



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Física
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física
Mestrado Profissional em Ensino de Física

Problemas e curvas de perseguição no ensino médio (texto para o professor)

Reynaldo L. de Oliveira Jr

Material instrucional associado à dissertação de mestrado de Reynaldo L. de Oliveira Jr, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Rio de Janeiro
2011

Sumário

1. Introdução.....	03
1.1. O que são problemas de perseguição e problemas de interceptação.....	04
1.2. O <i>software Modellus</i>	06
2. Atividades propostas.....	07
2.1. Proposta 1 – Problema do ponto de encontro.....	08
2.1.1. Animando a proposta 1 no <i>Modellus</i>	10
2.1.2. Como apresentar a proposta 1 no ensino médio.....	15
2.2. Proposta 2 – Estudando o círculo de Apolônio.....	20
2.2.1. Animando a proposta 2 no <i>Modellus</i>	24
2.2.2. Como apresentar a proposta 2 no ensino médio.....	27
2.3. Proposta 3 – Problemas de perseguição pura.....	28
2.3.1. Animando a proposta 3 no <i>Modellus</i>	31
2.3.2. Como apresentar a proposta 3 no ensino médio.....	33
2.4. Proposta 4 – O pato e o cachorro.....	37
2.4.1 - Animando a proposta 4 no <i>Modellus</i>	38
2.4.2 Como apresentar a proposta 4 no ensino médio.....	39
2.5. Proposta 5 – O cachorro e seu dono.....	39
2.5.1. Animando a proposta 5 no <i>Modellus</i>	41
2.5.2. Como apresentar a proposta 5 no ensino médio.....	43
Referências	46
Apêndice	48

1. Introdução

Neste suplemento apresentaremos algumas sugestões de atividades referentes a problemas de perseguição e interceptação. Este suplemento destina-se aos professores de física que desejam trazer para o universo da sala de aula uma aplicação dos conceitos de cinemática vetorial e escalar aprendidos em sala de aula. Serão apresentadas propostas, onde abordaremos um tema da cinemática escalar ou vetorial. Dentro de cada proposta seguirão algumas sugestões de atividades.

O objetivo das propostas aqui apresentadas é servir como suporte ao professor de física. Partindo destas propostas e atividades, o professor elaborará sua aula de acordo com sua disponibilidade de tempo e recursos. O objetivo final das propostas aqui apresentadas é a elaboração de atividades que elucidem no nível do ensino médio os problemas de perseguição, normalmente só presentes nas aulas de física e cálculo do ensino superior. Cada proposta pode ser trabalhada independentemente pelo professor, dependendo da necessidade e do tempo disponível. Cada proposta compõe uma unidade, com um tema específico e com objetivos específicos.

Caso o professor queira aprofundar-se um pouco mais sobre a aplicação deste material no ensino médio, para detalhes a respeito do referencial teórico na qual este trabalho se baseia ou detalhes a respeito dos problemas de perseguição consultar [1]

Segue abaixo os possíveis conteúdos que deverão ser abordados neste suplemento.

- Cinemática do movimento bidimensional;
- Construção e interpretação de gráficos;
- Gráficos de trajetórias;
- Vetor posição e vetor velocidade;
- Vetores unitários;
- Velocidade relativa;
- Problemas de máximos e mínimos;
- Parametrização de curvas.

1.1. O que são problemas de perseguição e problemas de interceptação

Basicamente, um problema de perseguição (puro) é definido como sendo a determinação da curva que o perseguidor deve percorrer para alcançar o perseguido que se move ao longo de uma trajetória prescrita, com a condição de que a velocidade do perseguidor aponte sempre para o perseguido. Um exemplo é o problema do navio pirata que persegue que um navio mercante, ou o do torpedo que intercepta um navio. Este tipo de problema pode ter aplicações militares bem como ser útil a desenvolvedores de jogos eletrônicos (Figura 1). Tem-se observado nos noticiários que cada vez mais jovens vêm procurando se profissionalizar na área de desenvolvimento de jogos. Estes jogos estão cada vez mais complexos e “reais”. Para simular a realidade expressa nestes jogos não basta apenas que o desenvolvedor domine o *software* e as técnicas necessárias para a programação dos jogos. Faz-se necessário que o desenvolvedor modele a natureza e a traduza para a linguagem dos *games*. Esta modelagem necessariamente passa por conceitos da física e da matemática. Outros problemas também podem ser tratados da mesma forma. A perseguição de uma nave para atingir a lua, a trajetória de um nadador que tenta alcançar o outro lado de um rio e etc.

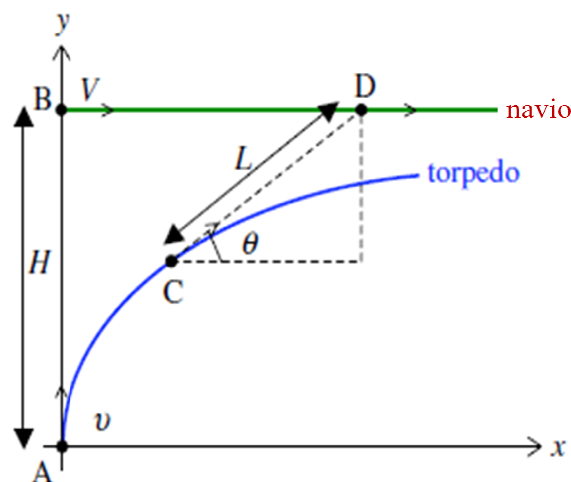


Figura 1: observe a trajetória de um torpedo (velocidade v) perseguindo um navio (velocidade V). A condição de perseguição é satisfeita: o torpedo (posição C) sempre aponta para o navio (posição D), note que a perseguição terminará quando L (distância entre C e D) = 0.

Historicamente o problema do navio pirata e do navio mercante foi proposta e solucionada pelo matemático francês Pierre Bouguer (1698-1758) em 1732. Tipicamente estes problemas são resolvidos usando-se equações diferenciais, bem como teoremas do cálculo newtoniano, complicados o suficiente para os alunos do ensino médio.

Tais problemas também podem ser tratados como problemas bidimensionais de cinemática. Esta é uma das várias proposições deste trabalho. Esta simplificação, do cálculo à cinemática do ensino médio é uma das vantagens do ambiente de modelagem e simulação que propomos. Em geral, tais *softwares*, por meio de um determinado método numérico escolhido pelo desenvolvedor, fazem cálculos de derivação e integração, devendo ao usuário ter em mente que todo resultado numérico dado pelo computador é uma aproximação. Embora concordemos que não podemos deixar de discutir com os alunos estas “peculiaridades” do mundo dos computadores. Concentrando-nos nos resultados obtidos por uma simulação, ficamos livres para discutir a validade dos parâmetros modelados, checar limites, casos particulares e etc.

Dentro da classe dos problemas de perseguição podemos agregar outra gama de problemas, nos quais a condição de perseguição não é satisfeita. Considerando que o perseguidor não aponta (ou olha) mais para o perseguido, mas ainda assim queremos que o torpedo, por exemplo, atinja o navio. Este é um problema de interceptação (Figura 2). Aqui as questões podem ser as mesmas do problema anterior: quais as condições necessárias para que ocorra a interceptação? Conforme veremos mais adiante estas condições são surpreendentes. A título de exemplo, registramos dois jogos que usam, de alguma maneira, a perseguição/interceptação como princípio: *City Defender Hack* [2] e *Madness Combat Defense* [3].

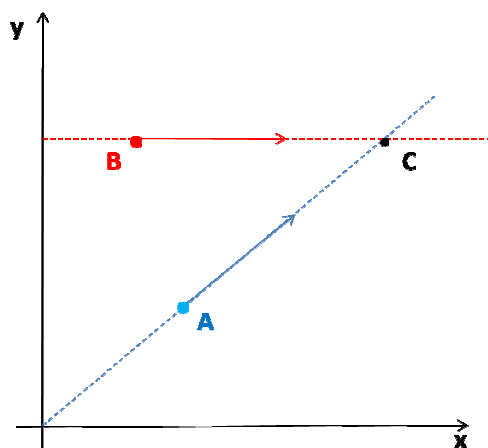


Figura 2: O torpedo A interceptará o barco B no ponto C?

Tais problemas aqui propostos não são comuns no ensino médio, embora as competências necessárias para tal entendimento já estejam (ou serão) formuladas ao longo do ensino médio. Os problemas de perseguição/interceptação fazem parte de um cabedal de situações a partir das quais o professor lançará mão como um apêndice, ou um aprofundamento, ao estudo de cinemática, principalmente ao ensino de trajetória de projéteis. O estudo do movimento de projéteis também é uma possibilidade deste suplemento.

1.2 O software *Modellus*

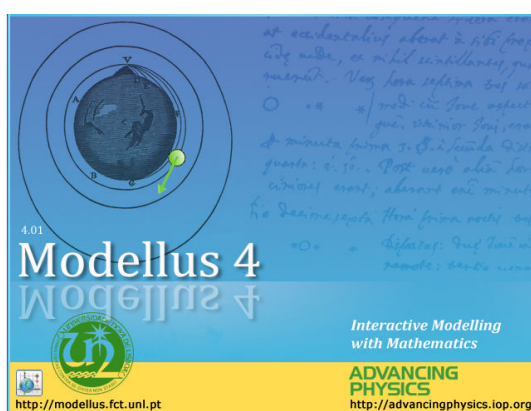


Figura 3: versão do *Modellus* que utilizaremos neste suplemento.

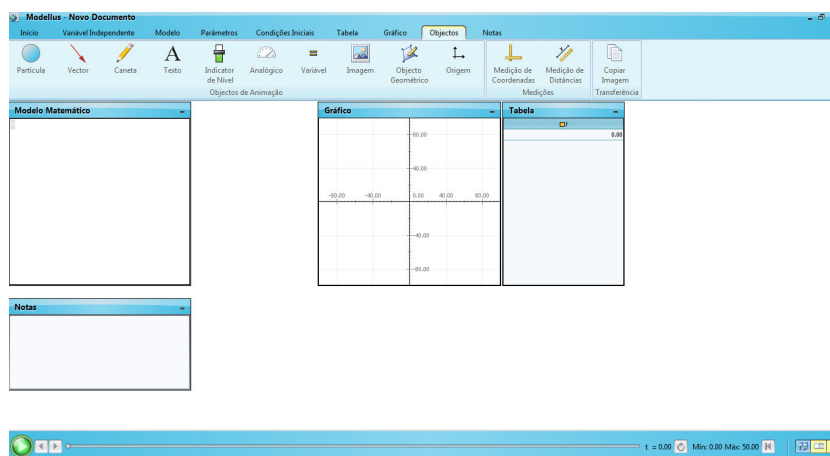


Figura 4: Tela inicial do ambiente do *Modellus*.

É um *software* de distribuição gratuita e disponível em português. De acordo com Teodoro [4], o *Modellus* não é um ambiente de modelagem nem de simulação. O *software* pode ser usado como uma ferramenta de modelagem e/ou como uma ferramenta de simulação. Neste ambiente o professor e o aluno podem construir seus

próprios modelos, modificar parâmetros e testar suas hipóteses. É um ambiente amigável e de fácil manuseio. O aluno escreve as equações dos modelos matemáticos da mesma forma que o professor escreve no quadro. Araújo *et al* destaca [5]:

O programa pode ser visto como um micromundo no computador para uso tanto dos estudantes quanto dos professores, não sendo baseado numa metáfora de programação. Na “janela do modelo” o usuário pode escrever modelos matemáticos, quase sempre da mesma forma que a manuscrita do dia-a-dia, dispensando o aprendizado de uma nova linguagem para a elaboração desses modelos.

Os modelos e animações criados no *Modellus* podem ser confeccionados pelos próprios alunos, numa perspectiva expressiva, quanto também os alunos podem usar as animações feitas pelo professor, numa perspectiva exploratória.

2. Atividades propostas

Nesta seção serão apresentadas propostas, onde abordaremos um tema da cinemática escalar ou vetorial. Dentro de cada proposta seguirão algumas atividades. O trabalho aqui exposto visa ser uma aplicação dos conceitos de cinemática vistos em sala de aula. Portanto sugerimos que tais atividades se apresentem no final do curso de cinemática. Caso o professor deseje introduzir os conceitos de cinemática, utilizando os recursos computacionais do *Modellus*, sugerimos outras referências (ver [6], [7], [8]).

O material abaixo apresentado servirá como fonte de referência para o professor do ensino médio para o preparo de suas aulas. Partindo destas propostas e atividades, o professor elaborará sua aula de acordo com sua disponibilidade de tempo e recursos. O objetivo final das propostas aqui apresentadas é a elaboração de atividades que elucidem no nível do ensino médio os problemas de perseguição, normalmente só presentes nas aulas de física e cálculo do ensino superior. Cada proposta pode ser trabalhada independentemente pelo professor, dependendo da necessidade e do tempo disponível. Cada proposta compõe uma unidade, com um tema específico e com objetivos específicos.

2.1. Proposta 1 – Problema do ponto de encontro

Nesta atividade iremos abordar um problema clássico das aulas de cinemática: o problema do ponto de encontro. Apresentaremos também nesta proposta 1 uma pequena introdução passo a passo de como se faz uma animação utilizando o *software Modellus*.

Exemplo:

Duas partículas A e B seguem uma mesma trajetória retilínea, com velocidades V_A e V_B , posição inicial S_{0A} e S_{0B} , aceleração a_A e a_B , respectivamente. Qual será o instante e a posição de encontro?

Proporemos uma solução para o exemplo sugerido acima. A ideia desta atividade é resolver a questão proposta literalmente, ou seja, sem os dados numéricos e depois iremos passar estes resultados para o *Modellus* onde exploraremos a animação e o modelo matemático.

Escrevendo a equação da posição para os móveis A e B:

$$S_A = S_{0A} + V_{0A}t + \frac{a_A}{2}t^2,$$

$$S_B = S_{0B} + V_{0B}t + \frac{a_B}{2}t^2,$$

e fazendo $S_A = S_B$ temos:

$$(a_A - a_B)t^2 + (V_{0A} - V_{0B})t + (S_{0A} - S_{0B}) = 0, \quad (1.0)$$

As soluções para t são dadas por:

$$t = \frac{-(V_{0A} - V_{0B}) \pm \sqrt{(V_{0A} - V_{0B})^2 - 2(a_A - a_B)(S_{0A} - S_{0B})}}{(a_A - a_B)}, \quad (1.1)$$

Neste momento o professor pode encorajar o aluno a buscar analisar as condições necessárias para que haja ponto de encontro. A condição para que haja ponto de encontro será termos $t > 0$. Partindo desta condição analisaremos alguns casos.

Caso a) Se $a_A = a_B$, a equação (1.0) leva à:

$$(V_{0A} - V_{0B})t + (S_{0A} - S_{0B}) = 0,$$

com solução:

$$t = \frac{-(S_{0A} - S_{0B})}{(V_{0A} - V_{0B})}, \quad (1.2)$$

seguem-se então as seguintes análises:

- i. Se $V_{0A} > V_{0B}$ então para que $t > 0$, $S_{0B} > S_{0A}$,

ii. Se $V_{0B} < V_{0A}$ então para que $t > 0$, $S_{0A} > S_{0B}$.

Cabem aqui algumas análises interessantes que podemos fazer com os alunos do ensino médio.

1) Repare que o tempo de encontro (equação 1.2), no caso das acelerações dos móveis A e B serem iguais, independe da a_A e a_B .

2) As conclusões (i) e (ii) são triviais do ponto de vista prático. Se a velocidade inicial do móvel A, por exemplo, for maior que a do móvel B, para que haja ponto de encontro o móvel B deve estar, inicialmente, na frente de A. Caso contrário o móvel A nunca encontrará o móvel B. Mesmo sendo triviais, as conclusões (i) e (ii) nos mostram como a coerência matemática e física vem ao encontro da experiência cotidiana. Vale a pena este tipo de abordagem com alunos do ensino médio. Dar significado concreto aos símbolos e resultados matemáticos é uma importante habilidade que deve ser tratada no ensino médio.

3) Como proposta, pode-se animar tal exemplo e explorar com os alunos as diferentes possibilidades de alteração dos parâmetros aceleração, posição inicial e velocidade inicial verificando a validade das conclusões (i) e (ii).

Caso b) Se $V_{0A} = V_{0B}$, a equação (1.0) levando à:

$$(a_A - a_B)t^2 + (S_{0A} - S_{0B}) = 0, \quad (1.3)$$

Com solução:

$$t = \sqrt{\frac{2(S_{0A} - S_{0B})}{(a_A - a_B)}}. \quad (1.4)$$

Seguem as seguintes conclusões, para que $t > 0$:

i. Se $a_B > a_A$, então $S_{0A} > S_{0B}$.

ii. Se $a_A > a_B$, então $S_{0B} > S_{0A}$.

iii. Para que haja encontro, a_A não pode ser igual a_B .

Seguem algumas análises:

a) O tempo de encontro independe das velocidades iniciais.

b) Caso as velocidades iniciais sejam iguais, para que haja encontro, se a aceleração de B for maior que a aceleração A (conclusão i) então o móvel A tem que estar na frente do móvel B ($S_{0A} > S_{0B}$). A conclusão ii segue o mesmo tipo de análise.

Caso c) Se $S_{0A} = S_{0B}$, a equação (1.0) será:

$$(a_A - a_B)t^2 + (V_{0A} - V_{0B})t = 0. \quad (1.5)$$

Fora a solução trivial quando $t = 0$, teremos:

$$t = \frac{-2(V_{0A} - V_{0B})}{(a_A - a_B)}. \quad (1.6)$$

Seguem as seguintes conclusões, para que $t > 0$:

- i. Se $a_A > a_B$, então $V_{0B} > V_{0A}$.
- ii. Se $a_A < a_B$, então $V_{0A} > V_{0B}$.

Seguem algumas análises:

- a) O tempo de encontro não depende das posições iniciais.
- b) As conclusões (i) e (ii) não são tão triviais como nos casos anteriores. Para este caso vale a pena explorar a animação do *Modellus*.

Caso d) Caso geral, onde nenhum parâmetro é igual ao outro. É a análise da solução (1.1) da equação (1.0). Na equação para t (1.1), terá solução se:

- a) Para que não haja em (1.1) raiz negativa devemos ter:

$$2(a_A - a_B)(S_{0A} - S_{0B}) \geq (V_{0A} - V_{0B})^2, \quad (1.7)$$

Segue que $a_A < a_B$.

2.1.1 Animando a proposta 1 no *Modellus*

- 1) Na tela inicial o *Modellus*, localize a janela “Modelo Matemático” e escreva as linhas como se seguem:

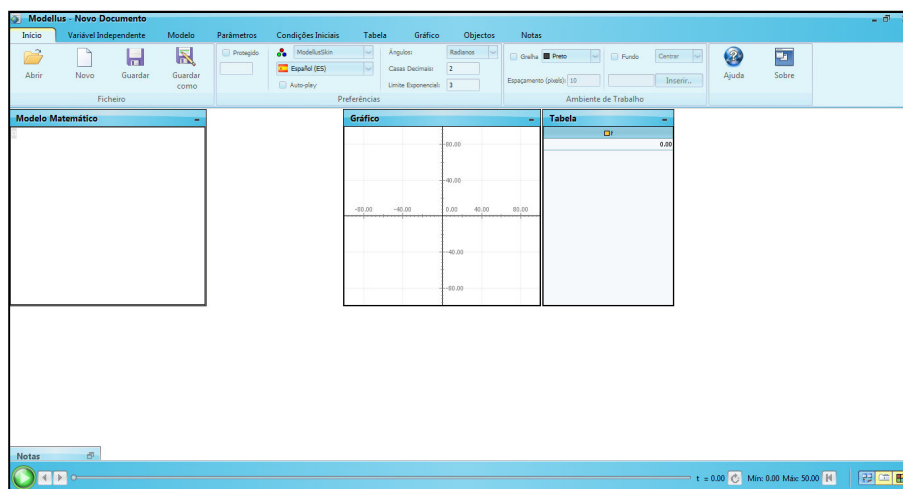


Figura 5: tela inicial do *Modellus*. A janela “Modelo Matemático” encontra-se no lado esquerdo acima.

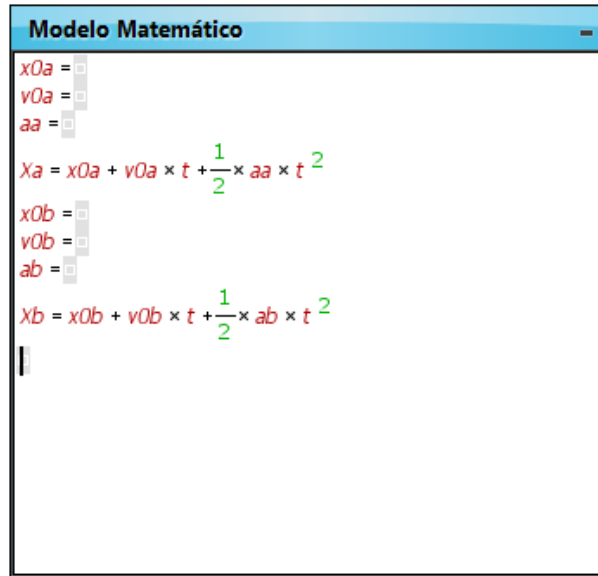


Figura 6: 1º passo da animação da atividade 1, a modelagem matemática.

Na figura acima representamos exatamente como ficará a janela “Modelo Matemático” após a digitação das equações matemáticas apresentadas na atividade 1. Seguem alguns detalhes do código utilizado na modelagem X_{0a} matemática. x_{0a} é a posição inicial do móvel A, V_{0a} é a velocidade inicial do móvel A e aa é a aceleração do móvel A. X_a é a posição do móvel A num tempo t . Para o móvel B segue a mesma notação. No *Modellus* fazer a indexação V_{0A} é um tanto difícil, então adotaremos a notação V_{0A} para indicar V_{0A} , assim como a usaremos para representar outras grandezas indexadas. Ao lado de cada parâmetro colocaremos o valor que desejarmos:

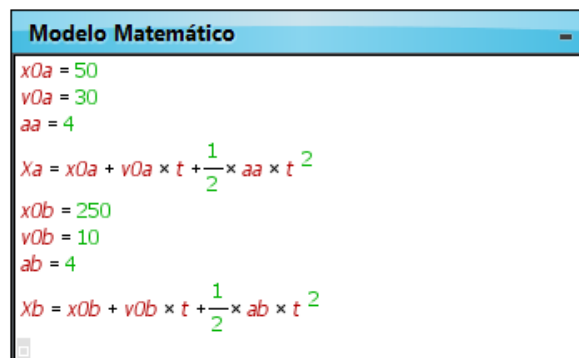


Figura 7: na figura acima foram colocados em cada parâmetro (posição inicial, velocidade inicial e aceleração) valores que satisfizessem a conclusão (1.3) do **Caso a**.

2) Para fazer a animação, clique em “objetos” situado na barra de ferramentas, parte de cima da tela do *Modellus*. Depois clique em “partícula”, situado do lado esquerdo, logo abaixo da barra de ferramentas. Então clique numa parte em branco da tela do *Modellus* (fora da janela Modelo Matemático). Após tais passos, sua tela deverá parecer como a figura abaixo:

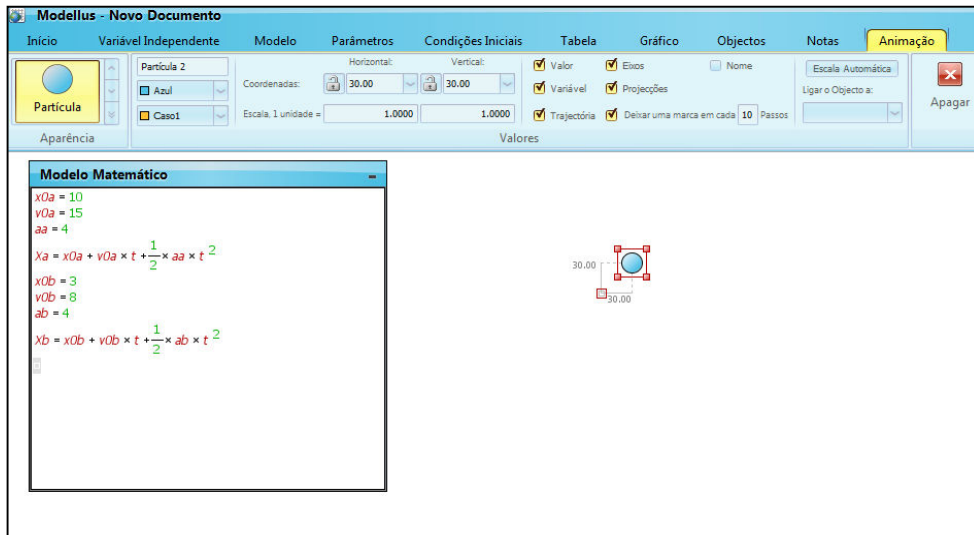


Figura 8: 1º passo para a animação de uma partícula.

3) Repita o passo 2 (anterior) para colocar outra partícula na tela.

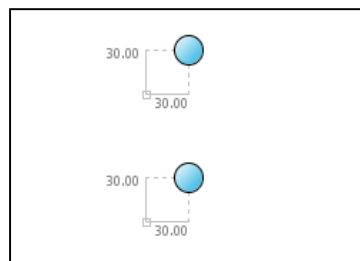


Figura 9: Detalhe da tela do *Modellus* após a colocação da 2ª partícula.

4) Ao clicar em uma das partículas, aparecerá logo acima da tela uma série de configurações da partícula que foi selecionada



Figura 10: detalhes da configuração da partícula 2.

5) Troque as partículas de cor (na barra de configuração da partícula no lado esquerdo na seta para baixo ao lado da palavra “azul”) e alinhe-as colocando uma acima da outra, (detalhe na figura abaixo).

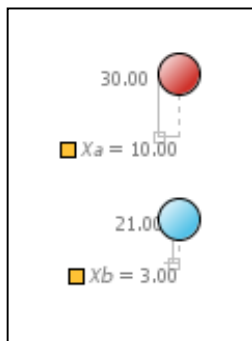


Figura 11: Detalhe das partículas 1(vermelho) e partícula 2 (azul) alinhadas.

Para mover a partícula clique na partícula desejada e veja logo abaixo a direita um pequeno quadrado. Ponha a seta do mouse sobre este quadrado e verifique que a seta mudará para uma espécie de “cruz”, clique, segure e arraste a partícula para onde desejar.

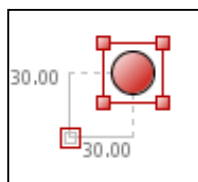


Figura 12: Em detalhe. Observe o pequeno quadrado abaixo a direita da partícula. Clique, segure e arraste para onde desejar deslocar a partícula.

6) As configurações podem e devem ser exploradas pelo professor e pelo aluno. Porém para fazer a animação é importante localizar as palavras “Horizontal” e “Vertical” na barra de configuração. A tela de animação do *Modellus* é tratada como um plano bidimensional, sendo assim a partícula pode ter uma orientação para se movimentar na horizontal ou vertical, ou até mesmo se mover na horizontal e vertical ao mesmo tempo. Mais adiante exploraremos esta funcionalidade. No momento, clique na partícula 1 e abaixo da palavra “Horizontal” clique na seta para baixo (ao lado no número 30.00). Aparecerá uma lista com várias variáveis. Clique na variável “Xa” que orientará a partícula a se movimentar na direção x. Faça o mesmo com a partícula B e

orienta-a com a variável “Xb” na direção horizontal. Obs.: caso deseje, na posição vertical, apague o número 30.00 e escreva 0. Após este passo as partículas aparecerão conforme a figura abaixo:

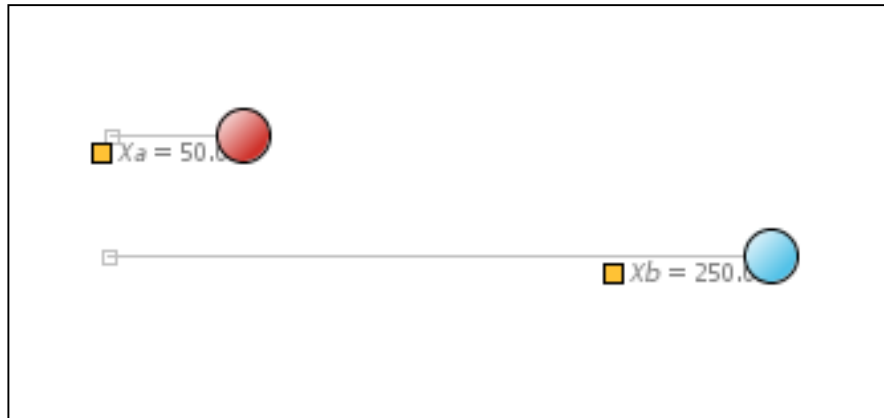


Figura 13: Após o alinhamento e a escolha de Xa e Xb como orientadores da direção horizontal, as partículas se posicionaram conforme a posição inicial dada na janela “Modelo Matemático”. Repare que a partícula A se encontra a 50 unidades da origem e a partícula B se encontra a 250 unidades da sua origem, conforme os parâmetros x_{0a} e x_{0b} . Repare que as origens (pequeno quadrado branco) estão alinhadas.

7) Clique no botão “Play” e observe a animação. Você verá o tempo passar e as partículas se movimentarão. Qual será o instante em que as partículas passarão pela mesma posição?



Figura 14: Tecla “Play”. Situada abaixo da tela a direita.

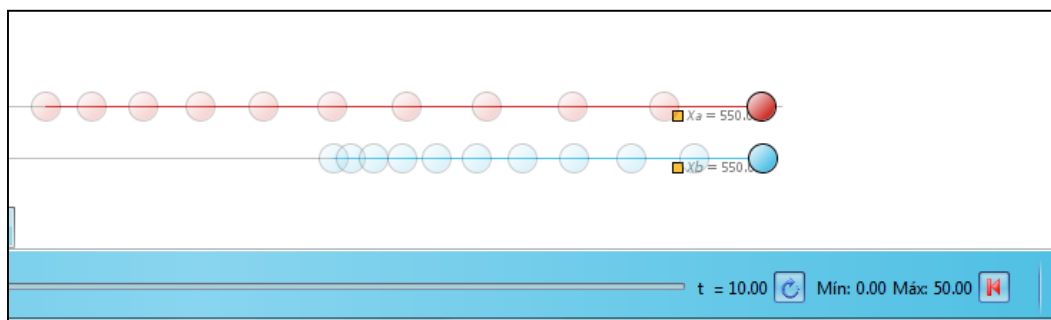


Figura 15: Posição de encontro $x_a = x_b = 550$ unidades em 10 “segundos”.

O *Modellus* não interpreta unidades como segundos, metros ... Todo modelo matemático calculado pelo *software* é tratado em unidades não especificadas. Cabe ao experimentador (professor ou aluno) avaliar com que unidade está trabalhando. Por exemplo, na atividade mostrada acima se as velocidades iniciais são 30 m/s e 10 m/s então a posição de encontro será em $x = 550\text{ m}$ e o tempo $t = 10\text{ s}$. Porém se as velocidades forem em km/h , a posição será dada em quilômetros e o tempo em horas. Se as velocidades fossem 30 m/s e 10 km/h o *Modellus* calcularia do mesmo jeito. Porém a resposta $t = 10$ não terá sentido. Vale sempre salientar: quem interpreta e valida os dados e informações dadas pelo *software* de animação é sempre o usuário.

2.1.2 Como apresentar a proposta 1 no ensino médio

A seguir são apresentadas sugestões de condução do tema com os alunos. Cabe sempre ao professor a adequação do conteúdo e a decisão de quanto tempo gastará em cada etapa.

Parte I

Partimos do princípio que os alunos já discutiram o movimento uniforme (MU), o movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV) e já resolveram/estão resolvendo questões relativas a ponto de encontro sobre uma reta.

1) Pedir para que os alunos façam a animação de dois móveis que seguem a equação horária do MRUV. As instruções de como animar/modelar foi dada acima. O professor encontrará a melhor forma de auxiliar os alunos nesta tarefa.

Segue um roteiro inicial para a exploração da animação:

Haverá encontro dos móveis quando ...

- 1) os móveis tem a mesma aceleração? ($a_A = a_B$)
- 2) os móveis tem a mesma velocidade inicial? ($V_{0A} = V_{0B}$)
- 3) os móveis estão na mesma posição inicial? ($S_{0A} = S_{0B}$)

Certamente haverá respostas diversas. É bem possível que numa turma alguns alunos, após o uso das animações digam que é possível haver encontro e outros que digam que não haverá encontro. O interessante aqui é observar como o aluno lida com o modelo matemático e como lida com as conclusões vindas da tentativa e do erro. Num primeiro

momento, o que o professor quer é que realmente o aluno investigue, tente e erre. Ou seja, vá modificando os valores de V_0 , S_0 e a e veja o que acontece na animação. O professor deve sempre mediar esta fase da tentativa e do erro, aproveitando este momento para fazer a ponte entre o que os alunos estão descobrindo com aquilo que o aluno já sabia. A mediação entre um conceito novo com um conceito já sabido pelo aluno é a chamada aprendizagem significativa, proposta por Ausubel [para detalhes ver ref. 1].

2) Passada a fase da tentativa e do erro, o professor poderá resolver, de forma literal, quando há e quando não há encontro quando $a_A = a_B$, por exemplo. A resolução literal da questão ajudará o aluno a realizar um estudo qualitativo da situação dada na questão [1]. Sendo assim o professor encorajará os alunos a verificarem matematicamente as condições de encontro. O objetivo é que os alunos observem que nos três casos, da atividade acima, poderá ou não haver encontro, dependendo de condições que devem ser satisfeitas. Mesmo que o aluno ainda persista em encontrar as condições de encontro de uma maneira empírica, vale à pena mostrar matematicamente que o modelo matemático pode prever tais condições.

3) Segue uma tabela a ser completada pelo aluno:

Caso		Haverá encontro?	
1)	$\mathbf{a_A = a_B}$	Sim	Quando ...
		Não	Quando ...
2)	$\mathbf{V_{0A} = V_{0B}}$	Sim	Quando ...
		Não	Quando ...
3)	$\mathbf{S_{0A} = S_{0B}}$	Sim	Quando ...
		Não	Quando ...

A tabela em si não tem nenhuma aplicação prática. Não será o tipo de tabela em que os alunos terão que memorizar as condições de encontro. O interessante aqui é a confecção da tabela, no sentido de organizar idéias. Nesta atividade o processo vale mais que o produto.

4) Passado o processo inicial, pode-se encorajar o aluno a resolver algumas questões típicas utilizando os recursos do *Modellus*. Segue abaixo uma sugestão de questão:

Dado o gráfico abaixo, determine a distância inicial para que haja encontro entre a moto I e a moto II no instante $t=4s$.

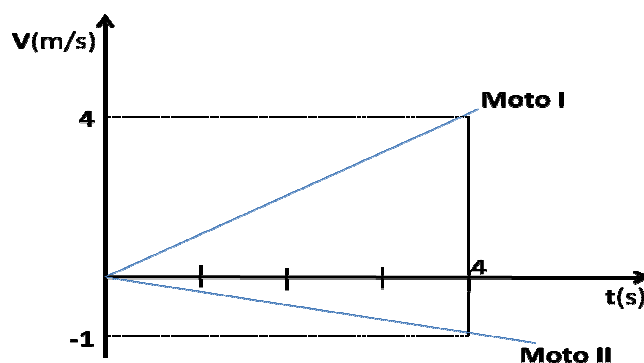


Figura 16: gráfico vxt de duas motos. Sugestão de questão a ser resolvida.

Parte II

Para a atividade proposta nesta parte será necessário que o aluno já tenha estudado conceitos relacionados à composição vetorial da velocidade. Uma vez que estenderemos o movimento unidimensional para o caso bidimensional, é necessário que o aluno também tenha estudado o movimento de uma partícula sobre uma superfície. Para todos os casos estudados desconsideraremos a influência do atrito.

Ao estender o caso unidimensional para o caso bidimensional faremos apenas com que os móveis sigam as equações do movimento uniforme nas direções horizontal e vertical.

Segue abaixo uma sugestão de animação, para o caso bidimensional:

Modelo Matemático

$$\begin{aligned}
 &v_{ax} \\
 &v_{ay} \\
 &x_a = v_{ax} \times t \\
 &y_a = v_{ay} \times t \\
 &v_{bx} \\
 &v_{by} \\
 &d \\
 &x_b = v_{bx} \times t + d \\
 &y_b = v_{by} \times t \\
 &x_{intersecao} = \left(\frac{-v_{by}}{v_{bx}} \times d \right) \\
 &\quad \left(\frac{v_{ay} - v_{by}}{v_{ax} - v_{bx}} \right) \\
 &y_{intersecao} = \left(\frac{v_{ay}}{v_{ax}} \right) \times x_{intersecao}
 \end{aligned}$$

Figura 17: modelo matemático da animação bidimensional.

A figura acima mostra o modelo matemático da animação para o caso bidimensional. Seguem as explicações de cada linha:

Nas linhas 1 e 2 definimos as variáveis V_{ax} e V_{ay} , que são as velocidades do móvel A para as direções x (horizontal) e y (vertical). Repare que a indexação no *Modellus* é um tanto complicada, sendo assim trataremos, por exemplo, a velocidade do objeto na direção x como sendo vax ao invés de V_{ax} . Neste exemplo não daremos diretamente o valor das velocidades. A velocidade dos objetos serão atribuídas por um vetor, o que garantirá a interação da animação com o modelo matemático. A aplicação deste vetor será vista logo abaixo.

Nas linhas 3 e 4 definimos a equação da posição do objeto A nas direções x e y . Repare que nas equações, o móvel A inicia seu movimento na origem dos espaços.

Nas linhas 4 e 5 definimos as velocidades do móvel A, assim como o fizemos com o móvel A, nas linhas 1 e 2.

Na linha 6, definimos a variável d , que será a posição inicial do móvel B (na direção x). Neste caso, também não definiremos um valor prévio para d . O valor desta variável será determinada pelo usuário por um indicador de nível. Veremos logo adiante como usar este indicador de nível.

Nas linhas 7 e 8 definimos a equação da posição do objeto B nas direções x e y .

Nas linhas 9 e 10 definimos o ponto (x,y) onde ocorre a interseção das trajetórias dos móveis A e B. Se tratarmos as trajetórias dos móveis A e B como sendo equações da reta sobre um plano x e y tal como $y = ax+b$, e fizermos a interseção destas retas, encontraremos o $x_{interseção}$ e $y_{interseção}$. É uma interessante atividade para o aluno.

Segue a tela com a animação:

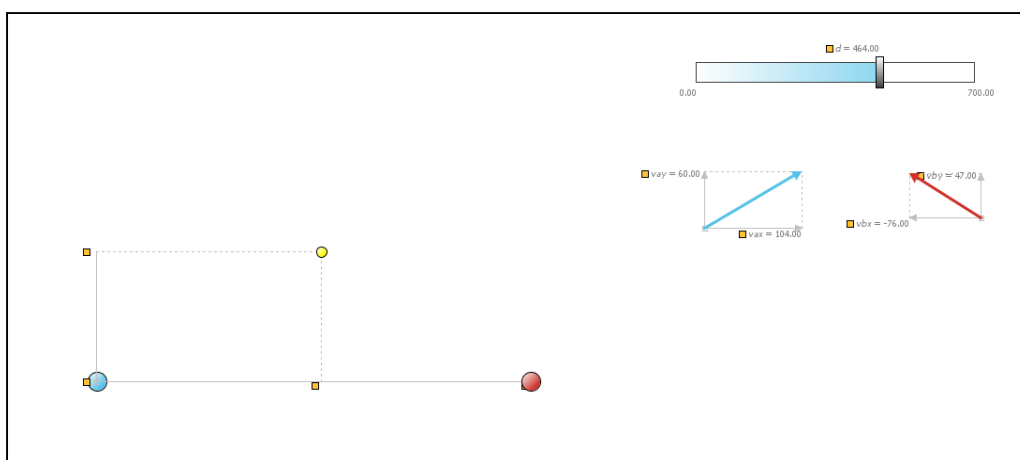


Figura 18: animação bidimensional dos móveis A(bola azul) e B(bola vermelha).

Na figura acima:

- A partícula A (em azul) está configurada para que siga x_a na direção horizontal e y_b na direção vertical. O mesmo foi feito com a partícula B (em vermelho), x_b e y_b direcionam a partícula na horizontal e vertical respectivamente.

- A partícula em amarelo está configurada para ocupar a posição $x_{interseção}$ e $y_{interseção}$. Na horizontal é a variável $x_{intersecao}$ e na vertical a variável $y_{intersecao}$.

- A seta em azul é um vetor (é a seta escrita “vector” na aba “objectos” na barra de ferramentas do *Modellus*). Este vetor está configurado para que a direção horizontal do móvel A seja representada pela variável v_{ax} e na direção vertical seja representada pela variável v_{ay} . Da mesma forma o vetor em vermelho representa as velocidades nas direções x e y para o móvel B. À medida que interagirmos com estas vetores as velocidades x e y vão mudando.

- O indicador de nível, achado na barra de ferramentas, na aba “objectos” está configurado para a variável d . Podemos interagir com este nível aumentando ou diminuindo o valor de d .

É importante que todas as partículas (azul, vermelha e amarela) estejam com seu sistema de coordenadas iniciando sobre o mesmo ponto. Observe a figura 19 e veja o pequeno quadrado, à esquerda logo abaixo. Este é o ponto (0,0) é a origem das coordenadas x e y . Todas as partículas devem ter suas origens em comum.

Aperte o “play” e veja o que acontece.

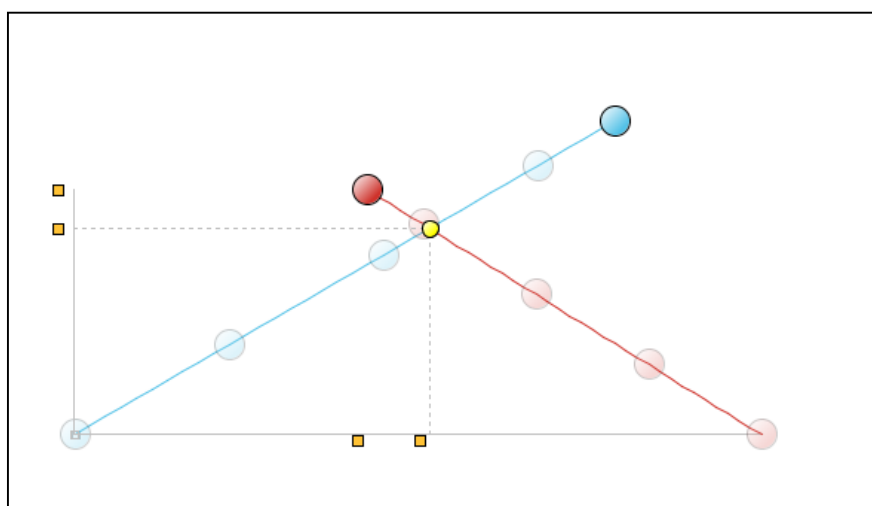


Figura 19: detalhe da animação dos móveis a e b.

De fato, a partícula amarela marcou a posição de interseção entre as trajetórias dos móveis A e B. Porém, este ponto de interseção não corresponde, sempre, ao ponto

de encontro entre os móveis. O que é necessário para que o ponto de interseção seja o ponto de encontro? Mais um excelente momento para se discutir com os alunos. Tal discussão fará parte da proposta 2, logo adiante, onde a partícula A será um navio e a partícula B será um torpedo interceptador.

2.2 Proposta 2 – Estudando o círculo de Apolônio

Nesta atividade temos como pré-requisito o estudo do movimento de uma partícula sobre um plano, tal como a atividade anterior. Deseja-se que os alunos também já tenham estudado o conceito de vetor unitário e saibam parametrizar curvas, pelo menos a parametrização de uma circunferência, curva que será utilizada nesta atividade. Considere o seguinte problema [9]: um porta-aviões com o leme perigosamente avariado segue um curso retilíneo rumo à sua base naval para reparos, embora seus sistemas eletrônicos de defesa tenham detectado a presença de um submarino hostil nas cercanias. Os sistemas de detecção do submarino mostram na tela do monitor que a distância relativa entre os dois é de 1 km. A celeridade do porta-aviões é duas vezes menor do que a do torpedo que lhe está reservado. O comandante do submarino pergunta ao seu imediato se a solução de interceptação é favorável. O oficial responde afirmativamente. O comandante então ordena: “Disparar torpedo”. Com o leme inutilizado e, logo, incapaz de efetuar qualquer manobra evasiva, o porta-aviões está condenado. Será fatalmente atingido pelo torpedo.

A solução de interceptação favorável que fez com que o comandante do submarino ordenasse o disparo do torpedo é uma figura geométrica conhecida pelos matemáticos como o círculo de Apolônio em homenagem ao grande matemático grego, Apolônio de Perga (c. 262 a.C -- 212 a.C.). O problema do porta-aviões e do torpedo é uma versão high-tech do problema original de Apolônio que tratava de um navio mercante e um navio pirata que procurava interceptá-lo. A geometria do problema está representada na Figura 20.

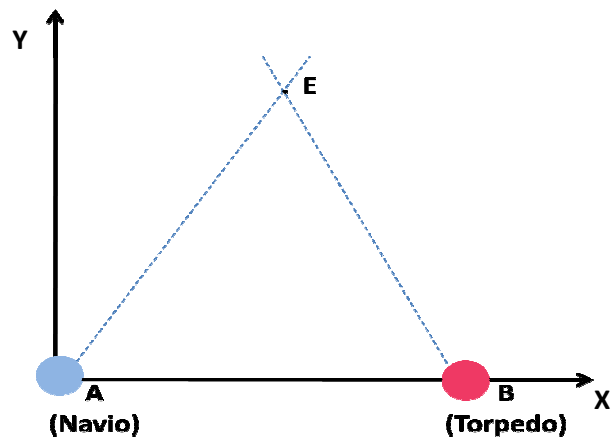


Figura 20: rota de colisão entre um navio e um torpedo

Como fazer para que o ponto **E**, interseção entre as trajetórias do navio e do torpedo, seja o ponto de encontro? Para tal, uma condição tem que ser satisfeita:

$$t_{AE} = t_{BE},$$

ou seja, para que o ponto **E**, seja o ponto de encontro, o tempo que o navio leva para chegar ao ponto **E** tem que ser o mesmo que o torpedo levará para alcançar o ponto **E**. Sendo assim:

$$\frac{AE}{V_A} = \frac{BE}{V_B},$$

onde AE é a distância percorrida do ponto **A** até o ponto **E**, BE é a distância percorrida do ponto **B** até o ponto **E**, V_A e V_B são as velocidades do navio e do torpedo, respectivamente. Sendo assim a equação acima ficará:

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{BE}{AE} = k, \quad (2.0)$$

a razão das velocidades e das distâncias é igual a uma constante k .

O círculo de Apolônio será definido como sendo o conjunto dos pontos **E** tal que a equação (2.0) seja satisfeita. Escrevendo AE , BE em termos das coordenadas x e y , chegamos a seguinte equação:

$$BE = \sqrt{(x - x_B)^2 + y^2}, \quad (2.1)$$

$$AE = \sqrt{(x - x_A)^2 + y^2}, \quad (2.2)$$

onde x e y são as coordenadas do ponto E e x_A e x_B são as coordenadas horizontais, inicial, do navio e do torpedo respectivamente. Substituindo as equações (2.1) e (2.2) na equação (2.0) e com um pouco de algebrismo chegamos em:

$$\left(x - \frac{k^2 x_A - x_B}{k^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \left[\frac{k(x_B - x_A)}{|1 - k^2|}\right]^2, \quad (2.3)$$

que é a equação cartesiana de uma circunferência $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$ com centro em:

$$x_0 = \frac{k^2 x_A - x_B}{k^2 - 1} \quad e \quad y_0 = 0 \quad (2.4)$$

e raio igual a:

$$R = \frac{k(x_B - x_A)}{|1 - k^2|}. \quad (2.5)$$

A equação (2.3) é o círculo de Apolônio dos pontos A e B quando $t = 0$. A equação (2.0) é uma forma de definir, de uma maneira diferente a usual forma da circunferência definida pela geometria plana em que, o círculo é definido como o conjunto de todos os pontos do plano equidistantes de um ponto arbitrário O que também pertence ao plano.

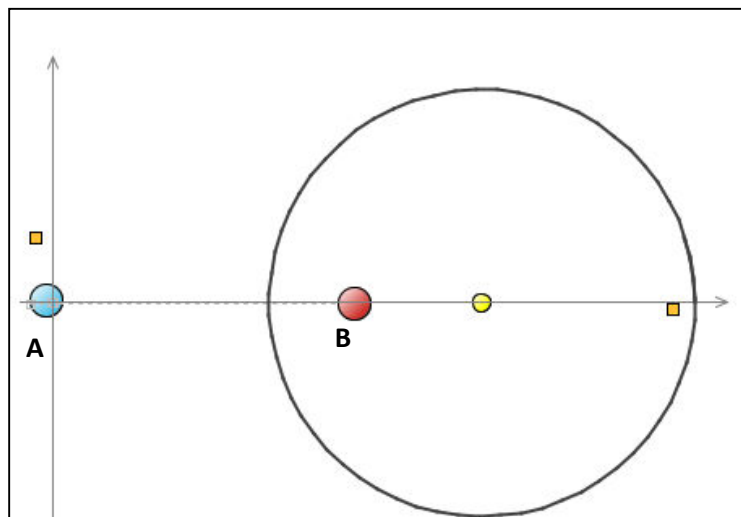


Figura 21: círculo de Apolônio em preto, equação (2.3), para $k=0,5$ e para o ponto A(0,0) e B(200,0). A partícula em amarelo indica o centro do círculo de Apolônio.

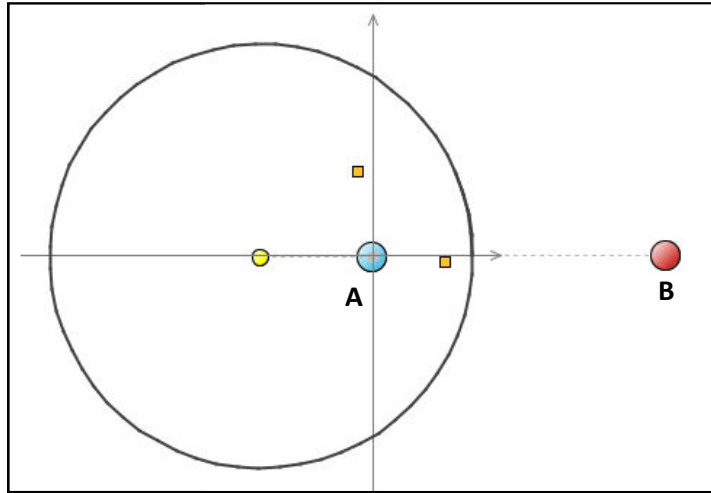


Figura 22: círculo de Apolônio em preto, equação (2.3), para $k=1,9$ e para o ponto $A(0,0)$ e $B(200,0)$. A partícula em amarelo indica o centro do círculo de Apolônio.

A interceptação do torpedo será possível se a trajetória do torpedo estiver na direção da linha que une o ponto inicial do torpedo e o ponto onde a trajetória do navio cruza o círculo de Apolônio. Seguem alguns exemplos:

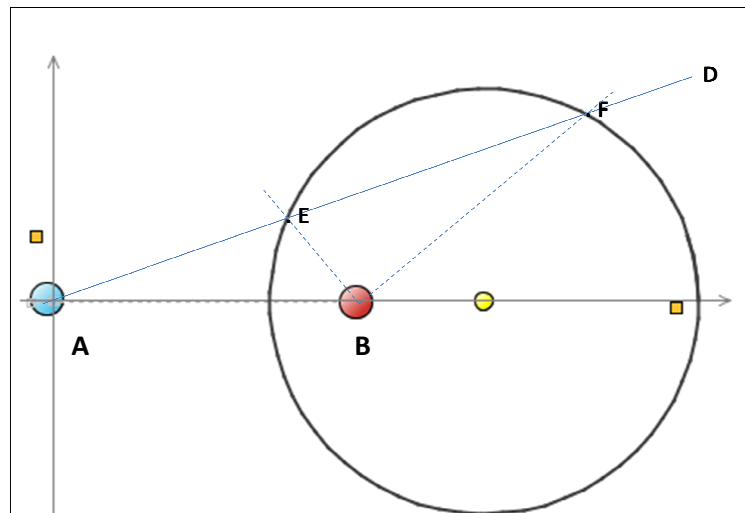


Figura 23: Supondo que o navio siga uma trajetória marcada pela reta D, o torpedo poderá interceptar o navio se direcionarmos este torpedo para o ponto E ou para o ponto F. Sendo este o exemplo dado na figura 21, onde $k = 0,5$ ou seja, o torpedo é mais lento que o navio, torna um resultado interessante. O torpedo tem duas possibilidades de atingir o alvo!

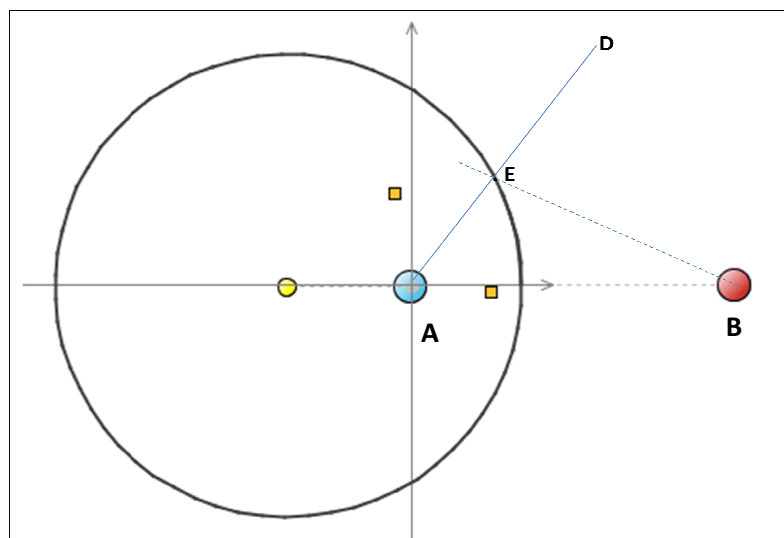


Figura 24: Sendo o navio mais lento que o torpedo ($k = 1,9$ – ver figura 22) o torpedo só tem uma “chance” de interceptar o navio caso este siga uma trajetória determinada pela reta D.

2.2.1 Animando a proposta 2 no *Modellus*

Para desenhar o círculo de Apolônio no *Modellus*, foi necessário parametrizarmos a equação da circunferência: $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$

A parametrização ficará:

$$x = x_0 + R \cos(t), \quad (2.6)$$

$$y = y_0 + R \sin(t), \quad (2.7)$$

O *Modellus* não faz gráficos de funções implícitas tais como a equação da circunferência. Para que se desenhe a circunferência é necessário parametrizar conforme as equações (2.6) e (2.7). A variável t nas equações acima é a variável independente. Segue abaixo um exemplo onde usa-se todos os conceitos desenvolvidos na proposta 2.

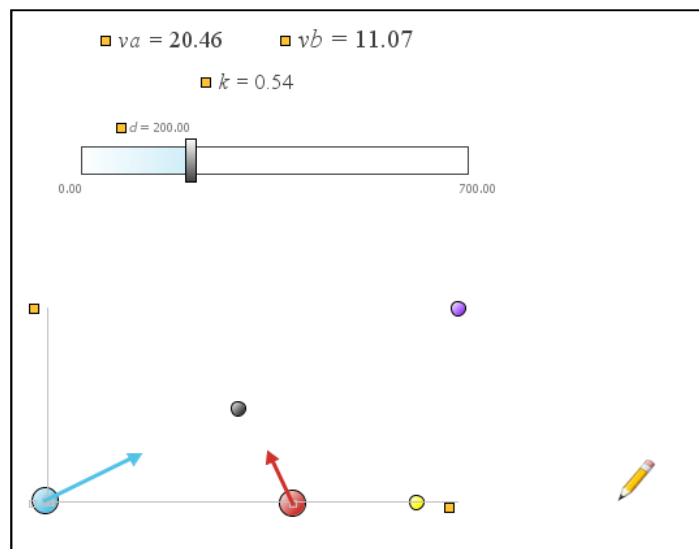


Figura 25: tela inicial da animação modelada na figura 26.

```

vax
vay
xa = vax * t
ya = vay * t
vbx
vby
d
xb = vbx * t + d
yb = vby * t
vb = sqrt(vbx2 + vby2)
va = sqrt(vax2 + vay2)
k = vb / va
xcentro = (-d) / (k2 - 1)
ycentro = 0
raio = (k * d) / abs(1 - k2)
xcirculo = xcentro + raio * cos(t)
ycirculo = ycentro + raio * sin(t)
vaa = vay / vax
xmais = ((2 * xcentro) + sqrt((2 * xcentro)2 - 4 * (vaa2 + 1) * (xcentro2 - raio2))) / (2 * (vaa2 + 1))
xmenos = ((2 * xcentro) - sqrt((2 * xcentro)2 - 4 * (vaa2 + 1) * (xcentro2 - raio2))) / (2 * (vaa2 + 1))
ymais = vaa * xmais
ymenos = vaa * xmenos

```

Figura 26: janela do modelo matemático da atividade proposta 2. A explicação linha a linha segue logo abaixo.

A partícula amarela é o centro do círculo de Apollonius, na figura 26 esta representada pelas variáveis $xcentro$ (linha 13) e $ycentro$ (linha 14), dados pela equação (2.4), onde neste caso $x_a=0$ e $x_b=d$.

O lápis desenhará o gráfico o círculo de Apollonius representados por $xcirculo$ (linha 16) e $ycirculo$ (linha 17), com raio (linha 15) dado pela equação (2.5). A função $abs(1-k^2)$ (linha 15) no *Modellus* representa o módulo de $(1-k^2)$. $xcirculo$ e $ycirculo$ foram dados segundo a parametrização dadas nas equações (2.6) e (2.7).

Os vetores azul e vermelho indicam o vetor velocidade do navio e do torpedo respectivamente. Estes vetores dão as componentes V_x e V_y para que possamos calcular o módulo da velocidade do navio e do torpedo, representados respectivamente por va (linha 11) e vb (linha 10). As velocidades va e vb servem para o cálculo da constante k (linha 12). Lembrando que esta constante k servirá para o cálculo do círculo de Apolônio nas equações (2.4) e (2.5). Estes vetores estão “ligados” as partículas. De tal forma que quando a animação se iniciar os vetores acompanharão as partículas. Para “ligar” os vetores a partícula, verificar o menu de configuração do vetor (clique no vetor e logo baixo da barra de ferramentas aparecerá o menu de configuração).

As partículas preta e roxa são os pontos onde a trajetória do navio (partícula azul) cruzará o círculo de Apolônio. A partícula preta está representada pelas variáveis $xmenos$ (linha 20) e $ymenos$ (linha 22) e a partícula roxa está representada por $xmais$ (linha 19) e $ymais$ (linha 21). Estes pontos foram calculados a partir do simples cálculo da interseção entre as equações da circunferência $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$ e a equação da reta $y = ax$, que representa a equação da trajetória retilínea do navio. Da interseção desta duas equações calculamos $xmais$, $ymais$, $xmenos$ e $ymenos$.

A figura abaixo mostra a evolução da animação descrita acima.

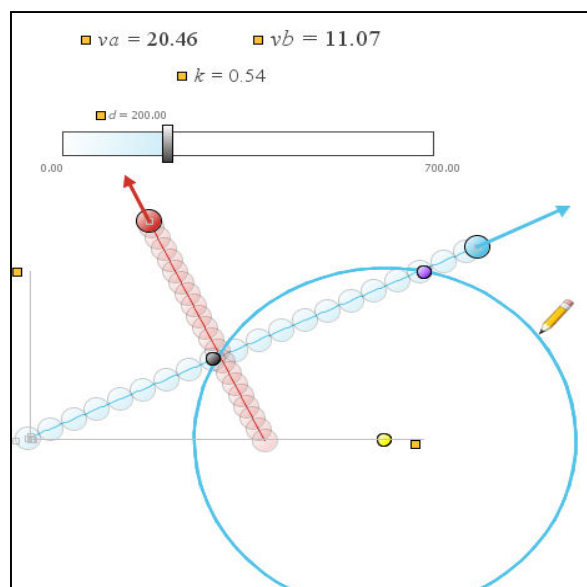


Figura 27: evolução temporal da animação sugerida na proposta 2.

A interatividade neste modelo se dá pela alteração dos parâmetros. Podemos alterar o vetor velocidade do navio, verificar onde estarão os pontos de interseção (partículas preta e roxa) e direcionar o vetor velocidade do torpedo para um destes

pontos. É interessante notar que nem sempre temos a interseção da trajetória do navio com o círculo de Apolônio, vai depender dos valores dos parâmetros.

2.2.2 Como apresentar a proposta 2 no ensino médio

Após a demonstração da equação (2.0) pede-se aos alunos que façam a seguinte atividade:

Considerando a figura 20, dados AE , BE e VA , calcular qual deverá ser VB que satisfaça a equação (2.0). Ou seja, primeiro determinamos o ponto de encontro entre os móveis. Sabendo a velocidade do navio calcularemos qual deverá ser a velocidade do torpedo para que haja colisão naquele ponto escolhido. Fica a critério do professor solicitar dos alunos a animação desta atividade.

Se fossemos levar em conta um pouco da realidade, nem sempre poderíamos calcular a velocidade do torpedo em função da velocidade do navio. Em geral a velocidade do torpedo e do navio já são dados do problema. O que temos que determinar é se haverá ou não colisão. E se houver, em que ponto será.

O professor pode então demonstrar a equação (2.3) ou simplesmente, dependendo da turma, mostrar esta equação como sendo a solução geral da equação (2.0). Ou seja, a equação (2.3) é a coleção de todos os pontos E (pontos onde pode haver interceptação). Lembrando que esta coleção de pontos mostrada pela equação (2.3) só depende das posições iniciais do navio e do torpedo e das velocidades dos móveis.

A interceptação entre o navio e o torpedo se dará então no ponto que a trajetória do navio e do torpedo se cruzam no círculo de Apolônio. Ver figuras 23 e 24.

Sugere-se que o professor incentive os alunos a fazerem animações de interceptação entre o navio e o torpedo, desta vez utilizando as idéias do círculo de Apolônio.

Explorando a animação, discuta com os alunos que caso haverá ou não interseção entre o navio e o torpedo. Discuta o limite de validade da equação (2.3). O que acontece quando $k > 1$ ou $k < 1$?

Este tipo de animação, usando o círculo de Apolônio, poderia ser usado por algum tipo de jogo? Encontre com seus alunos quais tipos de jogos “utilizam” o conceito de interceptação estudado aqui. Digo “utilizam” (entre aspas) pois não tenho certeza de qual algoritmo o programador dos jogos disponibilizados na internet usa para calcular como os projéteis atingirão seus alvos. Vale a pena, para aqueles alunos mais aficionados por física, procurar qual o método utilizado para que o projétil atinja o alvo

nos jogos encontrados na internet. Incentivar estes alunos a pelo menos implementarem, no papel, um jogo onde se use o conceito do círculo de Apolônio seria uma atividade bem interessante.

2.3 – Proposta 3: Problemas de perseguição pura

Para que haja uma perseguição, dita pura, o perseguidor (p) deve sempre estar “olhando diretamente” para o perseguido (m). As letras p e m fazem menção ao tradicional problema de perseguição envolvendo o navio pirata, o perseguidor, e um navio mercante, o perseguido. Em termos vetoriais, dizemos que esta condição é satisfeita quando o vetor velocidade do perseguidor aponta na mesma direção que a diferença entre o vetor posição do perseguido e o vetor posição do objeto perseguidor. Veja a figura:

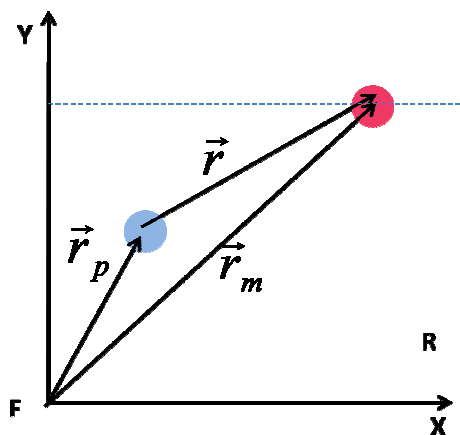


Figura 28: A perseguição “pura” ocorre quando o vetor velocidade do perseguidor aponta na direção e sentido do vetor r .

Se usarmos o vetor unitário para representar esta perseguição:

$$\hat{u} = \frac{\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_p}{\|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_p\|},$$

Definimos $\mathbf{v}_p = \dot{\mathbf{r}}_p = k\hat{u}$ como sendo a velocidade do perseguidor.

Usamos o vetor unitário para que possamos chegar as equações da velocidade do perseguidor de uma forma mais simples. Podemos simplesmente considerar, porque o perseguidor sempre aponta para o perseguido:

$$\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_p = \mathbf{r} = Q(t)\mathbf{v}_p, \quad (3.2)$$

onde o coeficiente $Q(t)$, dependente do tempo, garante a proporcionalidade entre o vetor posição relativa e o vetor velocidade do perseguidor. O coeficiente $Q(t)$ deve obedecer às seguintes condições:

$$Q(0) = \frac{d}{v_p}, \quad Q(t_{encontro}) = 0, \quad (3.3)$$

onde d é a distância inicial do perseguidor e o perseguido e v_p é o módulo da velocidade do perseguidor. Derivando a equação 3.2:

$$\dot{\mathbf{r}}_m - \dot{\mathbf{r}}_p = \dot{Q}(t)\mathbf{v}_p + Q(t)\dot{\mathbf{v}}_p, \quad (3.4)$$

onde $\dot{\mathbf{r}}_m = \mathbf{v}_m$,

Como o vetor velocidade \mathbf{v}_p não muda sua magnitude, este vetor tem que ser perpendicular ao vetor aceleração:

$$\mathbf{v}_p \cdot \dot{\mathbf{v}}_p = 0, \quad (3.5)$$

Multiplicando \mathbf{v}_p aos dois membros da equação 3.4:

$$\mathbf{v}_p(\dot{\mathbf{r}}_m - \dot{\mathbf{r}}_p) = \dot{Q}(t)\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{v}_p, \quad (3.6)$$

ou

$$v_m v_{px} - v_p^2 = \dot{Q}(t)v_p^2, \quad (3.7)$$

integrando a equação acima:

$$v_m x - v_p^2 t = Q(t)v_p^2 - d v_p, \quad (3.8)$$

quando $t = t_{encontro}$ ocorre o encontro, sendo $x = v_m t_{encontro}$ e $Q(t_{encontro}) = 0$, temos que:

$$t_{encontro} = \frac{d v_p}{v_p^2 - v_m^2}. \quad (3.9)$$

Para estudarmos a cinemática do problema de perseguição proposto, voltamos a equação (3.1) e definimos uma constante k , como:

$$\frac{\|\mathbf{v}_p\|}{\|\mathbf{v}_m\|} = k, \quad (3.10)$$

onde \mathbf{v}_m é a velocidade do objeto perseguido e \mathbf{v}_p é a velocidade de perseguidor. A equação de k acima diz que o módulo a velocidade de p é proporcional a velocidade de m . Juntando a equação (3.1) e a constante k temos:

$$\frac{\mathbf{v}_p}{k\|\mathbf{v}_m\|} = \frac{\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_p}{\|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_p\|}, \quad (3.11)$$

onde teremos:

$$\mathbf{v}_p = k\|\mathbf{v}_m\| \frac{\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_p}{\|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_p\|}. \quad (3.12)$$

Considerando $\dot{x}(t)$ e $\dot{y}(t)$ como sendo as equações paramétricas de \mathbf{v}_p e considerando $\dot{p}(t)$ e $\dot{q}(t)$ como sendo as equações paramétricas de \mathbf{v}_m temos:

$$\dot{x}(t) = k(p - x) \frac{\sqrt{[\dot{p}(t)]^2 + [\dot{q}(t)]^2}}{\sqrt{[p(t) - x(t)]^2 + [q(t) - y(t)]^2}}, \quad (3.13)$$

$$\dot{y}(t) = k(q - y) \frac{\sqrt{[\dot{p}(t)]^2 + [\dot{q}(t)]^2}}{\sqrt{[p(t) - x(t)]^2 + [q(t) - y(t)]^2}}, \quad (3.14)$$

onde $x(t)$ e $y(t)$ são as posições nos eixos horizontal e vertical do perseguidor p e $p(t)$ e $q(t)$ são as posições nos eixos horizontal e vertical do perseguido m .

No trabalho aqui proposto, consideraremos conhecida a trajetória do perseguido m e desejaremos saber qual será a trajetória do perseguidor p . Sendo assim, consideraremos conhecidas as equações $p(t)$ e $q(t)$ e a partir das equações (3.13) e (3.14), com ajuda do *Modellus* calcularemos as equações $x(t)$ e $y(t)$. Em geral quando temos a equação da velocidade de um móvel ($\dot{x}(t)$), podemos achar a equação da posição ($x(t)$) por uma simples integração:

$$x(t) = \int \dot{x}(t) dt,$$

calcular $x(t)$ e $y(t)$ a partir das equações (3.13) e (3.14) por simples integração não é uma tarefa trivial. Esta é uma das grandes vantagens do *Modellus*. Por intermédio de um método numérico, o *software* pode calcular as equações da posição x e y com uma boa aproximação.

2.3.1 Animando a proposta 3 no *Modellus*

Faremos abaixo o passo a passo da animação de uma perseguição, onde o perseguido segue uma trajetória retilínea.

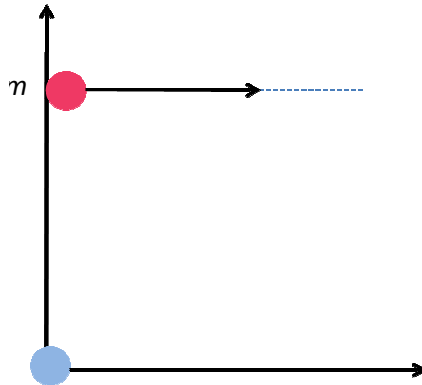


Figura 29: Se o perseguido m seguir uma trajetória retilínea, como será a trajetória de perseguição de p ?

Segue abaixo a tela do modelo matemático do problema acima.

```
Modelo Matemático
k = 1.5
vp = 40
vq = 0
p = 40 * t
q = 200
raiz = sqrt(vp^2 + vq^2) / sqrt((p - x)^2 + (q - y)^2)
dx/dt = k * (p - x) * raiz
dy/dt = k * (q - y) * raiz
```

Figura 30: modelo matemático da animação da curva de perseguição onde o perseguido segue uma trajetória retilínea.

Na linha 1 escrevemos a variável k , equação (3.10), onde atribuímos o valor de 1,5 por exemplo.

Nas linhas 2 e 3 determinamos as componentes horizontal e vertical da velocidade do objeto perseguido. Observe que foi atribuído 40 para a componente horizontal da velocidade de m e atribuímos o valor 0 para a componente vertical da velocidade de m . Ou seja, o objeto m , seguirá uma trajetória retilínea na horizontal.

Nas linhas 4 e 5 escrevemos as equações paramétricas $p(t)$ e $q(t)$ do objeto m . A equação da posição p é dada por $40t$ e a equação q é igual a 200. Ou seja, o objeto m seguirá uma trajetória retilínea de acordo com a equação $p=40t$. O objeto m também seguirá seu movimento a uma distância de 200 unidades do eixo horizontal.

Na linha 6 foi definida uma variável chamada *raiz*. A única razão desta variável é tornar as linhas 7 e 8 mais limpas. Uma vez que esta variável aparecerá nas linhas 7 e 8.

Na linha 7 escrevemos a equação (3.13) da velocidade do móvel p na direção horizontal. Para que o *Modellus* calcule a equação da posição em função da equação da velocidade é necessário que a equação da velocidade esteja escrito na forma diferencial $\dot{x} = dx/dt$.

Na linha 8 escrevemos a equação (3.14) da velocidade do móvel p na direção vertical.

Uma vez escrito o modelo matemático, basta que coloquemos duas partículas sobre a mesma origem. Cada partícula deve seguir as variáveis p e q , no caso do objeto m o perseguido, e as variáveis x e y do objeto p , calculados pelo *Modellus*.

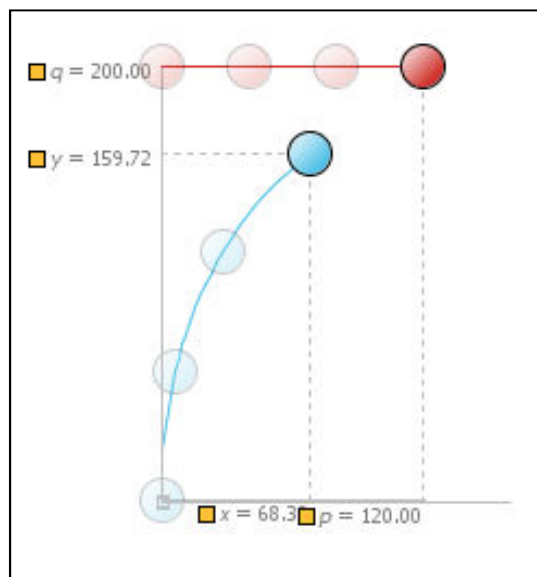


Figura 31: animação da perseguição onde o perseguido segue uma trajetória retilínea.

2.3.2 Como apresentar a proposta 3 no ensino médio

Esta atividade tem como pré-requisito os conceitos de velocidade instantânea, vetor posição relativa e vetor unitário. A velocidade instantânea não é muito explorada pelos livros didáticos de ensino médio. Citamos [10] como exemplo de livro onde tal conceito é bem abordado. No apêndice desta dissertação apresentamos uma proposta de atividade onde abordamos o conceito da velocidade instantânea *via* utilização do *Modellus*.

O professor inicialmente pode sensibilizar a turma quanto ao problema de perseguição aqui proposto. Basta que o professor enuncie o problema a ser tratado:

Considere um navio mercante que navega com velocidade constante (v_m), quando de repente é avistado por um navio pirata. Os piratas, sem titubear, iniciam a perseguição. O navio pirata também navega com velocidade constante em módulo (v_p). Vamos considerar que o navio pirata “não tira os olhos” do navio mercante. Ou seja, a todo momento o navio pirata segue o navio mercante. A idéia é fazer uma animação cujos objetivos são responder às seguintes perguntas:

- 1) *Como será a trajetória do navio pirata? Suponha que conhecemos a trajetória do navio mercante. Este é um problema de perseguição e não de interceptação. No problema de interceptação, a velocidade não aponta necessariamente sempre para o perseguido.*
- 2) *Em quais condições o navio pirata alcançará o navio mercante?*
- 3) *Quais são as vantagens/desvantagens de “olhar diretamente” para o navio perseguido? Ou seja, seguir o navio mercante é melhor ou pior do que interceptá-lo?*
- 4) *Em quanto tempo o navio pirata irá alcançar o navio mercante?*

Como a condição “olhar diretamente para o navio pirata” pode ser modelada matematicamente? Esta condição está representada na equação (3.1).

Onde, neste caso, \mathbf{r}_p e \mathbf{r}_m são os vetores posição do navio pirata e do navio mercante respectivamente. E $\dot{\mathbf{r}}_p$ é o vetor velocidade do navio pirata. Seguindo a equação e seus desdobramentos, podemos chegar nas equações (3.13) e (3.14). Onde $p(t)$ e $q(t)$ são as equações paramétricas do navio mercante e $x(t)$ e $y(t)$ são as equações paramétricas do navio pirata. $\dot{p}(t)$ e $\dot{q}(t)$, $\dot{x}(t)$ e $\dot{y}(t)$ são as velocidades na direção horizontal e vertical do navio mercante e do navio pirata. A constante k é a razão entre os módulos das velocidade do navio pirata o navio mercante. Basta que escrevamos as

equações acima no *Modellus* para que possamos obter as equações $x(t)$ e $y(t)$ do navio pirata (que é o que buscamos para responder nossos objetivos propostos na questão acima). Ver **figura 30** onde está sendo mostrada a tela que devemos digitar no modelo matemático. Considerar com o aluno o primeiro problema onde o navio mercante segue uma trajetória retilínea.

Passado o desafio da animação, o aluno e o professor estão livres para a interação com o modelo matemático. O professor deve incentivar os alunos para que estes alterem os valores dos parâmetros e até mesmo mudem a animação a fim de responder às perguntas que foram postas no início desta seção.

Na **questão 1** o aluno logo perceberá que a trajetória da perseguição é bem diferente da trajetória estudada nos problemas de interceptação. Certamente esta curva não é a famosa parábola, tão comum no estudo de cinemática do ensino médio.

Na **questão 2** podemos nos orientar pelas seguintes questões:

- O que acontece quando $k > 1$?
- O que acontece quando $k < 1$?
- O que acontece quando $k > 1$?

k é a constante dada entre a razão das velocidades (Ver equações 3.1 e 3.11). É através da constante k que determinaremos as condições de encontro.

Na **questão 3** discutiremos as vantagens e desvantagens de perseguirmos o navio mercante ao invés de interceptá-lo. Esta é uma questão aberta e livre à discussão. Apresento ao uma vantagem e uma desvantagem. *Vantagem:* Ao usarmos a condição de perseguição apresentado na equação (3.1) o navio pirata seguirá o navio mercante para onde quer que o navio mercante se mova. Se tornarmos a perseguição um pouco mais realística, onde o navio mercante tenta fugir do navio pirata mudando sua rota, imediatamente o navio pirata também mudará sua rota. Segue como sugestão uma animação onde o navio mercante muda sua rota e **o navio pirata ainda segue o navio mercante.**

Modelo Matemático

$$k = 1.3$$

$$v_p = \begin{cases} 40, & p < 168 \\ 0, & p \geq 168 \end{cases}$$

$$v_q = \begin{cases} 0, & p < 168 \\ 30, & p \geq 168 \end{cases}$$

$$p = \begin{cases} 40 \times t, & p < 168 \\ 168, & p \geq 168 \end{cases}$$

$$q = \begin{cases} 200, & p < 168 \\ 200 + 30 \times (t - 4.2), & p \geq 168 \end{cases}$$

$$raiz = \frac{\sqrt{v_p^2 + v_q^2}}{\sqrt{(p-x)^2 + (q-y)^2}}$$

$$\frac{dx}{dt} = k \times (p-x) \times raiz$$

$$\frac{dy}{dt} = k \times (q-y) \times raiz$$

Figura 32: sugestão de animação de perseguição onde o navio mercante muda sua trajetória duas vezes e o navio pirata ainda continua a persegui-lo.

A única mudança que fizemos, das animações anteriores, foi a parametrização do movimento do navio mercante, representado na nossa animação pelas equações $p(t)$ e $q(t)$. Nas linhas 2, 3, 4 e 5 do modelo matemático acima estão as parametrizações das direções horizontal e vertical do navio mercante.

A animação acima é apenas uma sugestão. Fica ao encargo do professor e do aluno modificarem os valores acima apresentados. *Desvantagem:* O tempo que o navio pirata demora para encontrar o navio mercante é maior neste tipo de perseguição do que se simplesmente interceptássemos o navio mercante (utilizando a técnica do círculo de Apolônio). Estudar o tempo de encontro entre os navios é uma atividade interessante. Segue abaixo uma atividade onde podemos explorar o tempo de encontro dos navios.

Considere a seguinte situação: E se o navio pirata não fizesse uma perseguição pura nem interceptasse o navio mercante? Considere a figura abaixo como ilustrativa de outra possibilidade de perseguição:

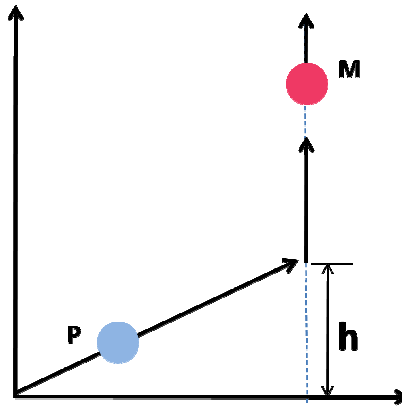


Figura 33: O navio mercante (M) segue uma trajetória retilínea na vertical e o navio pirata seguirá primeiro uma trajetória até uma altura h e depois seguirá uma trajetória vertical até alcançar o navio mercante.

A janela do modelo matemático desta nova animação segue abaixo:

```

Modelo Matemático
p = 200
h = 100
vp = 60
vm = 40
theta = arctan(h/p)
vpx = vp * cos(theta)
vpy = vp * sin(theta)
td = sqrt(p^2 + h^2) / vp
x = { 200, x >= 200
      vpx * t
      h + vp * (t - td), x >= 200
    }
y = { vpy * t
      vm * t
    }
xm = p

```

Figura 34: Novo modelo de perseguição.

No modelo acima repetimos as mesmas condições das animações anteriores. A relação (k) entre as velocidades do navio pirata (vp) e do navio mercante (vm) é 1.5 assim como a animação inicial apresentada na **figura 30**. As posições iniciais também são as mesmas. E o navio pirata segue as equações x e y e o navio mercante segue as equações ym e xm . Temos então a possibilidade de comparar o tempo de que o navio pirata leva para “capturar” o navio mercante.

A idéia é variar o valor de h e ver qual será o tempo de encontro. A constante h é a distancia que o navio pirata toca a trajetória do navio mercante. Para os valores dados acima, se h for 180, este será o h cujo o tempo de encontro será mínimo. Este é exatamente o tempo de encontro de interceptação tal como as animações que usam o círculo de Apolônio.

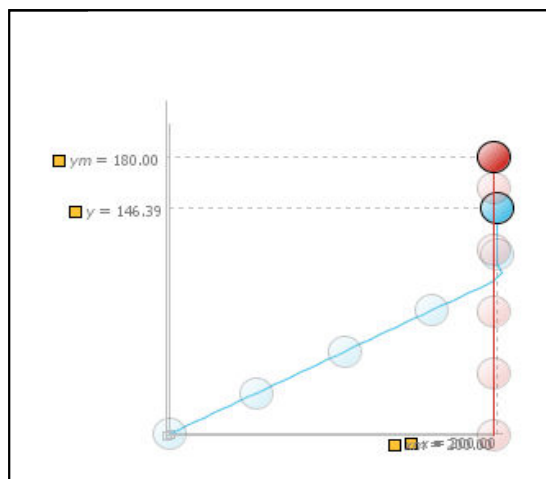


Figura 35: exemplo do modelo apresentado na figura 40. O navio pirata é representado pela partícula azul e o navio mercante pela partícula vermelha.

Para o caso de uma perseguição pura, o cálculo do tempo que leva a perseguição, chamado $t_{encontro}$, é dado pela expressão (3.3). O tempo de encontro entre os navios pode ser determinado, no caso do problema de interceptação, com manipulações algébricas simples. Vale a pena incentivar os alunos a comparar o tempo de encontro entre os três modos de perseguição apresentados nesta proposta.

2.4 – Proposta 4: O pato e o cachorro

Esta atividade propõe uma animação que mostra o caso em que o objeto perseguido m segue uma trajetória curvilínea ao invés da trajetória retilínea, mostrada na proposta anterior.

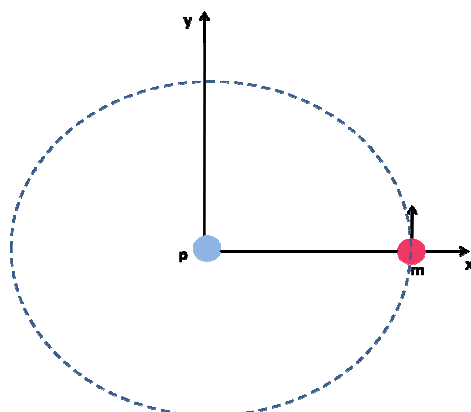


Figura 36: o objeto perseguido segue uma trajetória, conhecida, curvilínea. Qual será a curva de perseguição de p ?

A diferença agora são as equações paramétricas do objeto m (o perseguido). O modelo matemático permanece o mesmo do que foi apresentado na figura 30.

2.4.1 - Animando a proposta 4 no *Modellus*

As equações 3.7 e 3.7 continuam sendo soluções do problema proposto. Segue abaixo como ficará o modelo matemático escrito no *Modellus*:

```

Modelo Matemático
k = 1.5
vp = -200 * sin( t )
vq = 200 * cos( t )
p = 200 * cos( t )
q = 200 * sin( t )
raiz = sqrt( vp ^ 2 + vq ^ 2 )
raiz = sqrt( ( p - x ) ^ 2 + ( q - y ) ^ 2 )
dx/dt = k * ( p - x ) * raiz
dy/dt = k * ( q - y ) * raiz

```

Figura 37: modelo matemático da animação da curva de perseguição onde o perseguido segue uma trajetória curvilínea.

A trajetória do perseguido é dada pelas equações paramétricas p e q , nas linhas 4 e 5. Nas linhas 2 e 3 estão as respectivas equações da velocidade em função das equações p e q . Repare que as equações vp e vq são as derivadas das equações p e q . Segue abaixo a figura da nova perseguição:

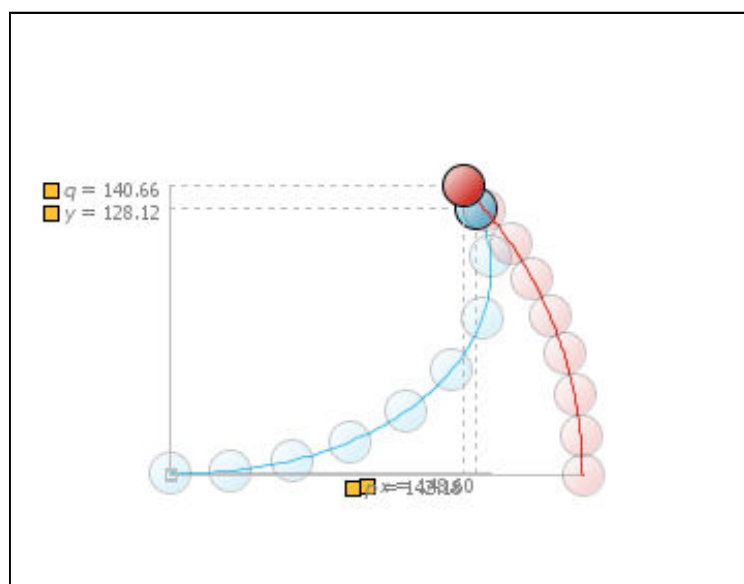


Figura 38: animação da perseguição onde o perseguido segue uma trajetória curvilínea.

2.4.2 Como apresentar a proposta 4 no ensino médio

Como pré-requisito desta atividade sugerimos que o aluno já tenha trabalhado com a atividade proposta 3 [seç 2.3].

Enunciaremos assim a perseguição ocorrida entre um cachorro e um pato:

Suponha um cão no centro de um lago circular de raio R e um pato na beira do lago. O pato foge do cão em movimento circular uniforme na margem do lago com velocidade constante em módulo. O problema será determinar a trajetória do cão que procura alcançar o pato.

Certamente este não será um problema trivial para os alunos do ensino médio. O interessante nesta proposta é a oportunidade que o professor terá de mostrar outras trajetórias de perseguição. É uma excelente oportunidade de o professor trabalhar com os alunos sobre a parametrização de trajetórias. O que acontecerá com a curva do pato caso alterássemos os parâmetros das equações p e q ? No modelo matemático mostrado acima o pato se movimenta numa trajetória circular num sentido anti-horário, como alteraríamos as equações a fim de que o pato se deslocasse sobre a mesma trajetória só que no sentido horário?

2.5 – Proposta 5: O cachorro e seu dono

Para a realização desta atividade deseja-se que os alunos estejam familiarizados com os conceitos de velocidade instantânea, decomposição de vetores e suas propriedades.

Consideremos uma variante do problema de perseguição descrito em [11]. É um caso de perseguição pura, onde o perseguido encontra-se parado. Um cachorro está numa das margens (ponto B da figura abaixo) e seu dono está no outro lado da margem (ponto A). As águas do rio correm com uma velocidade em módulo w . Se o cachorro tem uma velocidade em módulo igual a v e considerando que este sempre olha para seu dono, qual será a trajetória do cachorro ao atravessar o rio?

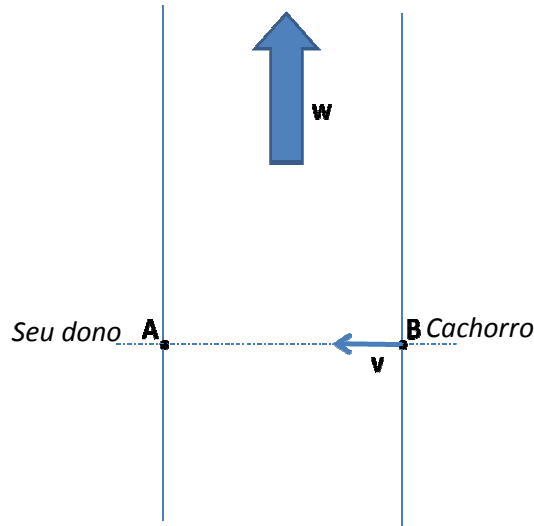


Figura 39: problema do cachorro e do seu dono.

Este problema é uma variante de um típico problema de perseguição. A diferença é que desta vez o objeto perseguido encontra-se parado, além, é claro, da interferência da correnteza. O vetor posição do cachorro em relação ao seu dono (ponto A) é dado por:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{u}_x + y(t)\mathbf{u}_y .$$

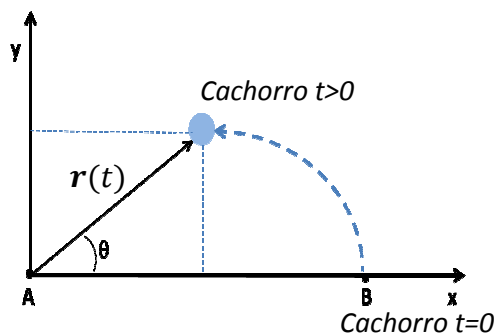


Figura 40: vetor posição do cachorro num instante qualquer.

Da equação 5.1 temos que o vetor velocidade do cachorro é dado por:

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{u}_x + \frac{dy}{dt}\mathbf{u}_y,$$

como o cachorro sempre se alinha com a direção do seu dono situado na posição A, ou seja, o cachorro sempre aponta no sentido oposto do vetor $\mathbf{r}(t)$, então:

$$\tan(\theta) = \frac{y}{x},$$

da equação 4.3 e da figura 39 temos que:

$$\frac{dx}{dt} = -v \cos(\theta) + w_x, \quad (5.4)$$

$$\frac{dy}{dt} = -v \sin(\theta) + w_y, \quad (5.5)$$

onde v é o módulo da velocidade do cachorro. Este módulo será considerado constante. O que mudará será o vetor velocidade. As constantes w_x e w_y são as componentes horizontal e vertical da velocidade da correnteza. Na figura 39 representamos apenas que a correnteza segue a direção y , porém nas equações acima consideramos um caso geral, onde a correnteza pode ter tanto componente horizontal quanto vertical. Se dividíssemos a equação 5.5 pela equação 5.4 eliminaríamos explicitamente a contribuição do tempo e obteríamos dy/dx . Com mais algumas manipulações matemáticas chegaríamos então na função $y(x)$. O que buscamos é algo mais simples. Desejamos ver a cinemática do sistema, ou seja, desejamos ver como o movimento do cachorro evolui com o tempo. Desejamos conhecer $r(t)$. Inserindo diretamente no *Modellus* as equações 5.4 e 5.5 obteremos diretamente as funções temporais $x(t)$ e $y(t)$.

2.5.1 Animando a proposta 5 no *Modellus*

Segue abaixo a figura mostrando a janela do modelo matemático desta animação.

```

Modelo Matemático
theta = arctan(y/x)
v = 100
dx/dt = -v * cos(theta) + wx
dy/dt = wy - v * sin(theta)
xu = -x / sqrt(x^2 + y^2)
yu = -y / sqrt(x^2 + y^2)
w = sqrt(wx^2 + wy^2)

```

Figura 41: modelo matemático da trajetória de um cachorro em direção ao seu dono.

Na linha 1 usamos a equação 5.3 para expressarmos o valor de θ .

Na linha 2 determinamos o valor de 100 unidades para o módulo da velocidade do cachorro. Este valor pode e deve ser alterado pelo usuário.

Nas linhas 3 e 4 escrevemos as equações 5.4 e 5.5. Lembrando que ao usarmos uma equação diferencial no *Modellus* temos que dar valores para as condições iniciais $x(0)$ e $y(0)$. Os valores são dados na aba “condições iniciais” na parte de cima da barra de ferramentas. Daremos $x(0) = 500$ e $y(0) = 0$. Não há nenhuma razão especial para o valor 500 em $x(0)$. A única condição que satisfizemos em $y(0) = 0$ é que o cachorro começara sua trajetória diretamente a frente do seu dono.

Nas linhas 5 e 6 escrevemos xu e yu como sendo as componentes do vetor unitário $p(t)$. O sinal negativo significa que o vetor unitário estará apontando para a origem, posição em que se encontra o dono do cachorro (posição A).

Na linha 7, calculamos o módulo da velocidade (w) do vento. Os valores de w_x e w_y serão dados de maneira interativa, usando-se um vetor, diretamente na janela de animação.

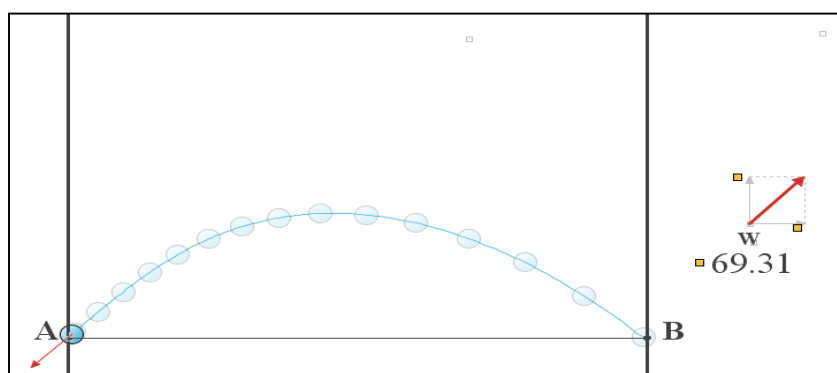


Figura 42: animação do movimento do cachorro nadando em direção ao seu dono

Na figura acima vemos a partícula, representando o cachorro, fazendo uma trajetória de B para A. No lado direito da figura está um vetor representando a velocidade do vento. Este vetor é interativo. A medida que alteramos a direção e o sentido deste vetor os valores de w_x e w_y (linhas 3 e 4 da figura 41) serão computados pelo nosso modelo matemático. O vetor que está na partícula, é o vetor unitário de componentes xu e yu .

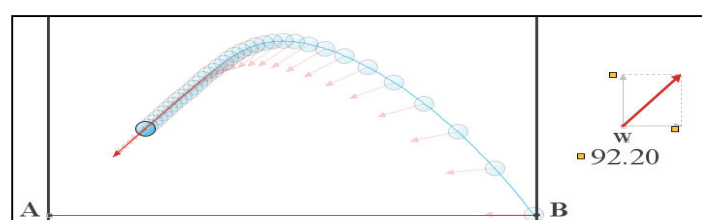


Figura 43: detalhe da trajetória do cachorro

Observe que o vetor unitário, que acompanha a partícula, sempre aponta para a posição A.

2.5.2 Como apresentar a proposta 5 no ensino médio

Antes do uso do *Modellus* sugerimos que o problema da travessia do rio seja tratado com o uso de uma animação interativa feita em *Flash*:

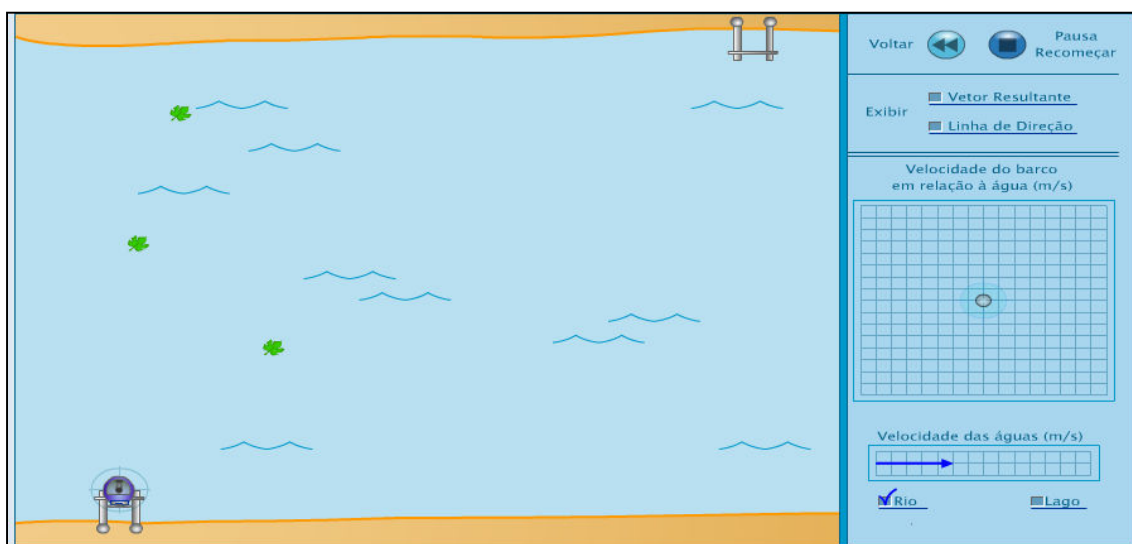


Figura 44: animação interativa da travessia de um rio usando um barco.

Esta simulação foi encontrada em [12]:

A seguinte atividade pode ser conduzida:

- 1) Acesse a simulação “A travessia do rio”. O acesso pode ser feito via web ou se o professor preferir pode-se fazer o download da simulação no seguinte endereço: http://omnis.if.ufrj.br/~pef/producao_academica/dissertacoes/
- 2) Teste atravessar o rio fazendo o barco ir de um cais ao outro (situado na outra margem do rio)
- 3) Faça a travessia mais algumas vezes só que desta vez com a funções “Vetor Resultante” e “Linha de direção” marcadas. Quando estas funções são exibidas ficar mais fácil fazer a travessia do rio.
- 4) Se escolhermos a travessia de um lago (marcar opção logo abaixo a direita) o barco atravessará um lago sem a influência da correnteza.

Na atividade sugerida acima, o aluno logo perceberá que será mais fácil fazer a travessia se o vetor resultante entre a velocidade do rio e a velocidade do barco apontar para o destino desejado.

- 5) Faça o barco atravessar o rio de tal maneira que o barco atinja a outra margem num ponto diretamente a frente do cais de partida. Veja o detalhe da figura:

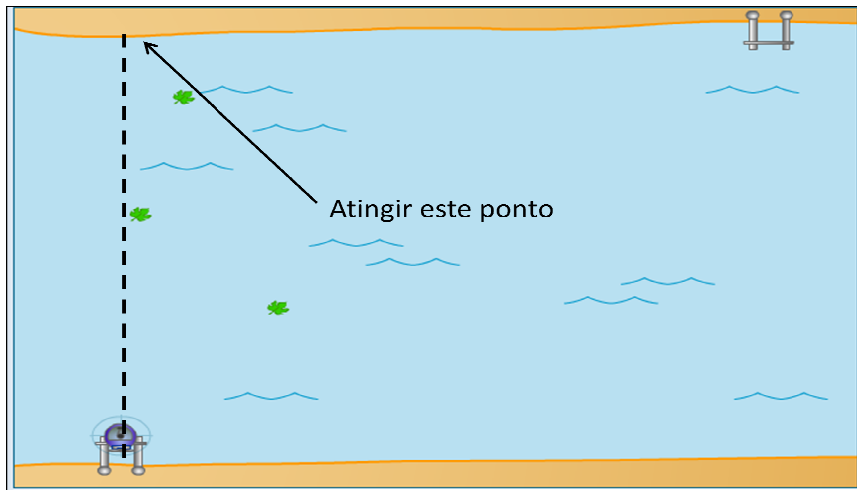


Figura 45: atravessando o rio numa posição oposta ao ponto de partida

A razão desta proposta é checar se o aluno entendeu que para atingir o ponto desejado, é só fazer com que o vetor resultante entre as velocidades aponte para o ponto desejado.

- 6) A nova questão é a seguinte: você percebeu que para o barco atingir o ponto sugerido foi necessário fazer com que o barco apontasse para uma direção diferente do ponto onde queríamos chegar. Ou seja, o vetor velocidade, que indica para onde o barco está apontando não está direcionado para o ponto onde desejamos. Se estivéssemos neste barco estaríamos olhando para um ponto e pararíamos em outro.

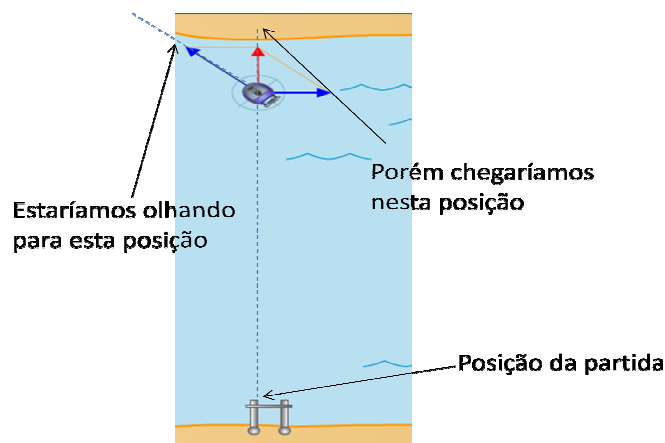


Figura 46: detalhe da travessia do rio

E como ficaria a travessia se decidíssemos sempre olhar na direção do ponto de chegada? Ou seja, como ficaria a travessia do rio se o vetor velocidade do barco sempre apontasse para o ponto onde desejamos parar?

- 7) Considerando tais questões, faça o barco atravessar o rio de tal forma que o vetor velocidade do barco sempre aponte para o ponto onde se deseja atingir. Quais serão as novas dificuldades? Como será a trajetória do barco? Certamente não será uma linha reta!

Para a resolução de tais questionamentos se faz necessário estudarmos esta animação um pouco mais de perto. Para tal sugere-se que os alunos transcrevam o modelo matemático apresentado na figura 30. É necessário que o professor explique a função de cada linha deste modelo matemático.

Ao se realizar a animação no *Modellus*, o aluno logo verá o formato da trajetória da partícula. Seria interessante chamar a atenção quanto ao fato de que este problema se tornou um problema de perseguição (onde o perseguido está parado). Qual foi a condição que tornou a animação em um problema de perseguição? Esta certamente é uma excelente oportunidade de discussão. O que torna esta animação num problema de perseguição é o fato de que o vetor velocidade do barco sempre aponta para o “objeto perseguido” que é o ponto onde se deseja chegar. Como esta condição esta sendo representada no nosso modelo matemático? É a equação 5.3 que garante a condição de que o perseguidor apontará sempre para o ponto perseguido.

- 8) Sugere-se então que o aluno explore a animação feita no *Modellus*.
 - 8.1) Varie os valores de velocidade da correnteza (vetor w) e verifique quais são os valores em que a partícula atingirá o ponto A (ponto situado do outro lado da margem do rio)? Experimente diferentes valores de w . Comece fazendo com que o vetor w só tenha a componente y (tal como a animação em *Flash* da travessia do rio sugerida no início da atividade).
 - 8.2) O que acontece no movimento da partícula se o módulo da velocidade da correnteza for igual ao módulo da velocidade da partícula ($w = v$)?
 - 8.3) E se o valor de $w \ll v$, o que acontece com a trajetória da partícula ? (e se o valor de w for muito menor que v)
 - 8.4) E se o vetor w só tiver a componente da velocidade na direção x ?

Referências

- [1] R. Lopes de Oliveira Júnior: *Problemas e curvas de perseguição no Ensino Médio: usando o Modellus como ferramenta interativa*. Tese de mestrado, Mestrado Profissional em Ensino de Física, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- [2] http://www.iplay.com.br/Jogos/Atari/2600/016o/City_Defender_Hack, acessado em 20 de junho de 2011.
- [3] http://www.iplay.com.br/Jogos/Online/0V-Y/Madness_Combat_Defense, acessado em 20 de junho de 2011.
- [4] V. D. Teodoro. *Modellus: Learning Physics With Mathematical Modelling*. Faculdade de Ciências e Tecnologia. Universidade Nova de Lisboa. 2002. Tese de Doutorado.
- [5] I. S. Araujo, E. A. Veit e M. A. Moreira. *Atividades de modelagem computacional no auxílio à interpretação de gráficos da Cinemática*. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 26, n. 2, p. 179 - 184, (2004).
- [6] G. H. Santos e L. Alves. *Modellus: Animações Interativas Mediando a Aprendizagem Significativa dos Conceitos de Física no Ensino Médio*. Sitientibus Série Ciências Físicas 02: 56-67 (2006).
- [7] I. S. Araujo, E. A. Veit e M. A. Moreira. *Atividades de modelagem computacional no auxílio à interpretação de gráficos da Cinemática*. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 26, n. 2, p. 179 - 184, (2004).
- [8] R. B. Oliveira e M. P. Linhares. *Uso do Software Modellus como Motivador e Facilitador de Aprendizagem em Física*. X V I Simpósio Nacional de Ensino de Física.
- [9] R. L. O. Júnior e A. C. Tort. *O porta-aviões, o torpedo e o círculo de Apolônio*, Física na Escola (a ser publicado).
- [10] L. A. Guimarães e M. Fonte Boa. *Física: Mecânica*. Galera Hipermídia, 2006

[11] P. J. Nahin. *Chases and scapes: The mathematics of pursuit and evasion*. Princeton University Press, 2007.

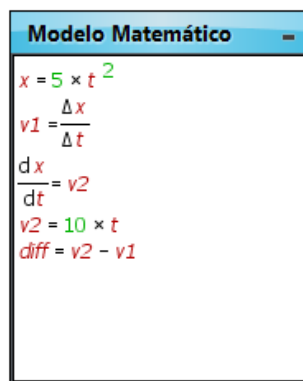
[12]http://omnis.if.ufrj.br/~pef/producao_academica/dissertacoes/2010_Geraldo_Felipe/CD-ImagemPagina/barquinnho.swf, acessado em 30 de setembro de 2011.

Apêndice

Velocidade instantânea no *Modellus*

Esta atividade sugere ao professor de ensino médio uma forma de mostrar ao aluno do ensino médio o conceito de velocidade instantânea. O objetivo da atividade proposta é mostrar que a função $\frac{d}{dt}$ representa uma taxa de variação infinitesimal. A velocidade instantânea num ponto P é aproximadamente igual à razão $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ quando Δt é bem pequeno. Neste caso, escreveremos que a velocidade instantânea no ponto P é dada por $\frac{dx}{dt}$. O professor do ensino médio poderá conduzir os alunos de acordo com o roteiro abaixo:

- 1) Considere o seguinte modelo matemático, representado na figura 1



The image shows a screenshot of a software window titled "Modelo Matemático". The window contains the following mathematical expressions:

$$x = 5 \times t^2$$
$$v1 = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$
$$\frac{dx}{dt} = v2$$
$$v2 = 10 \times t$$
$$diff = v2 - v1$$

Figura 1: modelo matemático da atividade sugerida

Na linha 1 escrevemos a função $x(t)$ representativa do movimento retilíneo de um objeto. Na linha 2 definimos uma variável $v1$. É a velocidade média do móvel num intervalo de tempo Δt . Na linha 3 definimos uma função $v2$. O objetivo da atividade é verificar qual é a representação desta variável. Na linha 4 escrevemos que a variável $v2$ é dada por $10t$. Na linha 5 definimos uma variável $diff$. Esta variável é a diferença entre os valores de $v2$ e $v1$.

2) A partir do modelo matemático descrito acima construímos os gráficos a seguir:

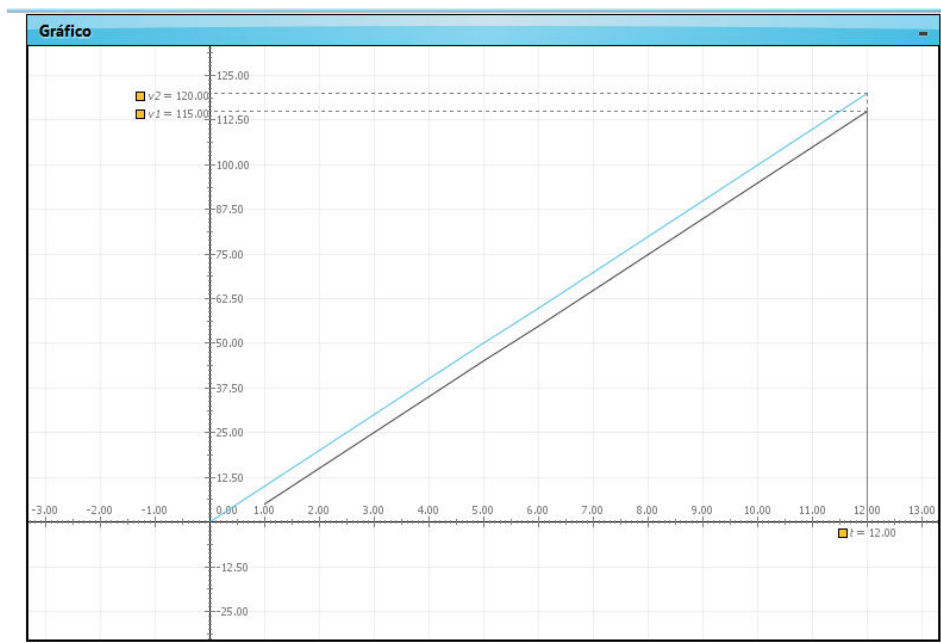


Figura 2: gráfico $v \times t$ da função $x(t)$

Este é um gráfico $v1 \times t$ e $v2 \times t$. São gráficos representativos da velocidade em função do tempo.

3) $v1$ é a velocidade média da móvel num intervalo de tempo Δt . Este intervalo de tempo pode ser alterado no *Modellus*.

Na aba “variável independente”, localize “Passo (Δt):” O Δt *default* é 0.100 s. Podemos alterar o Δt como quisermos. O gráfico mostrado acima (figura 2) foi feito para $\Delta t = 1.00$. Veja a figura 3 abaixo onde mostramos a tela completa da animação. A medida que o tempo vai passando as velocidades vão mudando, porém se dermos um *pause*, observaremos que a diferença entre os valores de $v2$ e $v1$ é igual a 5.00.

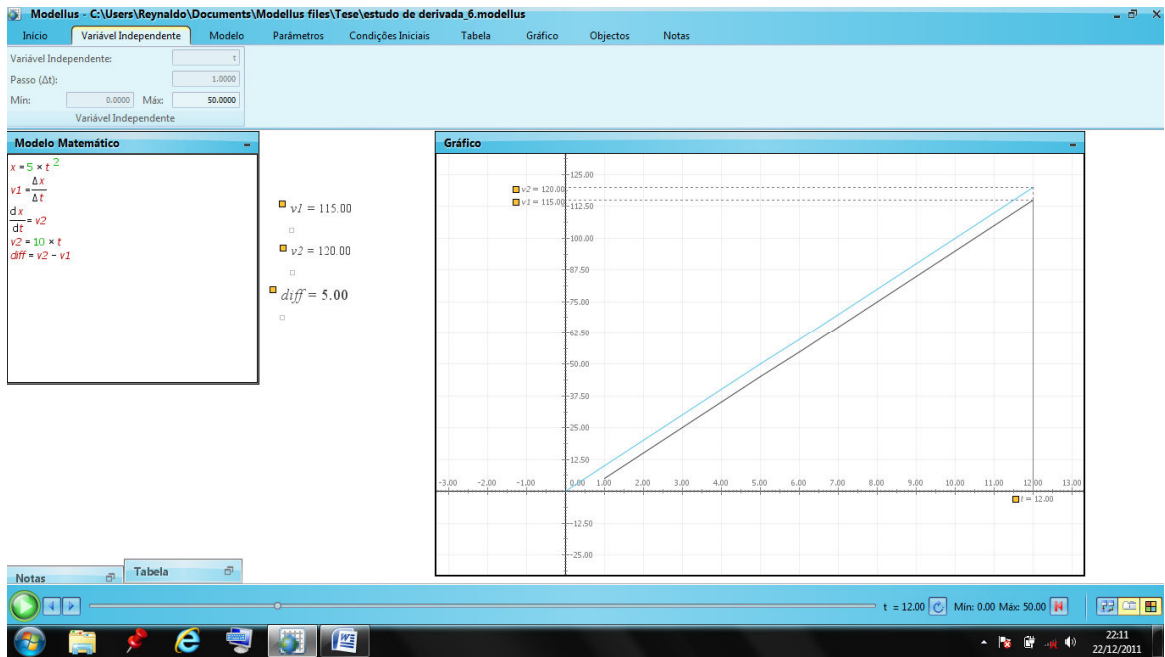


Figura 3: tela da animação onde $\Delta t = 1.0$ s. O gráfico está mostrado em detalhes na figura 2.

4) Altere o valor de Δt para 0.500 e observe o gráfico. Observe que a diferença entre os valores de $v1$ e $v2$ ficou menor.

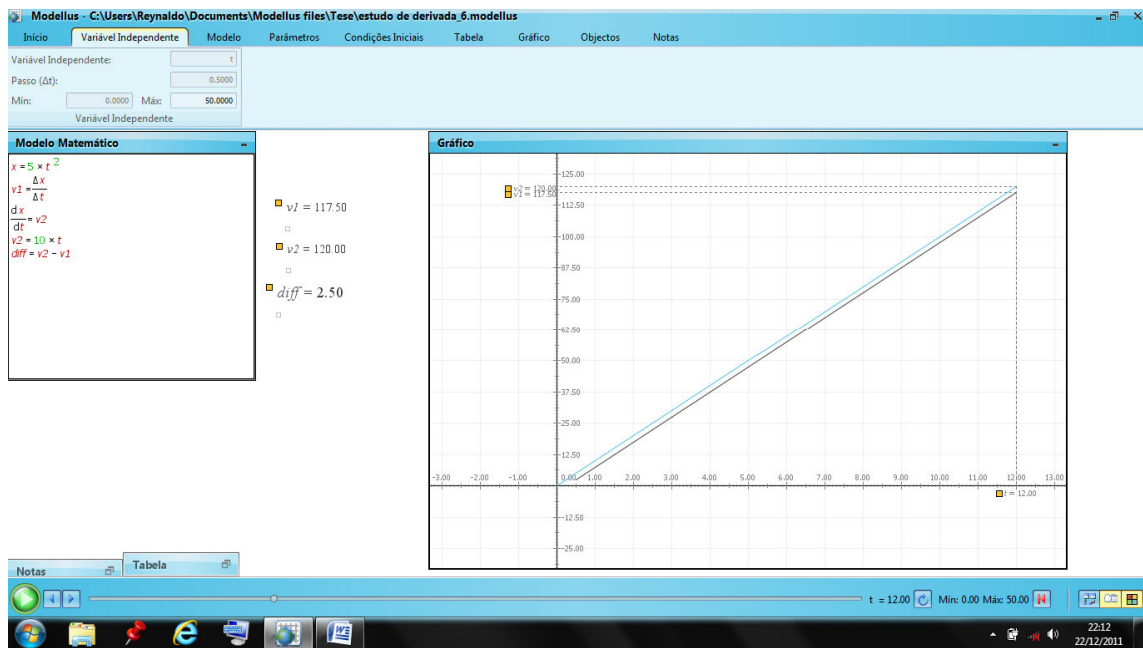


Figura 4: gráfico $v \times t$ com $\Delta t = 0.5$ s

5) Se alterarmos o valor de Δt para 0.01, observaremos que quase não há diferença entre os valores de $v1$ e $v2$, observe a figura 5.

Assim mostramos que a variável v_2 se aproxima de v_1 quando Δt se aproxima de um valor bem pequeno. v_2 é a velocidade instantânea do móvel e é dada por $v_2 = 10t$. Que é a equação horária da velocidade do móvel ($v = v_0 + at$). Retirando os dados da função $x = 5t^2$, temos que a velocidade em um instante t é dada por $v = 10t$.

Na atividade acima mostramos que a velocidade instantânea do móvel é uma aproximação infinitesimal. Quanto menor o Δt mais próximo da velocidade instantânea chegaremos. Na verdade, o professor pode observar que a função $\frac{dx}{dt}$ é a derivada da função $x(t)$. E como bem sabe, a derivada da posição em função do tempo será a velocidade instantânea do móvel.

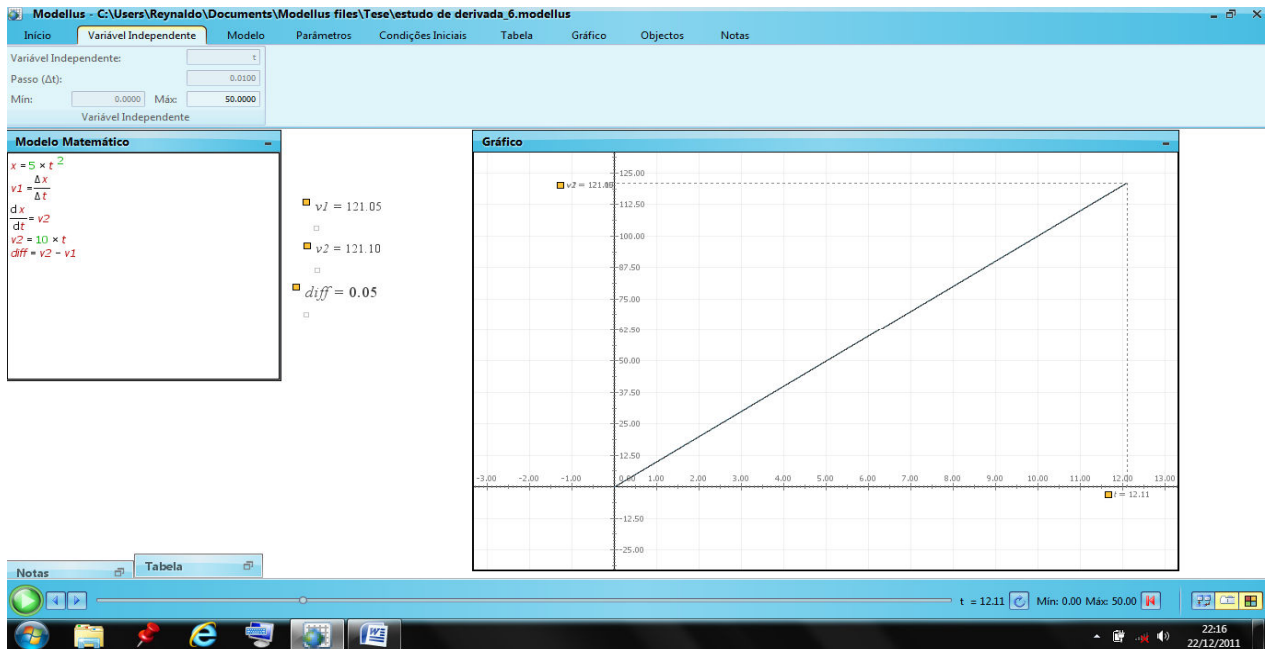


Figura 5: gráfico $v \times t$ com $\Delta t = 0.01$ s