

# O problema do aro pulante e suas variações

Marcella Kitzinger<sup>1</sup>, João Octávio Oliveira-Cony<sup>1</sup>, Gabriel Messias<sup>1</sup>, Paulo Roberto Linhares<sup>1</sup>, Carlos Farina de Souza<sup>\*1</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Recebido em 02 de outubro de 2025. Revisado em 06 de novembro de 2025. Aceito em 10 de novembro de 2025.

\*Endereço de correspondência: farina@if.ufrj.br

Editor-Chefe: Marcello Ferreira <https://orcid.org/0000-0003-4945-3169>

**Resumo.** Neste trabalho, analisamos e generalizamos um problema de mecânica clássica pouco explorado na literatura: o “aro pulante”. Em sua versão original, esse problema consiste em considerarmos um aro rígido e homogêneo, mantido em um plano vertical que contém o ponto de contato do aro com o solo, ao longo do qual duas pequenas contas de massas iguais podem deslizar sem atrito. As contas são abandonadas do topo do aro e se movem em sentidos opostos sempre presas a ele. De maneira contraintuitiva, e sob certas condições, o aro é impulsionado para cima, perdendo contato com o solo. Aqui, exploramos algumas generalizações desse problema, a saber, consideramos ângulos iniciais  $\theta_0$  quaisquer ( $0 \leq \theta_0 < \pi/2$ ), assim como velocidades iniciais não nulas e determinamos sob que condições o aro perde contato com o solo. A análise é conduzida com base em princípios elementares da mecânica Newtoniana, acessíveis a estudantes de física em nível introdutório. Por fim, propomos uma implementação experimental simples, ressaltando o valor pedagógico do fenômeno e seu potencial como ferramenta didática para o ensino de física.

**Palavras-chave:** Mecânica Clássica, Problemas Desafiadores, Aro Pulante.

## 1. Introdução: problemas desafiadores na mecânica clássica

Em 1696, Jean Bernoulli publicou uma ata convidando os matemáticos (o que inclui o que hoje chamamos físicos) a se debruçarem sobre um problema muito interessante e não menos desafiador, cujo enunciado, em suas próprias palavras, foi[1]‡

*“Dados dois pontos  $A$  e  $B$  em um plano vertical, qual é a curva traçada por um ponto sobre o qual atua somente a gravidade, que começa em  $A$  e atinge  $B$  no menor tempo?”.*

Esse desafio é conhecido como o problema da braquistócrona - do grego *brakhistós* (o mais curto) e *khrónos* (tempo). Ao propor esse problema, o autor adicionou as seguintes palavras: [1]

‡ Tradução feita pelos autores.

*“Eu, Jean Bernoulli, dirijo-me aos matemáticos mais brilhantes do mundo. Nada é mais atraente às pessoas inteligentes do que um problema desafiador, honesto, cujas soluções possíveis darão fama e permanecerão como um duradouro monumento. Seguindo o exemplo estabelecido por Pascal, Fermat, etc., espero ganhar a gratidão de toda a comunidade científica por apresentar, diante dos melhores matemáticos de nosso tempo, um problema que testará seus métodos e o poder de seus intelectos. Caso alguém me comunique a solução do problema proposto, eu o declararei publicamente merecedor de elogio.”*

Escolhemos iniciar este trabalho citando o problema da braquistócrona por se tratar de um dos mais belos e emblemáticos da história da mecânica clássica, considerado um marco no desenvolvimento do cálculo variacional. § No entanto, poderíamos ter escolhido vários outros para ilustrar a importância de problemas desafiadores no aprendizado e no despertar de interesse em física. Entendemos que problemas desafiadores, desde que a ciência se fundamenta, são parte integrante da física e da matemática. Acreditamos que problemas desse tipo instigam e provocam - no bom sentido - os estudantes, de modo que despertam muito interesse e motivação no aprendizado de física. O trecho de Bernoulli exemplifica o fascínio dos físicos por esses desafios.

Como já mencionamos, Jean Bernoulli foi uma das pessoas que resolveram o problema que ele mesmo propôs, mas, muitas vezes, problemas se tornam famosos pela dificuldade de seu criador em resolvê-los, como foi o caso de Johannes Kepler com a sua equação das órbitas, introduzida por ele em sua obra “Astronomia Nova”, publicada em 1609 [2]. Por se tratar de uma equação transcendente, Kepler percebeu a extrema dificuldade em resolvê-la, o que fica evidente em suas palavras [2] ||

*É suficiente, para mim, acreditar que Eu não consegui resolver [a equação], a priori, devida à heterogeneidade do arco e do seno. Qualquer um que me mostre qual meu erro e aponte a direção correta será, para mim, um grande Apolônio.*

A busca por solucionar a chamada equação de Kepler, cuja demonstração pode ser feita utilizando-se apenas as duas primeiras leis de Kepler e um pouco de geometria (veja, por exemplo, a Ref.[3]), gerou ampla nova ciência, impulsionando o desenvolvimento da matemática [4].

Em um cenário semelhante ao de 1696, porém muito mais recente, em 1900 o matemático David Hilbert anunciou, no Congresso Internacional da Matemática em Sorbonne, uma lista de 10 problemas não solucionados que se mostraram imensamente

§ O problema da braquistócrona foi resolvido por Isaac Newton, Gottfried Leibniz, Jean Bernoulli, seu irmão Jacques Bernoulli, Guillaume de L'Hôpital e Ehrenfried Walther von Tschirnhaus. Newton, ao tomar conhecimento do problema depois de um dia de trabalho, se debruçou sobre ele e só foi dormir depois de tê-lo resolvido.

|| Tradução feita pelos autores. Com “grande Apolônio”, Kepler se refere a Apolônio de Perga, um matemático e astrônomo da escola alexandrina, conhecido como *Grande Geômetra*, e mais referenciado pelos seus estudos das cônicas.

influentes no desenvolvimento da matemática do século XX. Uma lista mais recheada, com 23 problemas, foi publicada por Hilbert dois anos mais tarde [5]. Alguns desses problemas, até hoje não solucionados, são motivadores de extensas produções da física e da matemática. Certos problemas não possuem soluções, e outros, como o *problema de três corpos*, não apresentam soluções fechadas, isto é, não possuem uma solução geral que possa ser expressa em termos de uma sequência finita de operações matemáticas [6]¶. Esse problema é tão emblemático que a dificuldade de sua solução impulsionou uma área nova da matemática, a chamada teoria do caos.

Nem sempre problemas desafiadores são teóricos. Às vezes, surgem da observação do mundo natural, como a busca pela forma de um fio homogêneo, flexível, e suspenso por suas extremidades sob a ação da gravidade, conhecido hoje como o problema da catenária [9]. Muitas vezes o desafio é buscar a explicação de acontecimentos inesperados, como a queda da ponte de Tacoma Narrows [10], e outras vezes são motivados por experimentos contraintuitivos ou de resultados surpreendentes, como o pêndulo de Kapitza [11], o efeito Dzhanibekov [12] e as figuras de Chladni [13], para citar apenas alguns exemplos. + O fato de muitas dessas experiências terem seus nomes associados a grandes cientistas denota a íntima relação dos pensadores e dos problemas. Naturalmente, a busca pela explicação de fenômenos, acontecimentos e situações do mundo natural são a força motriz do estudante de física.

Problemas desafiadores são especialmente interessantes na mecânica Newtoniana por dois principais motivos. A mecânica é, no geral, o primeiro assunto a ser abordado por alguém que estude física e, portanto, os problemas surgem como ferramentas de construção de um primeiro arcabouço matemático, teórico e conceitual sólido ao estudante. Além disso, uma vez que os experimentos de mecânica comumente podem ser feitos com recursos caseiros e de razoavelmente simples execução, o aluno é impelido a trabalhar não apenas as competências teóricas, mas também experimentais e instrumentais em um único cenário conceitual.

Dadas essas motivações, neste trabalho analisamos um problema de mecânica pouco conhecido: o aro pulante - demos a alcunha de “pulante” para que não se confunda com o problema do aro saltante, um experimento clássico de eletromagnetismo. Inspiramo-nos em um recente artigo da Physics Education [14] que aborda esse problema e discutimos algumas generalizações, uma delas envolvendo, como veremos adiante, uma pergunta desafiadora a respeito do problema generalizado. \* Por mais que este problema não seja

¶ No caso do problema de três corpos, ele foi resolvido pelo matemático Karl Sundman em 1912 [7, 8] na forma de uma série de Puiseux.

+ A título de completude, o pêndulo de Kapitza é um pêndulo rígido no qual o ponto de pivô vibra verticalmente, e o centro de massa do pêndulo se localiza acima do ponto de pivô. O efeito Dzhanibekov, também conhecido como efeito da raquete de tênis, mostra que a rotação em torno de dois dos eixos principais de inércia de um corpo rígido é estável, mas a rotação sobre o terceiro eixo não é. O nome do efeito é dado em homenagem ao cosmonauta soviético Vladimir Dzhanibekov, que o observou em microgravidade em 1985. As figuras de Chladni são padrões geométricos que surgem em areia quando esta é posta sobre uma placa vibrando a frequências específicas, que dependem do formato da placa.

\* O problema original do aro pulante não é totalmente desconhecido, de fato, ele está em um livro-

abordado em livros-texto comuns, em todos os graus de complexidade, ele é interessante pois apresenta nuances desafiadoras; não tantas ao ponto de ser incompreensível a um estudante de primeiro período de um curso universitário, mas o suficiente para ser único e importante. De fato, o ferramental para o desenvolvimento deste problema é comumente já apresentado no ensino médio. Nas próximas seções, mostraremos como é possível generalizar este problema para encontrar resultados contraintuitivos, e também demonstraremos como é possível uma realização experimental simples que permite ao estudante o desenvolvimento de diversas competências na análise do mesmo cenário conceitual. Com isto, objetivamos mostrar que este problema não é um mero exercício de movimento circular, mas uma rica ferramenta para a sala de aula escolar e universitária.

## 2. O aro pulante e suas generalizações

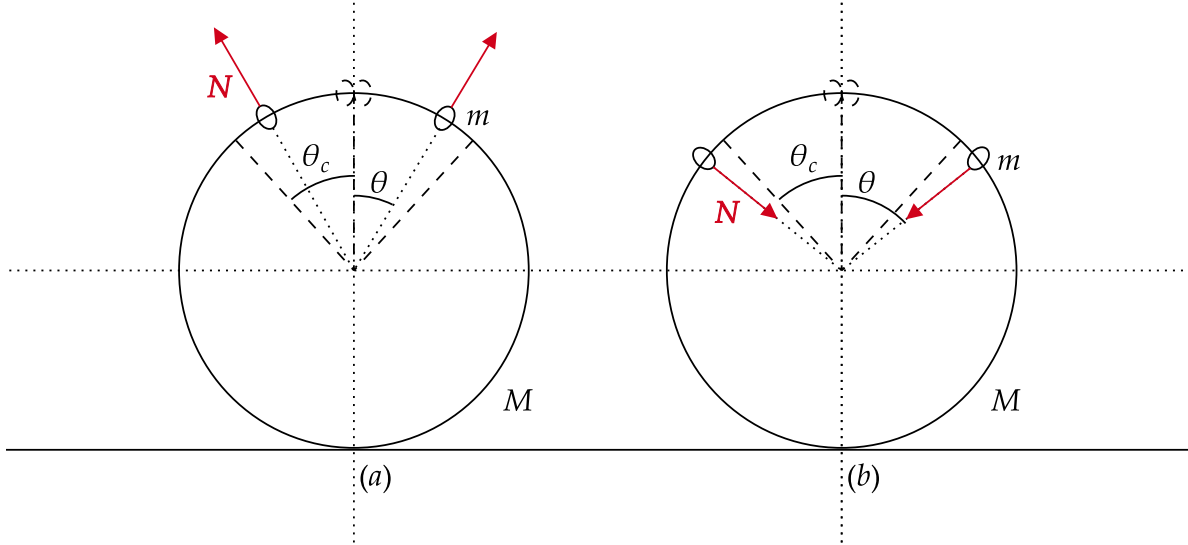
É conveniente, do ponto de vista didático, iniciarmos essa seção revisando sucintamente o problema original do aro pulante que, em sua versão mais simples, consiste na seguinte situação: um aro rígido e homogêneo, de massa  $M$  e raio  $R$ , encontra-se inicialmente em repouso apoiado sobre um plano horizontal e orientado de tal forma que o plano do aro coincide com um plano vertical que passa pelo ponto de contato entre o aro e o solo. Duas contas, ambas de massa  $m$ , estão inicialmente em repouso no topo do aro e podem se mover ao longo dele, sem atrito, mas com a restrição de que nunca se soltam do aro (isso pode ser conseguido fazendo o aro passar por um pequeno furo que atravessa cada conta). Após serem perturbadas, as contas deslizam pelo aro e se observa que, para razões  $m/M$  maiores ou iguais a um valor crítico, o aro salta verticalmente perdendo o contato com o chão. Esse resultado, à primeira vista, é surpreendente e até mesmo inesperado, uma vez que, ingenuamente, poderíamos pensar que a presença das contas presas ao aro aumentaria a reação normal que o solo exerce sobre o aro.

No entanto, do ponto de vista conceitual, a explicação é simples. Se denotarmos por  $\mathbf{N}(\theta) = N(\theta)\hat{\mathbf{r}}$  a reação normal exercida pelo aro em uma dada conta, sendo  $\hat{\mathbf{r}}$  o vetor unitário na direção radial, há um ângulo  $\theta_c$  no qual  $N(\theta_c) = 0$ . Caso as contas não fossem obrigadas a se moverem ao longo do aro, elas perderiam o contato com o aro em  $\theta = \theta_c$ . Não é difícil mostrar que

$$\theta_c = \arccos(2/3). \quad (1)$$

Como as contas estão presas ao aro, a partir desse ângulo,  $N(\theta)$  troca de sinal, ou seja, a reação normal exercida pelo aro sobre cada conta inverte o sentido. Consequentemente, devido à 3ª lei de Newton, as forças exercidas pelas contas sobre o aro também invertem seus sentidos e passam a apontar radialmente para fora do aro. Com isso, essas forças terão componentes verticais para cima tendendo a tirar o aro do chão, o que poderá acontecer dependendo do valor de  $m/M$ . Denotaremos por  $\theta_M$  o ângulo descrito em

texto preparatório para o exame de entrada às universidades de engenharia da Índia, o *Joint Entrance Examination* (JEE) [15]. Outra instância desse problema está na lista de “Problemas da Semana” do departamento de física da Universidade de Harvard, em 2003 (link- Problema 35).



**Figura 1.** Esquemas do problema do aro pulante, representando as forças normais que o aro exerce sobre as contas para (a)  $\theta < \theta_c$  e (b)  $\theta_c < \theta < \theta_M$ . Note que os sentidos dessas forças se invertem em  $\theta = \theta_c$ .

relação à vertical por cada conta no instante do salto. Obviamente, para diferentes valores da razão  $m/M$ , teremos diferentes valores de  $\theta_M$  (supondo que haja o salto). No painel (a) da Fig. 1 estão indicadas por segmentos orientados as reações normais exercidas pelo aro sobre as contas para  $\theta < \theta_c$ , enquanto no painel (b) dessa figura estão indicadas essas mesmas reações normais mas agora para  $\theta_c < \theta < \theta_M$ . Vale a pena chamar a atenção para o fato de que uma simples análise dimensional já nos permitiria antecipar que  $\theta_c$  não poderia depender de  $R$  (o mesmo argumento vale para  $\theta_M$ ).

Uma solução detalhada do problema original do aro pulante pode ser encontrada em um artigo recentemente publicado por Martínez-Torregrosa e colaboradores [14]. Nesse problema, o aro poderá saltar somente se for satisfeita a seguinte condição:

$$\frac{m}{M} \geq \frac{3}{2}. \quad (2)$$

Uma vez satisfeita essa desigualdade, o ângulo  $\theta_M$  é dado por

$$\theta_M = \arccos \left( \frac{1}{3} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{3M}{2m}} \right] \right). \quad (3)$$

A partir das duas últimas equações, não é difícil mostrar que os valores de  $\theta_M$  para os quais o aro pode saltar devem estar no intervalo obtido calculando-se  $\theta_M$  com  $m/M \rightarrow \infty$  e  $m/M = 3/2$ , de modo que

$$\arccos \left( \frac{2}{3} \right) \leq \theta_M \leq \arccos \left( \frac{1}{3} \right) \implies \frac{1}{3} \leq \cos \theta_M \leq \frac{2}{3}. \quad (4)$$

É interessante perceber que no limite  $m/M \rightarrow \infty$  o aro salta imediatamente após as reações normais exercidas pelo aro sobre as contas inverterem de sentido, ou seja, quando  $\cos \theta_M = 2/3$ , sendo esse o menor ângulo possível para o salto.

Tendo entendido porque o aro pode saltar, surge naturalmente a seguinte pergunta:

*Se, em vez de começarem os seus movimentos no ponto mais alto do aro, as contas forem abandonadas já de um ângulo  $\theta_0$  tal que  $0 < \theta_0 < \pi/2$ , será que existirá um valor crítico de  $\theta_0$  acima do qual o aro nunca saltará qualquer que seja a razão  $m/M$ ?*

Responder a essa pergunta é um dos objetivos principais desse trabalho.

### 2.1. Aro pulante com ângulos iniciais não nulos

Consideremos, então, que as contas sejam abandonadas de um ângulo  $\theta_0 \neq 0$ . Buscamos os valores, caso existam, das generalizações de  $\theta_c$  e  $\theta_M$  (os quais denotaremos por  $\theta_c^{(g)}$  e  $\theta_M^{(g)}$ ) neste novo cenário. Definindo a energia potencial gravitacional como nula na altura do centro do aro, a energia mecânica de cada conta é  $E = mgR \cos \theta_0$ . Pela conservação da energia mecânica, temos

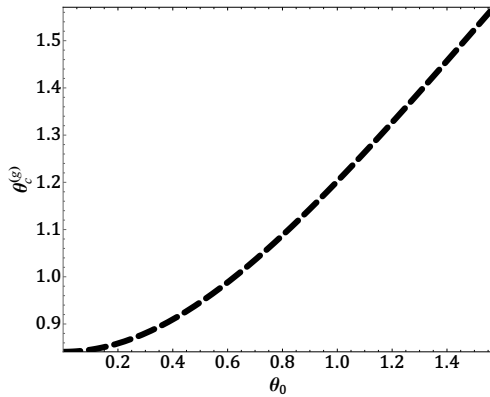
$$m \frac{v^2(\theta)}{R} = 2mg(\cos \theta_0 - \cos \theta). \quad (5)$$

Usando a 2ª Lei de Newton, escrevemos

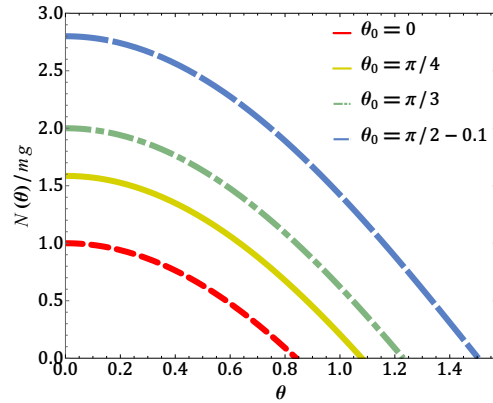
$$-mg \cos \theta + N(\theta) = -m \frac{v^2(\theta)}{R}. \quad (6)$$

A partir das duas últimas equações, obtemos

$$N(\theta) = mg(3 \cos \theta - 2 \cos \theta_0). \quad (7)$$



**Figura 2.** Gráfico de  $\theta_c^{(g)}$  versus  $\theta_0$ . Note que se trata de um gráfico monotonicamente crescente que, no limite  $\theta_0 \rightarrow 0$ , recupera o valor do problema original, a saber,  $\arccos(2/3)$ .



**Figura 3.** Gráficos de  $N(\theta)/mg$  versus  $\theta$  para diferentes valores de  $\theta_0$ . Quanto menor o valor de  $\theta_0$ , menor o valor de  $\theta$  no qual  $N(\theta)$  se anula.

Para encontrarmos  $\theta_c^{(g)}$ , basta impormos a condição  $N(\theta_c^{(g)}) = 0$ , o que implica

$$\cos \theta_c^{(g)} = \frac{2}{3} \cos \theta_0 \implies \theta_c^{(g)} = \arccos \left( \frac{2}{3} \cos \theta_0 \right). \quad (8)$$

Note que o resultado anterior generaliza a Eq.(1), que pode ser reobtida fazendo-se  $\theta_0 = 0$ . A Fig. 2 mostra o gráfico de  $\theta_c^{(g)}$  em função de  $\theta_0$ . Note, como esperado, que à medida que  $\theta_0$  aumenta, cresce também o valor de  $\theta_c^{(g)}$ . Mas já é interessante perceber que qualquer que seja  $\theta_0 \in [0, \pi/2)$ , sempre existirá um valor de  $\theta_c^{(g)}$  (nesse mesmo intervalo) no qual as reações normais exercidas pelo aro sobre as contas se anulam, invertendo os seus sentidos a partir deste ponto.

A Fig. 3 mostra o gráfico de  $N(\theta)/mg$  versus  $\theta$  para diferentes valores de  $\theta_0$ . Por simplicidade, para cada valor de  $\theta_0$ , traçamos os gráficos somente até os valores de  $\theta$  para os quais  $N(\theta)$  se anula. Esses são precisamente os valores de  $\theta_c^{(g)}$  correspondentes aos respectivos valores de  $\theta_0$ . Como a Fig. 2 já mostrou, quanto menor for o valor de  $\theta_0$ , menor será o valor de  $\theta$  para o qual  $N(\theta)$  se anula. Note, por exemplo, que a curva associada a  $\theta_0 = 0$  é a que primeiro se anula.

A partir de  $\theta = \theta_c^{(g)}$ ,  $\mathbf{N}(\theta)$  passa a apontar para o centro do raio. Seja  $\mathbf{N}'(\theta) = N'(\theta)\hat{\mathbf{r}}$  a reação normal exercida por uma dada conta sobre o aro. Pela 3ª lei de Newton,

$$N'(\theta) = -N(\theta) = mg(2 \cos \theta_0 - 3 \cos \theta). \quad (9)$$

Para  $\theta > \theta_c^{(g)}$ ,  $N(\theta) < 0$  e, portanto,  $N'(\theta) > 0$ . São justamente as componentes verticais  $2N'(\theta) \cos \theta$ , positivas para  $\theta > \theta_c^{(g)}$ , as responsáveis pelo salto do aro.

Denotemos por  $N_M(\theta)$  e  $P_M$  os módulos da normal exercida pelo solo sobre o aro e do peso do aro, respectivamente. Usando a 2ª lei de Newton para o aro,

$$N_M(\theta) + 2N'(\theta) \cos \theta - P_M = 0, \quad (10)$$

encontramos

$$N_M(\theta) = Mg - 2mg(2 \cos \theta_0 - 3 \cos \theta) \cos \theta. \quad (11)$$

Como a condição para o aro perder o contato com o solo é que a reação normal exercida pelo solo sobre ele se anule, isto é,  $N_M(\theta_M^{(g)}) = 0$ , obtemos,

$$Mg - 2mg(2 \cos \theta_0 - 3 \cos \theta_M^{(g)}) \cos \theta_M^{(g)} = 0. \quad (12)$$

Por conveniência, definimos  $\xi = \cos \theta_M^{(g)}$ , de modo que

$$\xi^2 - \frac{2}{3} \cos \theta_0 \xi + \frac{M}{6m} = 0, \quad (13)$$

donde obtemos

$$\xi_{\pm} = \frac{\cos \theta_0}{3} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{3M}{2m \cos^2 \theta_0}} \right). \quad (14)$$

Portanto, para que exista solução, devemos impor

$$\frac{m}{M} \geq \frac{3}{2 \cos^2 \theta_0}. \quad (15)$$

Assim, qualquer que seja  $\theta_0 \in [0, \pi/2)$ , sempre existirá um valor de  $m/M$  acima do qual o aro saltará, basta que a condição acima seja satisfeita. Fazendo, novamente,  $\theta_0 = 0$ ,

reobtemos a condição para a razão  $m/M$  correspondente ao problema original, dada pela Eq.(2). Supondo, então, que a condição anterior seja satisfeita, o ângulo no qual o aro perde o contato com o solo é

$$\theta_M^{(g)} = \arccos \left( \frac{\cos \theta_0}{3} \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{3M}{2m \cos^2 \theta_0}} \right] \right) =: f(\theta_0, m/M), \quad (16)$$

onde, por motivos óbvios, escolhemos o sinal positivo em (14) por corresponder ao menor ângulo. Definimos a função  $f$  tal que  $\theta_M^{(g)} =: f(\theta_0, m/M)$  não apenas por conveniência futura, mas para chamar a atenção de que  $\theta_M^{(g)}$  depende apenas de  $\theta_0$  e da razão  $m/M$ .

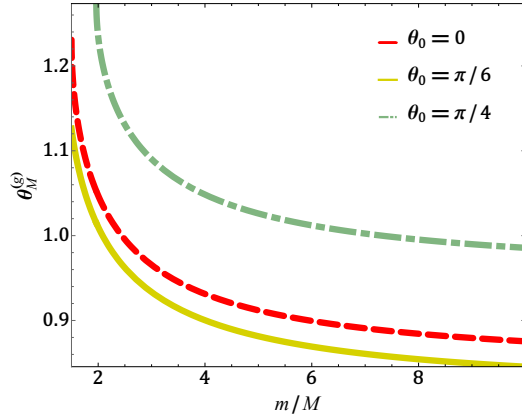
Para um dado  $\theta_0$ , é interessante determinarmos para que intervalo de ângulos o aro pode perder o contato com o solo, ou seja, quais os possíveis valores de  $\theta_M^{(g)}$ . Lembrando que  $\frac{m}{M} \geq \frac{3}{2 \cos^2 \theta_0}$ , é fácil perceber que  $f\left(\theta_0, \frac{m}{M} \rightarrow \infty\right) \leq \theta_M^{(g)} \leq f\left(\theta_0, \frac{m}{M} = \frac{3}{2 \cos^2 \theta_0}\right)$ . Usando então a Eq.(16), concluímos que, para um  $\theta_0$  fixo, os ângulos para os quais o aro pode saltar pertencem ao intervalo

$$\arccos \left( \frac{2 \cos \theta_0}{3} \right) \leq \theta_M^{(g)} \leq \arccos \left( \frac{\cos \theta_0}{3} \right) \implies \frac{\cos \theta_0}{3} \leq \cos \theta_M^{(g)} \leq \frac{2 \cos \theta_0}{3}. \quad (17)$$

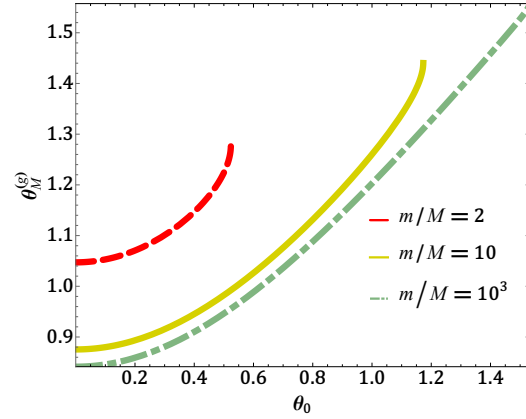
Esse é um dos resultados mais importantes desse artigo pois, com ele, acabamos de responder a pergunta que foi a motivação principal do trabalho. E a resposta à pergunta é sim, qualquer que seja o ângulo no qual as contas são abandonadas, sempre haverá uma razão  $m/M$  acima da qual o aro perderá o contato com o solo. Esse resultado generaliza o do problema original, dado pela Eq. (4), e se reduz a ele quando  $\theta_0 = 0$ , como esperado. A Fig.4 mostra o gráfico de  $\theta_M^{(g)}$  versus  $m/M$  para diferentes valores de  $\theta_0$ . Note que fizemos o gráfico supondo  $m/M \geq 3/2$ , para que o salto ocorra qualquer que seja  $\theta_0$ . Para cada valor de  $\theta_0$ ,  $\theta_M^{(g)}$  diminui à medida que  $m/M$  aumenta, como esperado. Inclusive, à medida que  $m/M$  cresce indefinidamente,  $\theta_M^{(g)}$  se aproxima assintoticamente de  $\theta_c^{(g)}$ . Em outras palavras, no limite  $m/M \rightarrow \infty$  o aro salta imediatamente após as reações normais exercidas pelo aro sobre as contas inverterem seus sentidos, ou seja, para  $\cos \theta_M^{(g)} = 2 \cos \theta_0 / 3$ , como esperado.

A Fig. 5 mostra o gráfico de  $\theta_M^{(g)}$  versus  $\theta_0$  para diferentes valores de  $m/M$ . Os gráficos parecem interrompidos precocemente. Isso pode ser entendido a partir da Eq.(15) pois ela nos mostra que à medida que  $\theta_0$  cresce, também cresce a razão  $m/M$  para que o aro salte. Assim, dada uma razão  $m/M$  não haverá salto para qualquer  $\theta_0$ .





**Figura 4.** Gráfico de  $\theta_M^{(g)}$  versus  $m/M$  para diferentes valores de  $\theta_0$ . Note que  $\theta_M^{(g)}$  decresce monotonicamente com  $\theta_0$ .



**Figura 5.** Gráfico de  $\theta_M^{(g)}$  versus  $\theta_0$  para diferentes valores de  $m/M$ . Dependendo do valor dessa razão, o salto não pode ocorrer para qualquer  $\theta_0$ .

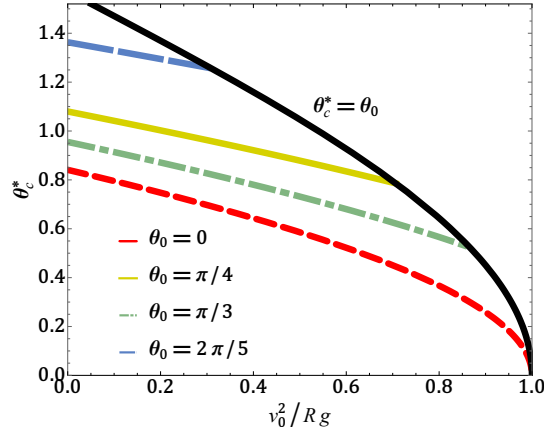
## 2.2. Aro pulante com ângulos e velocidades iniciais não nulos

Vale discutirmos uma outra generalização possível desse problema, na qual as contas não são abandonadas do repouso de um ângulo  $\theta_0$ , mas, sim, já com velocidades iniciais de módulos iguais a  $v_0$ . Nesse caso, a energia mecânica de cada conta passa a ser dada por  $E = mgR \cos \theta_0 + \frac{mv_0^2}{2}$ . O procedimento para resolver esse novo problema é muito semelhante ao apresentado em detalhe no caso do problema anterior. Se, na equação 5, substituirmos  $mv^2(\theta)/R$  por  $mv^2(\theta)/R - mv_0^2/R$  e impusermos que a reação normal exercida em cada conta seja nula em  $\theta = \theta_c^*$ , a repetição dos cálculos realizados na seção anterior nos leva em

$$\cos \theta_c^* = \frac{2}{3} \cos \theta_0 + \frac{v_0^2}{3Rg}, \quad (18)$$

resultado que generaliza a Eq. (8). Consequentemente, as reações normais exercidas pelo aro sobre as contas se anularão antes do que no caso em que as contas eram abandonadas do repouso. Perceba que, uma vez que temos à disposição o parâmetro  $v_0$ , é possível que nossos resultados dependam explicitamente do raio do aro  $R$ .

Note que, para  $v_0^2 = Rg \cos \theta_0$ , teremos  $\theta_c^* = \theta_0$ , ou seja, as reações normais exercidas pelo aro sobre as contas, assim que elas iniciam os seus movimentos, já apontarão radialmente para o centro do aro, de modo que, pela 3a lei de Newton, as suas reações que atuam sobre o aro apontarão radialmente para fora. A Fig. (6) mostra o gráfico de  $\theta_c^*$  versus  $v_0^2/Rg$  para diferentes valores de  $\theta_0$ . Uma inspeção cuidadosa nessa figura mostra que, para  $\theta_0$  fixo,  $\theta_c^*$  decresce monotonicamente até o valor para o qual  $\theta_c^* = \theta_0$ . Naturalmente, para valores de  $\theta_0$  tais que  $\theta_c^* > \theta_0$ , não faz sentido calcularmos  $\theta_c^*$ , já que desde o começo do problema a normal exercida pelas contas já aponta para fora do aro.



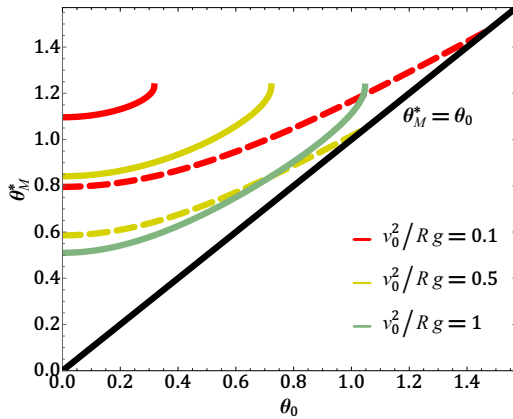
**Figura 6.** Gráficos do valor de  $\theta_c^*$  como função de  $v_0^2/Rg$  para diferentes valores de  $\theta_0$ . Delimitamos, com a linha preta, a região de valores possíveis para  $\theta_c^*$ , isto é, aqueles tais que  $\theta_c^* \geq \theta_0$ .

Seguindo cálculos análogos aos feitos anteriormente, pode-se mostrar que o ângulo para o qual a reação normal exercida pelo solo sobre o aro se anula, ou seja, o ângulo para o qual o aro salta, é dado por

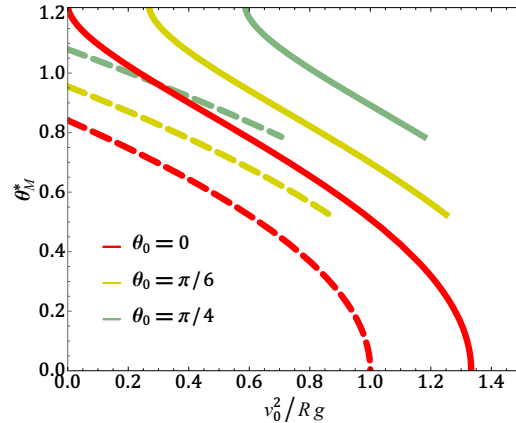
$$\theta_M^* = \arccos \left( \frac{\eta}{3} \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{3M}{2m\eta^2}} \right] \right), \quad (19)$$

onde definimos por conveniência

$$\eta = \cos \theta_0 + \frac{v_0^2}{2Rg}. \quad (20)$$



**Figura 7.** Gráfico de  $\theta_M^*$  versus  $\theta_0$  para diferentes valores de  $v_0^2/Rg$ . As curvas contínuas representam o regime  $m/M = 3/2$ , enquanto as curvas tracejadas o regime  $m/M \rightarrow \infty$ .



**Figura 8.** Gráfico de  $\theta_M^*$  versus  $v_0^2/Rg$  para diferentes valores de  $\theta_0$ . As curvas contínuas representam o regime  $m/M = 3/2$ , enquanto as curvas tracejadas o regime  $m/M \rightarrow \infty$ .

As Figuras 7 e 8 mostram, respectivamente,  $\theta_M^*$  como função de  $\theta_0$  (para diferentes valores de  $v_0^2/Rg$ ) e como função de  $v_0^2/Rg$  (para diferentes valores de  $\theta_0$ ). As curvas contínuas, em ambas as figuras, representam o regime  $m/M = 3/2$ , enquanto as curvas tracejadas representam o regime  $m/M \rightarrow \infty$ . Note que alguns gráficos são cortados abruptamente, uma vez que devemos desconsiderar os casos em que  $\theta_0 > \theta_M^*$ . Acerca da Fig. 7, note que, para valores fixos de  $v_0^2/Rg$ ,  $\theta_M^*$  cresce monotonicamente com  $\theta_0$ , como esperado. Observe, ainda, que para valores finitos de  $m/M$  e  $v_0^2/Rg$ , existirão valores de  $\theta_0$  acima dos quais não haverá salto do aro, razão pela qual esses gráficos são cortados. No entanto, supondo  $m/M \rightarrow \infty$ , qualquer que seja  $\theta_0$  sempre ocorrerá o salto.

A Fig. 8 mostra que, para um dado  $\theta_0$ , o ângulo de salto decresce monotonicamente com  $v_0^2/Rg$ , como esperado. Uma vez que, para  $m/M \rightarrow \infty$ , o ângulo de salto coincide com  $\theta_c^*$ , as curvas tracejadas da Fig. 8 coincidem com as curvas da Fig. 6. Para valores fixos de  $\theta_0$ , os gráficos terminam, evidentemente, em  $\theta_M^* = \theta_0$ . Por fim, vale mencionar que todos os resultados do problema original são reobtidos tomando  $v_0^2/Rg = 0$ .

### 3. Construção experimental do problema

Problemas desafiadores se tornam ainda mais interessantes e valiosos quando suas previsões e seus resultados podem ser verificados experimentalmente de forma simples e com materiais de baixo custo ou até mesmo caseiros. Nesse sentido, para darmos vida à nossa análise teórica, reproduzimos o experimento do aro pulante generalizado com alguns materiais baratos e de fácil aquisição, de forma a mostrar que o leitor interessado em se aventurar na reprodução desse experimento não terá grande dificuldade. Em nosso experimento, utilizamos um aro metálico de diâmetro aproximadamente igual a 32cm e com cerca de 35g de massa, duas olivas de chumbo vazadas em seus centros (cada uma delas com cerca de 135g de massa), um fio, um conector (para prender o fio ao aro, de massa 2g), e um suporte fixo para estabilização do plano vertical do aro. Escolhemos olivas de chumbo pois elas podem ser adquiridas facilmente em qualquer loja de pesca, e também por elas já possuírem furos por onde passará o aro. O vídeo desse experimento se encontra no material suplementar deste trabalho. Note que, como discutimos em nosso artigo o problema do aro pulante generalizado, no vídeo consideramos  $\theta_0 \neq 0$ . O salto foi possível pois escolhemos uma razão de massas ( $m/M \approx 3,7$ ) bem acima do mínimo necessário. Para mitigar os efeitos do atrito entre as contas e o aro, aplicamos um pouco de óleo lubrificante, permitindo que os pesos de chumbo deslizassem com maior facilidade. Enfatizamos que para uma boa realização do experimento, deve-se maximizar o quanto possível a razão  $m/M$  a fim de diminuir a influência das imperfeições experimentais (atritos remanescentes, dimensão das contas, não simultaneidade do abandono das contas, etc.).

#### **4. Conclusões**

Nesse trabalho, analisamos inicialmente o problema do aro pulante em mecânica clássica em sua versão original e, em seguida, fizemos algumas generalizações interessantes. Consideramos a possibilidade de as contas iniciarem os seus movimentos não do topo do aro, mas sim de um ângulo arbitrário com a vertical e com velocidades (de mesmo módulo) não nulas. No problema original, já era sabido que quando a razão  $m/M$  é maior que um dado valor crítico, o aro perde o contato com o solo. No entanto, não se sabia se haveria um ângulo inicial de partida das contas acima do qual o aro nunca saltaria caso as contas fossem abandonadas do repouso. Em nosso trabalho, mostramos que qualquer que seja o ângulo de partida das contas, sempre haverá uma razão  $m/M$  acima da qual o aro perderá o contato com o solo. Além disso, ainda calculamos o ângulo de salto no caso em que as contas possuem velocidades iniciais não-nulas.

Embora esse problema seja pouco intuitivo e bastante desafiador, aplicamos em sua solução conceitos básicos de mecânica newtoniana, usualmente aprendidos em cursos introdutórios de mecânica da partícula. Finalizamos nossa discussão descrevendo sucintamente como realizar de forma simples um experimento, de fácil reprodução em qualquer laboratório munido de uma boa câmera, que mostre de forma inequívoca o pulo do aro.

Problemas desafiadores são uma ferramenta instigante para despertar a curiosidade e aprofundar a compreensão de conceitos fundamentais da física. O problema do aro pulante, embora simples em sua formulação, apresenta comportamentos contraintuitivos que convidam o estudante a explorar com mais atenção os princípios da dinâmica. A análise das forças envolvidas, em especial das reações normais exercidas pelo aro sobre as contas e a reação normal exercida pelo solo sobre o aro, fornece uma oportunidade didática muito rica para a aplicação e compreensão das leis de Newton.

Além do valor teórico, a possibilidade de uma implementação experimental confere ao problema um caráter interdisciplinar, aproximando teoria e prática e promovendo a autonomia investigativa dos estudantes. Assim, esperamos que o presente trabalho contribua para o repertório de problemas clássicos utilizados em cursos introdutórios, e incentive a criação de novos experimentos didáticos que unam simplicidade, rigor e surpresa.

#### **Agradecimentos**

Os autores agradecem às instituições de fomento, CNPq e FAPERJ, pelo apoio financeiro. Em particular, M.S.K. agradece ao CNPq (bolsa PIBIC), J. O.-C agradece à FAPERJ (bolsa de mestrado No. 201.879/2025) e C.F. agradece ao CNPq e à FAPERJ (Grants No. 308641/2022-1 e No. 204.376/2024).

## Material Suplementar

O seguinte material suplementar está disponível online:  
Vídeo.

## Disponibilidade de Dados

Todo o conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo foi publicado no artigo e na seção “Material Suplementar”.

## Referências

- [1] C. Günther, *Acta Eruditorum* **15**, 1 (1696).
- [2] J. Kepler e W.H. Donahue, *Information and Interdisciplinary Subjects Series* (Green Lion Press, Novo México, 2015).
- [3] F.G.M. Orlando, C. Farina, C.A.D. Zarro e P. Terra, *Am. J. Phys.* **86**, 849 (2018).
- [4] P. Colwell, *Solving Kepler’s Equation over Three Centuries* (Willman-Bell, Inc., Virgínia, 1993).
- [5] D. Hilbert, *Bulletin of the American Mathematical Society* **8**, 437 (1902).
- [6] J. Barrow-Green, *Poincaré and the Three Body Problem* (American Mathematical Society, Rhode Island, 1997).
- [7] J. Barrow-Green, *Historia Mathematica* **37**, 164 (2010).
- [8] C.L. Siegel e J.K. Moser, *Lectures on Celestial Mechanics* (Springer, Berlin, 1971).
- [9] G. Venturoli, *Elements of the Theory of Mechanics* (J. Nicholson & Son, Londres, 1822).
- [10] K.Y. Billah e R.H. Scanlan, *American Journal of Physics* **59**, 118 (1991).
- [11] P.L. Kapitza, *Soviet Phys. JETP* **21**, 588 (1951).
- [12] M. Efroimsky, *Advances in Space Research* **29**, 725 (2002).
- [13] T.D. Rossing, *American Journal of Physics* **50**, 271 (1982).
- [14] J. Martínez-Torregrosa, P. Sarriugarte, S. Rosa-Cintas e J. Guisasola, *Physics Education* **60**, 045032 (2025).
- [15] A. Experts, *Understanding Physics for JEE Main and Advanced Mechanics Part 1 2020* (Understanding Physics for JEE Main and Advanced Mechanics Part 1 2020, Meerut, 2019).