormente, veja a Figura 1 na página seguinte. Neste caso, $G(x, y) = x + y - C = 0$. Este tipo de vínculo, isto é: um vínculo que envolve apenas as coordenadas generalizadas do problema em questão é chamado **vínculo holonômico**. O lagrangiano modificado é

$$\bar{L} = \frac{1}{2}\,(2M)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + mgy + \lambda(x + y - \mathrm{C}).$$

As equações de Euler-Lagrange nos levam a:

$$\lambda - 2M\ddot{x} = 0;$$

e

$$mg + \lambda - m\ddot{y} = 0;$$

e a equação de vínculo

$$G(x, y) = x + y - C = 0,$$

nos dá $\ddot{x} = -\ddot{y}$. Multiplicando a segunda equação de E-L por (-1) e somando com a primeira obtemos:

$$\ddot{x} - \frac{m}{m + 2M}\,g,$$

e como $\lambda = -2M\ddot{x}$, segue que:

$$\lambda = -\frac{2Mm}{m + 2M}\,g,$$

isto é: o multiplicador de Lagrange é a tensão na corda e o sinal algébrico significa que o sentido desta tensão é oposta ao peso de m. ■

Apêndice: o Teorema de Green no plano

Teorema de Green no plano: considere uma região plana $\mathcal{R}$ e sua fronteira, a curva fechada $\mathcal{C}$, então:

$$\iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \oint_{\mathcal{C}} \left(P dx + Q dy \right).$$

A integral de linha no lado direito desta identidade deve ser calculada no sentido anti-horário. Em princípio as funções $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ devem ser continuamente diferenciáves em um conjunto aberto $\mathcal{S}$ que contém $\mathcal{R}$, isto é: P, Q assim como $\partial P/\partial y$ e $\partial Q/\partial x$ devem ser contínuas em $\mathcal{R}$ e $\mathcal{C}$ deve ser uma curva fechada, simples e retificável. Veja a referência [6] para maiores detalhes.

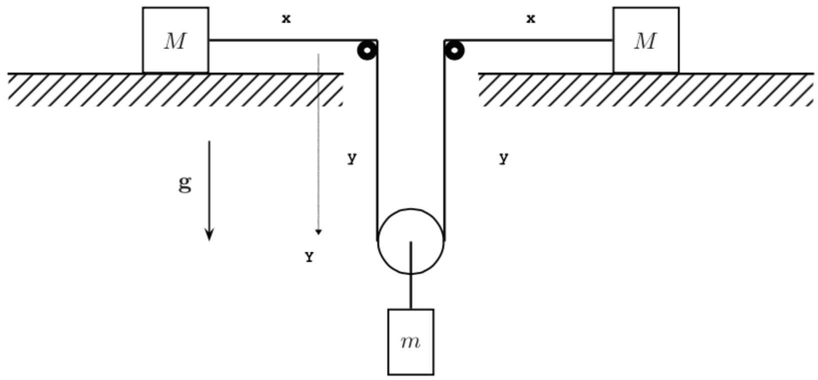

Figura 1: Problema 3.

Fazendo $P = -y/2$ e $Q = x/2$, podemos mostrar facilmente com o teorema de Green no plano que a área associada com $\mathcal{R}$ pode ser escrita como

$$\mathcal{A} = \iint_{\mathcal{R}} dxdy = \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{C}} (x\, dy - y\, dx)\,.$$

Referências

[1] J. B. Marion & S. T. Thornton *Classical Dynamics of Particles and Systems* 5th edition. (Thomson Brooks/Cole; Belmont) 2004.

[2] I. M. Gelfand & S. V. Fomin *Calculus of Variations* (Dover; Mineola) 2000.

[3] H. Sagan *Boundary and Eigenvalue Problems in Mathematical Physics* (Dover; New York) 1989.

[4] M. Levi *Classical Mechanics with Calculus of Variations and Optimal control* (American Mathematical Society – Mathematical Advanced Study Semesters; Providence) 2014.

[5] J. Ferguson *A Brief Survey of the History of the Calculus of Variations and its Applications*. ArXiv: math/0402357 v1, 2004.

[6] T. M. Apostol *Calculus* Vol. II 2nd edition (Wiley: New York) 1969.