



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Física
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física
Mestrado Profissional em Ensino de Física

**O experimento de Ptolomeu: uma introdução
ao estudo da refração luminosa**
(Guia de orientação para o professor)

Marcos Paulo da Cunha Martinho

Material instrucional associado à dissertação de mestrado de Marcos paulo da Cunha Martinho, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física da Universidade Federal do rio de Janeiro.

Orientador: Vitorvani Soares

Rio de Janeiro
Setembro de 2013

Ficha catalográfica

M735e Martinho, Marcos Paulo da Cunha

O experimento de Ptolomeu: uma introdução ao estudo da refração luminosa (Guia de orientação para o professor) / Marcos Paulo da Cunha Martinho. – Rio de Janeiro: UFRJ/IF, 2013.

viii, 39 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Vitorvani Soares.

Dissertação (mestrado) – UFRJ / Instituto de Física / Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, 2013.

Referências Bibliográficas: f. 36-39.

1. Ensino de Física. 2. Óptica. 3. Refração. I. Soares, Vitorvani. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Física, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física. III. O experimento de Ptolomeu: uma introdução ao estudo da refração luminosa (Guia de orientação para o professor).

*Dedico este trabalho à minha família,
fonte de inspiração constante.*

Agradecimentos

Ao meu filho Gabriel, pela compreensão nos dias que não pudemos brincar. À minha esposa Fernanda pelos compromissos desmarcados por conta do cumprimento de minhas obrigações acadêmicas. À minha mãe Cléia e minha avó Eurides por terem alimentado meus sonhos desde pequeno. À professora Susana de Souza Barros (in memoriam), a quem devo parte de minha formação como professor. E um especial agradecimento ao meu orientador Vitorvani Soares por sua plena dedicação e contribuição na execução desse projeto, assim como, pelos ótimos dias que passamos onde pude aprender muito sobre Física.

This [, then,] is one of the important steps in the development of physical law: first we observe an effect, then we measure it and list it in a table; then we try to find the rule by which one thing can be connected with another.

— RICHARD P. FEYNMAN, *The Feynman Lectures on Physics*, Addison–Wesley, 1964, vol. 1, p. 26-2.

Sumário

1	Introdução	1
2	Uma investigação da refração	3
2.1	A refração em perspectiva	3
2.2	O baptistir	9
2.3	A refração para o dioptro ar-acrílico	11
2.4	A refração para o dioptro ar-água	20
2.5	A refração para o dioptro acrílico-água	25
2.6	As características dos dioptros	28
2.7	A fórmula de Bhaskara	29
2.8	A lei da refração atual	33
	Referências	39

Lista de ilustrações

Figura 1	Material para a primeira atividade.	4
Figura 2	Localização da imagem.	5
Figura 3	Posição da imagem na primeira atividade.	7
Figura 4	Formação de imagens da primeira atividade.	8
Figura 5	Vista de frente e lateral do nosso baptistir.	10
Figura 6	Representação esquemática do nosso baptistir.	11
Figura 7	Baptistir e o dioptro ar-acrílico.	12
Figura 8	Medidas angulares para o dioptro ar-acrílico.	13
Figura 9	Diferença entre as medidas angulares para o dioptro ar-acrílico.	14
Figura 10	Razão entre as medidas angulares para o dioptro ar-acrílico.	15
Figura 11	Medidas angulares para o dioptro ar-acrílico.	16
Figura 12	Baptistir e o dioptro ar-acrílico.	17
Figura 13	Medidas para o dioptro acrílico-ar.	18
Figura 14	Razão entre as medidas angulares para o dioptro ar-acrílico.	19
Figura 15	Medidas angulares para o dioptro ar-acrílico	20
Figura 16	Baptistir e o dioptro ar-água.	21
Figura 17	Medidas angulares para o dioptro ar-água.	22
Figura 18	Razão entre as medidas angulares para o dioptro ar-água	23
Figura 19	Medidas angulares para o dioptro ar-água.	24
Figura 20	Medidas angulares para o dioptro acrílico-ar.	26
Figura 21	Razão entre as medidas angulares para o dioptro acrílico-água.	27
Figura 22	Medidas angulares para o dioptro acrílico-ar.	28
Figura 23	Círculo geométrico.	30
Figura 24	Seno e a fórmula de Bhaskara.	32
Figura 25	Formação das imagens na primeira atividade.	33
Figura 26	Lei dos senos para o dioptro ar-acrílico e ar-água.	35
Figura 27	Lei dos senos para o dioptro acrílico-ar e água-ar.	37

Lista de tabelas

Tabela 1	Medidas angulares para o dioptro ar-acrílico.	12
Tabela 2	Medidas angulares para o dioptro acrílico-ar.	17
Tabela 3	Medidas angulares para o dioptro ar-água	22
Tabela 4	Medidas angulares para o dioptro acrílico-água.	25
Tabela 5	Coefficientes para os dioptros ar-água e ar-acrílico.	29
Tabela 6	Seno e a fórmula de Bhaskara.	31
Tabela 7	Lei dos senos para o dioptro ar-acrílico e ar-água.	34
Tabela 8	Lei dos senos para o dioptro acrílico-ar e água-ar.	36

1 Introdução

Apresentamos neste trabalho uma introdução ao conceito de refração luminosa para uso no Ensino Médio e em disciplinas do âmbito profissional das licenciaturas em Física. Nossos principais objetivos nesta dissertação são a descrição e a compreensão do fenômeno físico em questão, conforme primeiramente analisado por Ptolomeu, no século II da nossa era. A partir da formação de imagens de um objeto, empregando-se vários dioptros tais como ar-água, ar-vidro, ar-acrílico, vidro-água e acrílico-água, combinada com a análise dos dados obtidos para diferentes posições imagem-objeto, determinamos, de forma fenomenológica, a lei de Ptolomeu e, em seguida, a lei de Kepler e a lei de Snel-Descartes para a refração, estabelecidas no século XVII. Desta forma, estabelecemos a lei da refração tradicionalmente apresentada nos livros didáticos a partir da análise gráfica e algébrica das observações experimentais. Esperamos que o estudo aqui apresentado contribua para a discussão da formação de imagens com o auxílio de lentes e para a instrumentação dos futuros professores da educação secundária e dos primeiros anos dos cursos universitários.

Este guia de orientações está dividido em três partes:

1. Análise qualitativa da refração, onde se constata que meios transparentes modificam a posição dos objetos para um certo observador, seguida de uma análise quantitativa de natureza geométrica para a posição de vários objetos através de uma lente plano convexa. Nesta primeira etapa o objetivo é que o estudante perceba que há um desvio angular entre a posição real do objeto e a imagem observada através da lente. Outro aspecto importante do experimento é a possibilidade de localizar a imagem dentro da lente. É uma tarefa que exige muita concentração porque o cilindro usado para localizar a imagem deve ter suas geratrizes coincidentes com as geratrizes da imagem vista através da face frontal.
2. A partir dessa situação geométrica configurada, partimos para o segundo momento da atividade: a determinação de uma lei empírica entre os ângulos. Para isso usaremos o Baptistir (goniômetro usado por Ptolomeu) e, para a investigação dessa relação matemática, adotaremos os procedimentos também empregados por Ptolomeu. Com o propósito de compreender como a refração se dá nesse diferentes dioptros, investigaremos três deles: ar-água, ar-acrílico e acrílico-água. Em cada uma das situações experimentais é feito um levantamento de dados das diferentes posições angulares do objeto e da sua imagem para, em seguida, analisá-los de forma gráfica. A partir dessa representação gráfica estabelecemos uma expressão algébrica entre os ângulos considerados. Essa relação encontrada entre os ângulos é de forma quadrática e é conhecida como a lei de Ptolomeu para a refração.

3. O terceiro e último momento da atividade é buscar uma relação que descreva de forma mais precisa o conjunto de dados obtidos. Uma das possibilidades é trabalhar com as funções trigonométricas, em especial a função seno. O ajuste linear é muito bom para o conjunto de dados angulares obtidos no experimento. A partir da linearização obtida é possível escrever a lei dos senos, conhecida como lei de Snell-Descartes para a refração.

Apresentamos a seguir, de forma mais detalhada, a metodologia a ser empregada no desenvolvimento dessa prática experimental.

2 Uma investigação da refração

A Óptica geométrica, através de seus princípios, nos permite estudar o processo de formação de imagens em diversas situações. Como chamamos a atenção nos capítulos precedentes, este processo é objeto de preocupação desde a Grécia Antiga e, neste capítulo apresentamos uma investigação sobre a formação de imagens devido a refração luminosa baseada em um conjunto de atividades que denominamos *o experimento de Ptolomeu*.

Em geral, os primeiros passos dos alunos do Ensino Médio nesta unidade de estudo são a formação de imagens com o auxílio da câmara escura ou pela projeção das sombras e, em seguida, a formação de imagens por reflexão, produzidas por espelhos planos e esféricos. Neste último caso, os alunos então percebem a simetria das imagens formadas em relação ao objeto refletido.

Deste modo, ao abordar as atividades apresentadas neste capítulo, esperamos que o estudante já possua alguns conceitos básicos tais como: (1) o raio visual, o segmento de reta que une o olho do observador ao objeto observado; e (2) a propriedade de reflexão, fenômeno associado a deflexão do raio visual por um espelho, um objeto não transparente ou, nas palavras de Ptolomeu, aquele objeto que não permite que o raio visual o atravesse.

Assim, para completar o estudo da formação de imagens em diferentes situações, ao final das atividades sugeridas nesse capítulo estabelecemos as condições geométricas em que um determinado objeto produz uma imagem correspondente, quando este mesmo objeto é observado através de um sistema óptico particular, o dioptro, um sistema constituído pela combinação de dois *meios transparentes* em contato.

Para realizar as atividades aqui propostas, consideramos que além do estudo das condições de formação de imagens por espelhos, o estudante também possui familiaridade com construções geométricas e noções matemáticas adequadas ao seu estágio de aprendizagem.

2.1 A refração em perspectiva

No estudo da formação da imagem de um objeto vista por um observador através de um determinado sistema óptico devemos levar em consideração o fenômeno da refração luminosa. A experiência da moeda oculta no fundo de recipiente e que se torna visível com a colocação de certa quantidade de água dentro dele, como descrito por Ptolomeu (COHEN; DRABKIN, 1958, p. 273), é um bom exemplo de formação da imagem devido à presença de um dioptro. Apresentamos a seguir uma variação quantitativa dessa experiência.

A descrição geométrica da posição da imagem de um objeto quando este é observado através de um meio transparente pode ser compreendida inicialmente com a ajuda de cinco cilindros feito de acrílico que possuem um diâmetro $\phi_d = 2.00(5)$ cm e uma altura

$h = 2.00(5)$ cm e cinco pequenos discos não transparentes, de diâmetro igual ao diâmetro dos cilindros. Também temos à nossa disposição um disco semicilíndrico feito também em acrílico e que possui um diâmetro $\phi_D = 56.00(5)$ cm e uma altura $h = 2.00(5)$ cm igual à altura dos pequenos cilindros, como ilustrado na figura 1.

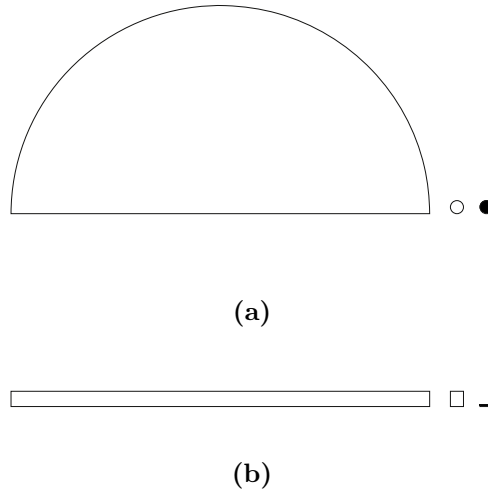


Figura 1. – Material para a primeira atividade. (a) Vista superior e (b) vista de frente do disco semicilíndrico feito em acrílico, de diâmetro $\phi_D = 56.00(5)$ cm e uma altura $h = 2.00(5)$ cm igual à altura do pequeno cilindro de diâmetro $\phi_d = 2.00(5)$ cm e do pequeno disco preto também de mesmo diâmetro que o cilindro. Um esquadro e uma régua milimetrada também devem ser incluídos no material.

O disco semicilíndrico é colocado sobre um plano horizontal e, com uma régua milimetrada, localizamos o ponto médio E que indica o centro da interface reta do nosso sistema óptico, o dioptra ar-acrílico. Para indicar esse ponto E , colocamos um dos pequenos cilindros de acrílico nesta posição, como indicado na figura 2a.

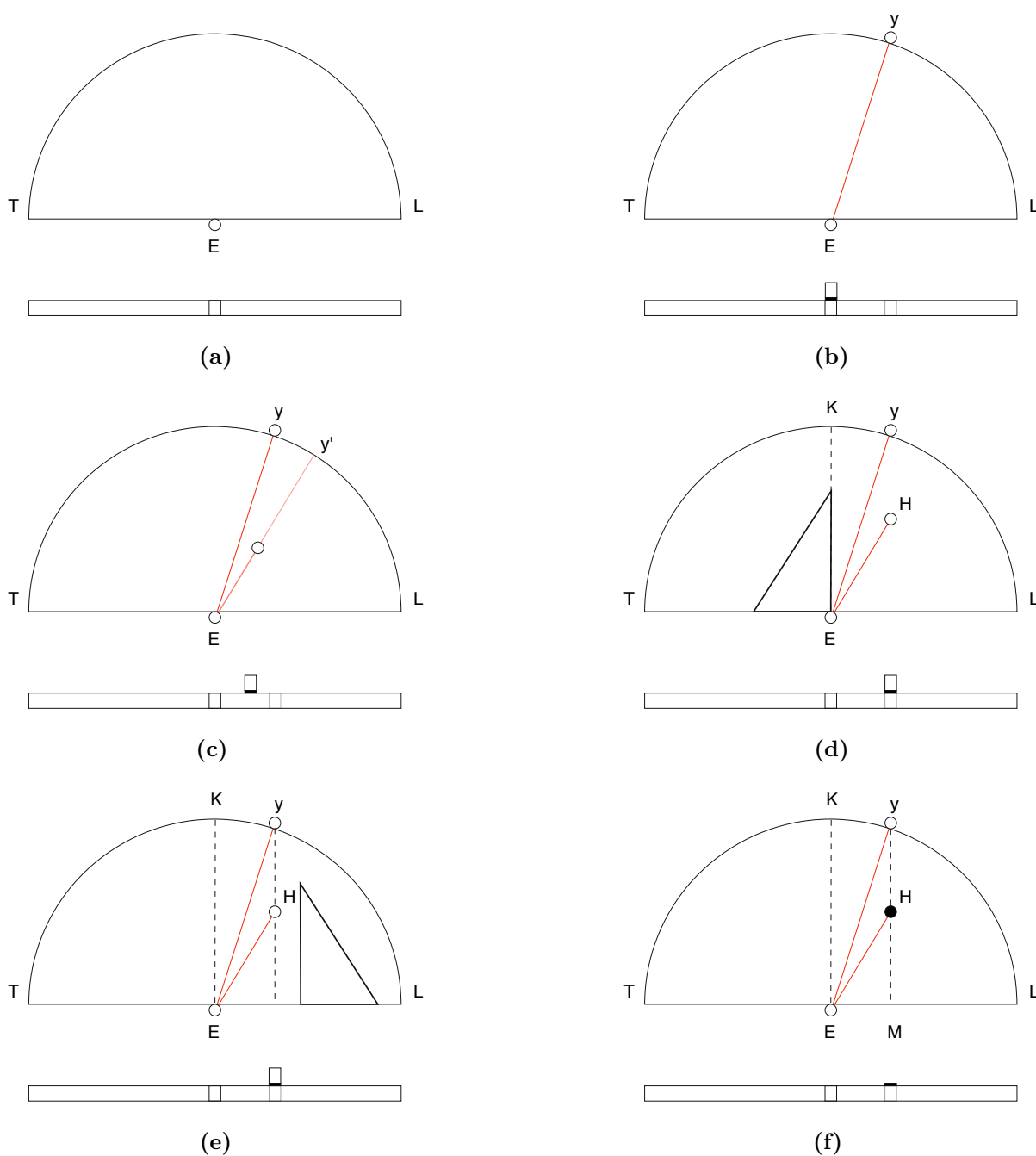


Figura 2. – Vista superior e de frente da representação do material da primeira atividade: o semidisco em acrílico que representa o dioptro ar-acrílico, os pequenos cilindros, também em acrílico, e o pequeno disco que servem como objeto e guia de localização, respectivamente. (a) Localização do ponto de referência E no ponto médio da face reta do semidisco. (b) A posição y do objeto em relação a E , em uma posição sobre uma reta tangente à borda do semidisco. (c) Deslizamento do cilindro sobre a reta Ey' , sobre a superfície do semidisco, para a determinação da posição H da imagem. (d) Orientações do objeto e da imagem, dadas por Ey e EH , respectivamente, em relação à normal à face plana do semidisco. (e) Alinhamento entre as posições do objeto e da imagem sobre o segmento de reta yM , perpendicular a face reta do semidisco. (f) Posição final H indicada sobre o semidisco pelo pequeno disco preto.

O objetivo da atividade é localizar um objeto, um dos pequenos cilindros, em uma posição y , pertencente a uma reta tangente à face curva do disco, e observar através do semidisco, a partir do ponto E , que a imagem desse objeto é formada no interior do dioptra em uma certa posição H , com o auxílio de um objeto guia e o pequeno disco acoplado a ele, como ilustrado nas figuras 1b e 2c. Nessas figuras, o segmento de reta Ey , em vermelho, representa o raio visual do objeto e o segmento de reta Ey' , também em vermelho, representa o raio visual da imagem do objeto.

Observamos que o processo de localizar a imagem exige não somente o deslizamento do conjunto objeto guia e o pequeno disco sobre a superfície do semidisco transparente mas, também, a comparação da largura do objeto guia com a largura da imagem observada em cada posição ao longo da direção de observação, o segmento Ey' . Este processo permite definir univocamente o ponto H sobre o semidisco como a posição correspondente da imagem do objeto, percebida através do dioptra pelo observador em E , como indicado na figura 2c.

Ao realizar essa experiência, duas observações são imediatas e surpreendentes. O ângulo de orientação da posição da imagem não é igual ao ângulo de orientação da posição do objeto em relação à perpendicular à face reta do semidisco, como indicado nas figura 2d. A segunda observação é que a posição H também pertence à mesma reta perpendicular à face plana do semidisco que se origina na posição real y do objeto e vai até um ponto M sobre esta mesma face do semidisco, conforme ilustrado nas figuras 2e e 2f.

Em seguida, distribuímos aleatoriamente outros cilindros similares ao longo da face curva e localizamos geometricamente as respectivas imagens desses objetos vistas pelo mesmo observador através do mesmo disco semicilíndrico transparente, como ilustrado na figura 3.

Da figura 3 podemos observar que: (1) todas as posições das imagens dos seus respectivos objetos apresentam uma posição angular em relação a normal à interface ar-acrílico maior do que a posição angular do objeto ao ser observado com o observador no meio menos denso. Dizemos então que o dioptra ar-acrílico apresenta a propriedade de refração: o encurvamento do raio visual; (2) todas as posições das imagens dos seus respectivos objetos se localizam sobre uma reta perpendicular à interface ar-acrílico que vai da posição original do objeto até esta interface; (3) todas as posições das imagens dos seus respectivos objetos se localizam sobre um arco de curva particular; (4) existe uma posição particular, K , definida pelo segmento de reta perpendicular à interface que passa pelo seu ponto médio E onde a imagem do objeto não sofre nenhum desvio; e (5) existe uma posição limite, w , para a observação da imagem objeto. Quando ele for colocado além desse limite, não haverá condições de observação da imagem correspondente.

A partir dessas observações podemos formular a seguinte questão: Conhecida a posição angular da imagem de um objeto, podemos determinar a sua posição real?

Nos dias de hoje, um observador treinado em trigonometria pode perceber da figura 4a

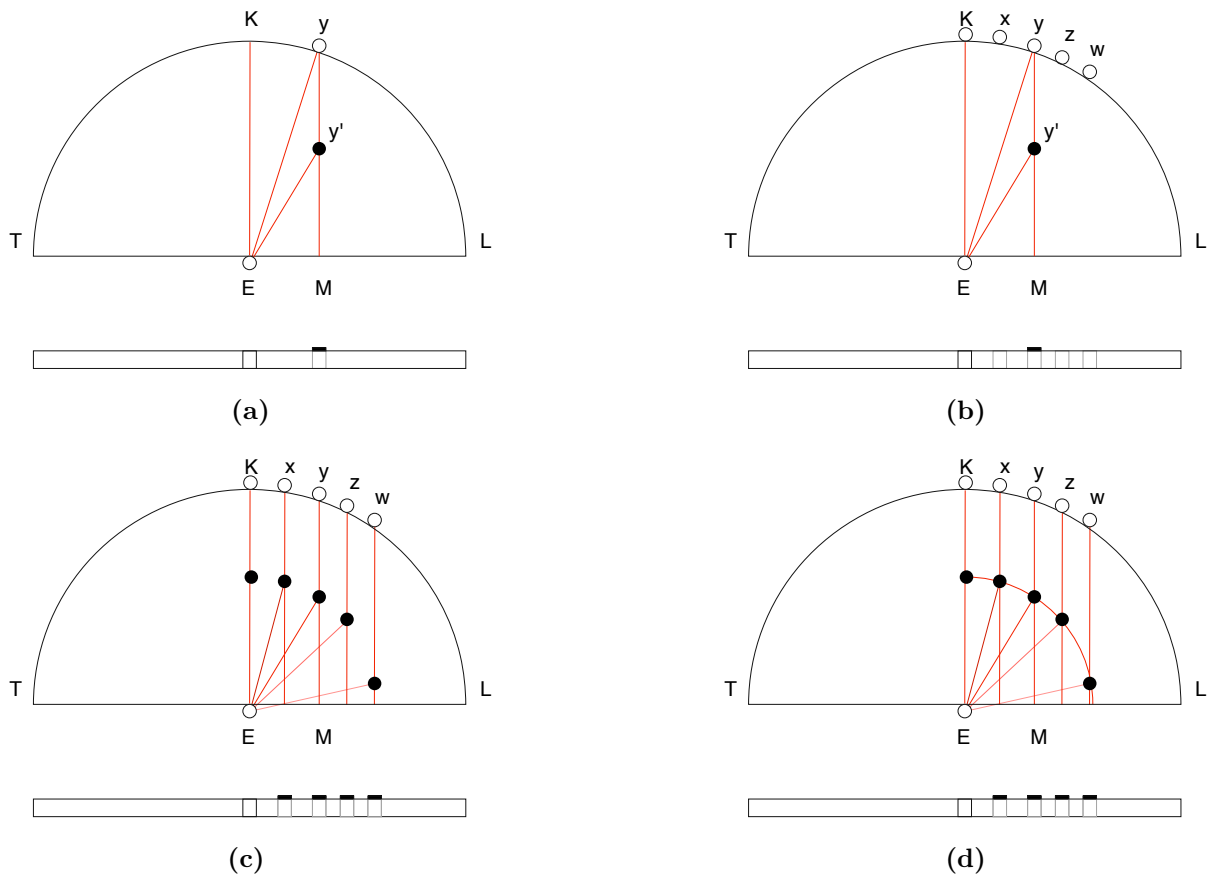


Figura 3. – Vista superior e de frente da representação do material da primeira atividade: o semidisco de acrílico que representa o dioptro ar-acrílico, os pequenos cilindros e os pequenos discos pretos que servem como objeto e guia de localização, respectivamente. (a) Posição y' da imagem objeto em relação a E . (b) Posição dos diferentes objetos em relação a E e as imagens observadas através do semidisco. (c) Posições das imagens dos diferentes objetos e suas orientações, indicadas pelos discos pretos. Observe que todas as posições das imagens repousam sobre uma reta perpendicular a face reta e que passa pela posição do objeto. (d) As posições das imagens repousam sobre um arco de curva.

que, se as dimensões do objeto observado e do objeto guia são muito menores do que as dimensões características do dioptro, ela pode ser representada como indicado na figura 4b.

Se as posições z e z' estão sobre a mesma perpendicular zM , então podemos escrever que

$$\frac{\text{sen } \theta_1}{\text{sen } \theta_2} = \frac{Ez}{Ez'} = \frac{1}{k}, \quad (2.1)$$

onde k é um parâmetro a ser determinado e $\theta_1 = Kz$ e $\theta_2 = K'z'$ são, respectivamente, a orientação angular do objeto e da imagem. Este observador pode conjecturar que o arco da curva é aproximadamente um arco de circunferência e, assim, o parâmetro k é independente da localização do objeto considerado. Neste caso, o valor de k pode ser determinado pela razão

$$k = \frac{EK'}{EK}, \quad (2.2)$$

onde EK é o *radius verus* e EK' é o *radius apparens*. Desse modo, a posição angular do

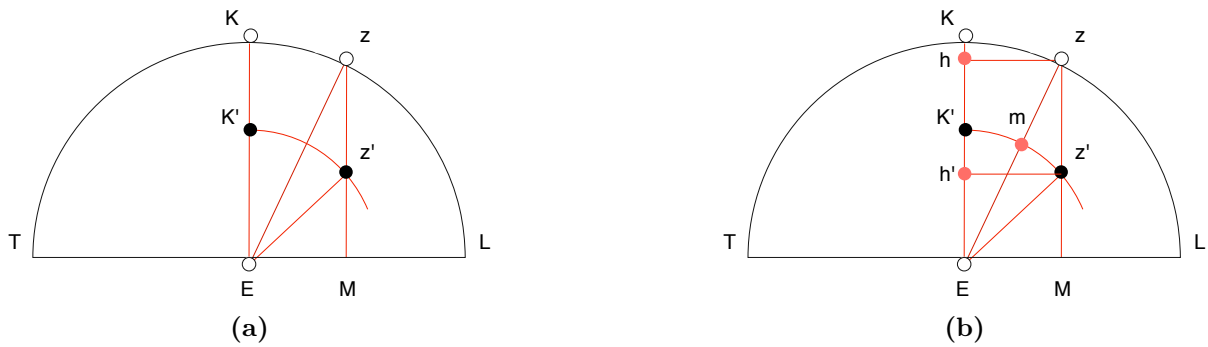


Figura 4. – Representação da formação de imagens da primeira atividade: o semidisco de acrílico que representa o dioptra ar-acrílico, os pequenos cilindros e os pequenos discos pretos que servem como objeto e guia de localização, respectivamente. (a) Posição z' da imagem do objeto em z , em relação a E e suas orientações, indicadas pelos discos pretos. (b) Decomposição dos diferentes orientações em relação à EK e EM .

objeto, θ_1 , é da pela expressão

$$\theta_1 = \text{asen} \left(\frac{\text{sen } \theta_2}{k} \right). \quad (2.3)$$

Portanto, podemos concluir de (2.3) que, conhecendo-se o parâmetro k e a posição angular θ_2 da imagem, a posição angular do objeto, θ_1 , fica completamente determinada. Para determinar o seno do ângulo basta simplesmente inserir o valor do ângulo de localização da imagem em uma calculadora científica, apertar o botão correspondente a função seno, dividir o resultado pelo valor de k e apertar o botão da função arco seno. A solução procurada aparece imediatamente no visor do instrumento.

No entanto, ao solucionarmos o problema proposto, realizamos uma série de etapas no seu desenvolvimento sem muito refletir sobre elas. Como foi construída a tabela de valores dos senos para todos os diferentes ângulos possíveis? Como podemos determinar o valor do seno da posição angular da imagem, a razão entre os segmentos $h'z'$ e Ez' , para qualquer ângulo e com a precisão desejada? Acrescente-se, ainda, que na solução apresentada por esse observador precisamos também conhecer a razão entre as distâncias EK e EK' , o que nem sempre é possível. Além disso, temos que admitir por hipótese que ao variarmos a localização angular do objeto a sua imagem correspondente estará sobre o *mesmo* arco de circunferência.

Consultando os trabalhos de Anderson, Katz e Wilson (2004) e de outros autores, ficamos bastante surpresos em saber que apesar da origem grega da geometria como a conhecemos, o seu desenvolvimento pleno — assim como o da trigonometria — só ocorreu no século VII, na Índia. Somente muito mais tarde, no século XII, estas ciências vão ser reintroduzidas na Europa pelos árabes. Portanto, Ptolomeu não tinha ao seu dispor uma tabela de senos. Na verdade, estas mesmas referências nos informam que é Ptolomeu quem vai publicar a primeira tabela de cordas, o dobro do seno, o segmento de reta que intercepta a circunferência em dois pontos.

Para poder responder a pergunta originalmente formulada, Ptolomeu emprega um método original para a sua época e moderno em todos os aspectos, como veremos adiante. Ele estabelece uma função que determina a localização angular do objeto conhecendo-se somente a localização angular da imagem. Para explorar esta técnica em nossa atividade, precisamos inicialmente dispor de um equipamento denominado *baptistir*, descrito na seção seguinte, também planejado por Ptolomeu.

2.2 O baptistir

O baptistir consiste em um instrumento por nós construído, seguindo a orientações de Ptolomeu descritas no quinto livro da sua *Optica* (COHEN; DRABKIN, 1958). Trata-se de um recipiente semicilíndrico com um disco conectado a ele que serve como goniômetro. O disco tem um raio igual ao raio do semicilíndrico e tanto o disco quanto o recipiente foram reproduzidos em acrílico. As dimensões internas do recipiente semicilíndrico são 60.00(5) cm \times 2.00(5) cm \times 30.00(5) cm e o disco tem as seguintes dimensões: 60.00(5) cm \times 60.00(5) cm \times 1.00(5) cm, como ilustrado na figura 5.

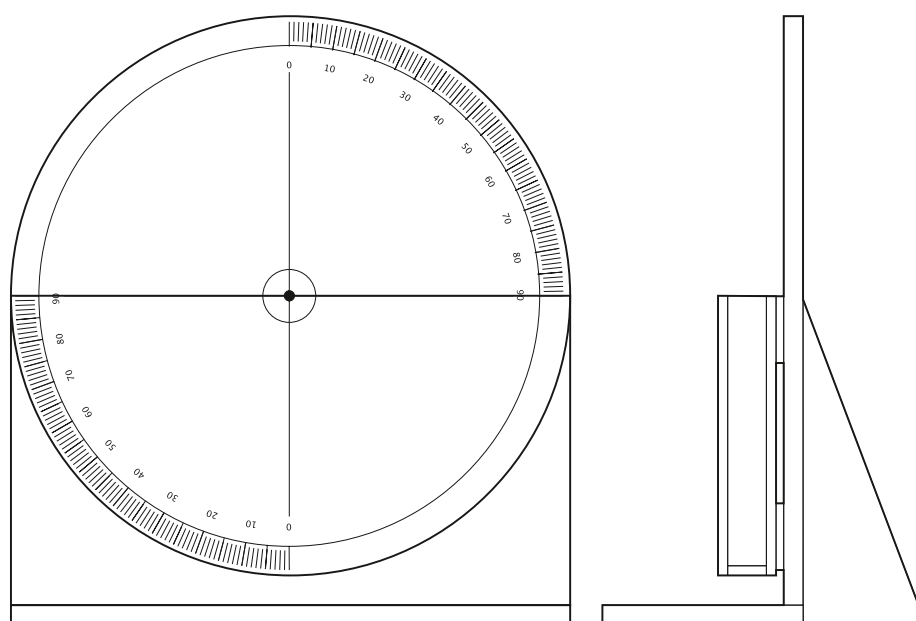
Sobre o disco desenhamos uma circunferência $ABGD$ com o centro em E coincidente com o centro do disco e também estão representados dois diâmetros AEG e BED perpendiculares entre si e passando pelo centro da circunferência E , como ilustrado esquematicamente na figura 6. Dividimos cada quadrante da circunferência em noventa partes iguais, denominadas grau, e localizamos o centro da circunferência com um indicador colorido.

É interessante lembrar que para os gregos, assim como para todos os cientistas até Newton, 90° não era apenas a medida do ângulo reto, mas também significava a distância correspondente a um quarto do perímetro da circunferência. Assim, o grau é uma medida angular que corresponde a uma dada distância ao longo da borda do disco. Escolhemos o diâmetro do nosso baptistir igual a $D = (60.00 \pm 0.05)$ cm e, seguindo a herança babilônica, consideramos o comprimento da circunferência igual 360° . Deste modo, estabelecemos o grau para o nosso baptistir da seguinte maneira:

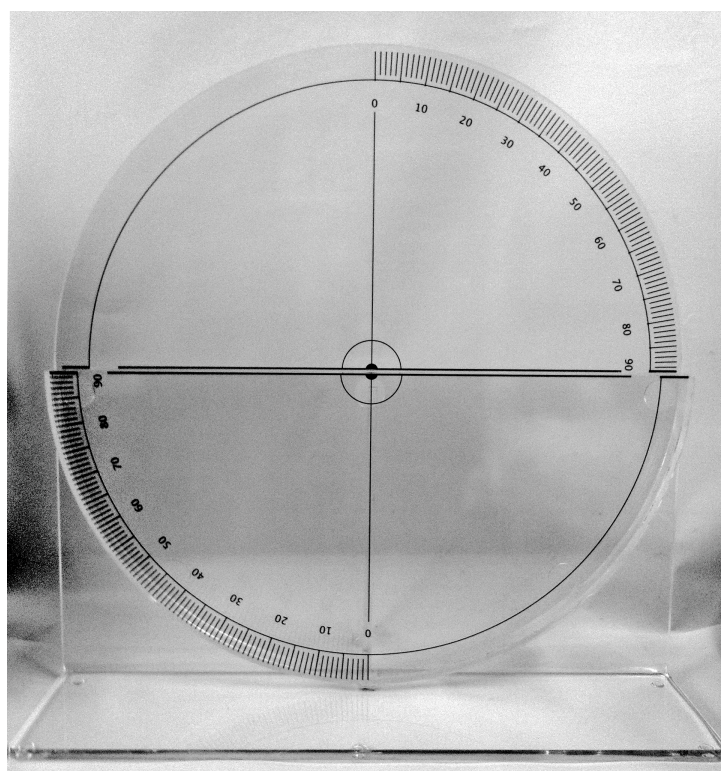
$$1^\circ = \frac{\pi D}{360} \approx 5.2 \text{ mm.} \quad (2.4)$$

Deste modo, a divisão em noventa graus ao longo do perímetro do disco fica definida com uma boa precisão. Uma distância correspondente a 1.0 mm sobre a borda do nosso disco corresponde então a aproximadamente 0.2° .

Na seção seguinte vamos empregar o baptistir para medir os ângulos da localização do objeto e da sua imagem correspondente e analisar quantitativamente a refração produzida por nosso dioptra ar-acrílico.



(a)



(b)

Figura 5. – (a) Vista de frente e lateral do nosso baptistir. (b) Foto do baptistir em acrílico, construído para o nosso trabalho.

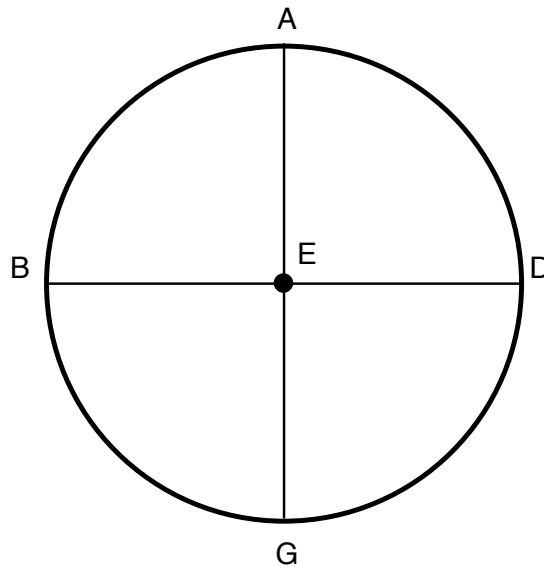


Figura 6. – Representação esquemática do nosso baptistir.

2.3 A refração para o dioptro ar-acrílico

Estamos interessados em investigar quantitativamente as observações feitas na atividade anterior, onde observamos que os ângulos de orientação da imagem e do objeto não são iguais e que o primeiro é maior que o segundo quando o observador observa a imagem do objeto a partir do ar (meio menos denso) para o acrílico (meio mais denso).

A seguinte questão foi formulada a partir das observações: Como podemos determinar a posição angular do objeto conhecendo-se a localização angular da sua imagem?

Para responder a esta pergunta, vamos proceder como Ptolomeu. Começamos então analisando o dioptro ar-acrílico usando o baptistir como instrumento de medida e aplicando a sua metodologia para a orientação angular da posição da imagem e do objeto para o dioptro ar-acrílico, como descrito na figura 7.

Para observarmos os efeitos do semidisco transparente sobre a formação da imagem de um objeto, quando o objeto é observado através dele, procedemos do seguinte modo. Primeiramente, colocamos o baptistir na vertical. Em seguida, colocamos um marcador no ponto z do semidisco e o inserimos no recipiente. Medimos então o ângulo Kz ao longo do arco GB , em um dos quadrantes do recipiente semicilíndrico.

Finalmente, medimos o arco AZ a partir do ponto A , em um dos quadrantes do disco $ABGD$, acima da interface recipiente-semidisco e oposto ao quadrante que contém o ângulo Kz . Esta medida é realizada da seguinte forma: com o auxílio de um marcador colorido, localizamos da seguinte forma a posição Z nesse quadrante superior; com um dos olhos miramos na direção do marcador E a partir de Z , de modo que eles estejam

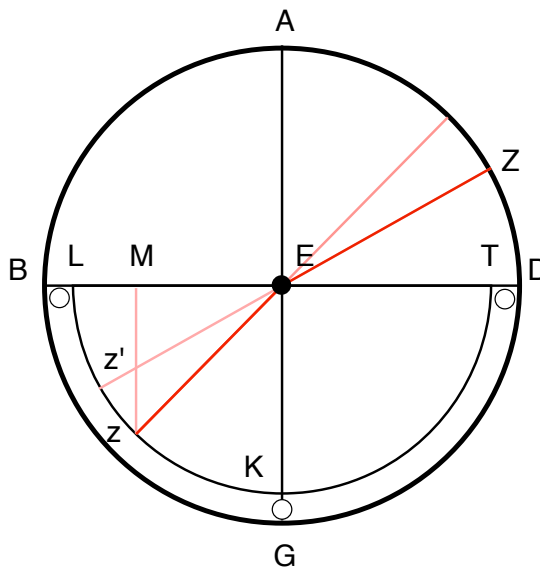


Figura 7. – Baptistir e o dioptro ar-acrílico. Os pequenos círculos brancos representam os pequenos cilindros usados anteriormente e que agora servem apenas para impedir que o semidisco caia no interior do recipiente e, ao mesmo tempo, também servem para alinhar as faces retas do semidisco e do recipiente.

orientados com o ângulo de guia AZ e, ao mesmo tempo, o marcador em E oculte a imagem do marcador em z .

Seguindo a convenção de Ptolomeu, denominamos os ângulos AZ e Kz de posição angular da imagem, θ_2 , e posição angular do objeto, θ_1 , respectivamente. Um conjunto de medidas para estes ângulos é apresentado na Tabela 1 e está representado graficamente na figura 8.

Tabela 1. – Medidas para a posição angular da imagem, θ_2 e a posição angular do objeto, θ_1 , para o dioptro ar-acrílico quando o objeto é observado a partir do meio menos denso (o ar) para o mais denso (o acrílico). A localização angular da imagem foi desviada de $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ em relação à posição do objeto.

$\theta_2(^{\circ})$	$\theta_1(^{\circ})$	$\Delta\theta(^{\circ})$
10,0(2)	7,0(2)	3,0(4)
20,0(2)	14,0(2)	6,0(4)
30,0(2)	19,5(2)	10,5(4)
40,0(2)	25,0(2)	15,0(4)
50,0(2)	31,0(2)	19,0(4)
60,0(2)	35,0(2)	25,0(4)
70,0(2)	39,0(2)	31,0(4)
80,0(2)	42,0(2)	38,0(4)

Como podemos concluir da figura 8 — para o dioptro ar-acrílico e o objeto sendo observado a partir do meio menos denso (o ar) para o mais denso (o acrílico) —, temos

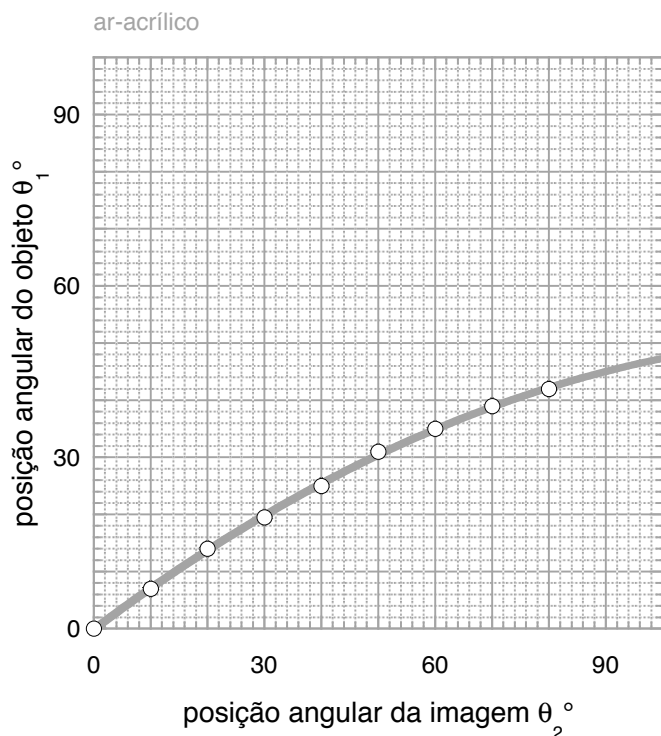


Figura 8. – Medidas para a posição angular do objeto, θ_1 , vs. a posição angular da imagem, θ_2 , para o dióptro ar-acrílico e o objeto é observado a partir do meio menos denso (o ar) para o mais denso (o acrílico).

que o arco AZ é sempre maior do que o arco Kz e, por conseqüência, a posição angular da imagem, θ_2 , é sempre maior do que a posição angular do objeto, θ_1 .

Assim, podemos afirmar que a linha guia para a observação do objeto em z sofreu um desvio na interface entre o ar e o acrílico. Portanto, o segmento de reta que orientava a visão do objeto na direção Ez foi encurvada para a direção EZ pela quantidade $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$, de modo a observarmos a imagem do objeto em z' . A este fenômeno denominamos refração.

É interessante perceber que, se observarmos o objeto em G a partir da perpendicular AE , a guia não sofre nenhum desvio: a imagem continua sobre a mesma linha reta AE . Em todas as outras posições, entretanto, uma vez que aumentamos o arco AZ , a posição angular da imagem, θ_2 , o arco Kz correspondente, a posição angular do objeto, θ_1 , também aumenta. Entretanto, o encurvamento é progressivamente maior, como podemos observar na figura 9.

Da figura 9 também observamos que ao variarmos a posição angular da imagem, a posição angular do objeto varia mas não na mesma proporção. Quanto maior a posição angular da imagem, maior é a diferença entre a posição angular da imagem e do objeto. Isto nos sugere analisar o comportamento da razão entre essas duas grandezas, com

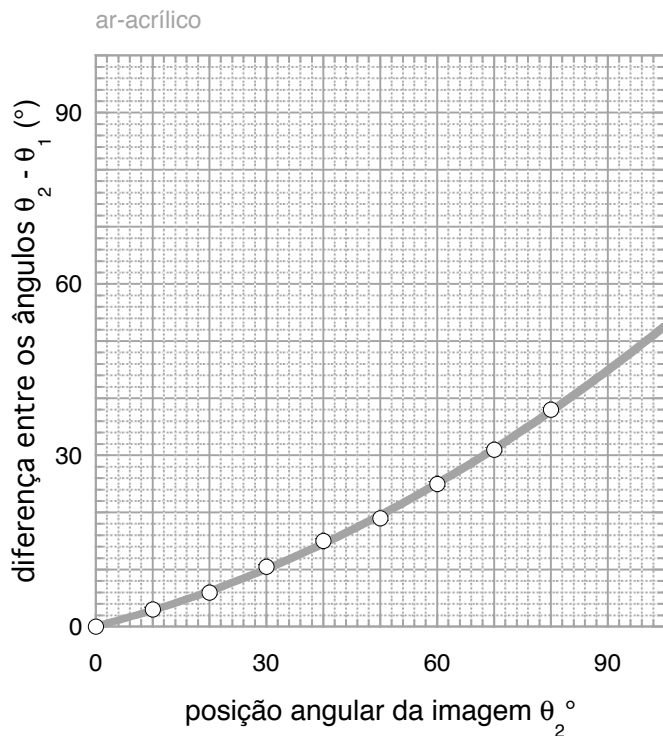


Figura 9. – Diferença $\Delta\theta$ entre as medidas para a posição angular da imagem do objeto, θ_2 e a posição angular do objeto, θ_1 , vs. posição angular da imagem, θ_2 , para o dióptro ar-acrílico e o objeto é observado a partir do meio menos denso (o ar) para o mais denso (o acrílico).

representado no gráfico da figura 10.

Percebemos da figura 10 que, para as posições angulares consideradas, esta razão varia linearmente com a posição angular da imagem do objeto, θ_2 . Desse modo, podemos escrever que

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = a - b\theta_2, \quad (2.5)$$

onde a e b são constantes de valor aproximado

$$a \approx 0.74(1) \quad (2.6)$$

e

$$b = \frac{0.74(1) - 0.48(1)}{100(1)^\circ} \approx 0.0026(2)/^\circ. \quad (2.7)$$

Estas constantes e suas incertezas são, respectivamente, o coeficiente linear e angular de (2.5), determinados por triangulação a partir do gráfico da figura 10.

Portanto, esta análise revela que a razão entre as medidas da posição angular da imagem e do objeto, θ_1/θ_2 varia linearmente com a posição angular da imagem do objeto,

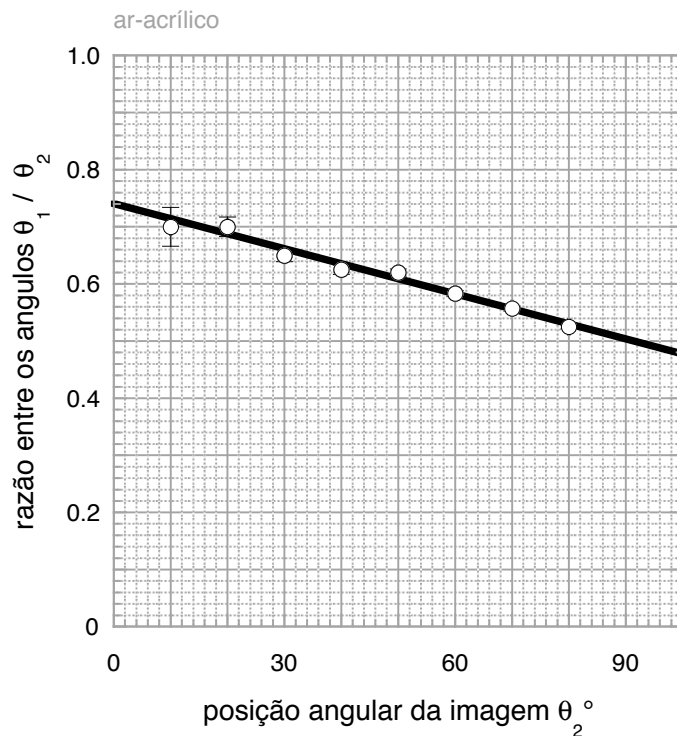


Figura 10. – Razão entre as medidas da posição angular da imagem e do objeto, θ_1/θ_2 vs. posição angular da imagem do objeto, θ_2 , para o dióptro ar-acrílico e o objeto é observado a partir do meio menos denso (o ar) para o mais denso (o acrílico).

θ_2 , e podemos concluir que

$$\theta_1 = \theta_2 (a - b \theta_2) \quad (2.8)$$

ou, ainda, que

$$\theta_1 = a \theta_2 \left(1 - \frac{\theta_2}{\theta_0}\right), \quad (2.9)$$

onde

$$\theta_0 = \frac{a}{b} \quad (2.10)$$

é uma constante que corresponde a um ângulo característico do experimento. Esta é a lei da refração estabelecida por Ptolomeu, no século II, a partir da análise dos seus experimentos com os dióptros ar-água, ar-vidro e vidro-água.

Assim, para o dióptro ar-acrílico, obtemos

$$\theta_0 \approx 280(30)^\circ. \quad (2.11)$$

A figura 11 representa o comportamento parabólico, definido pela equação (2.9), da relação entre a posição angular do objeto, θ_1 e a posição angular da imagem do objeto, θ_2 .

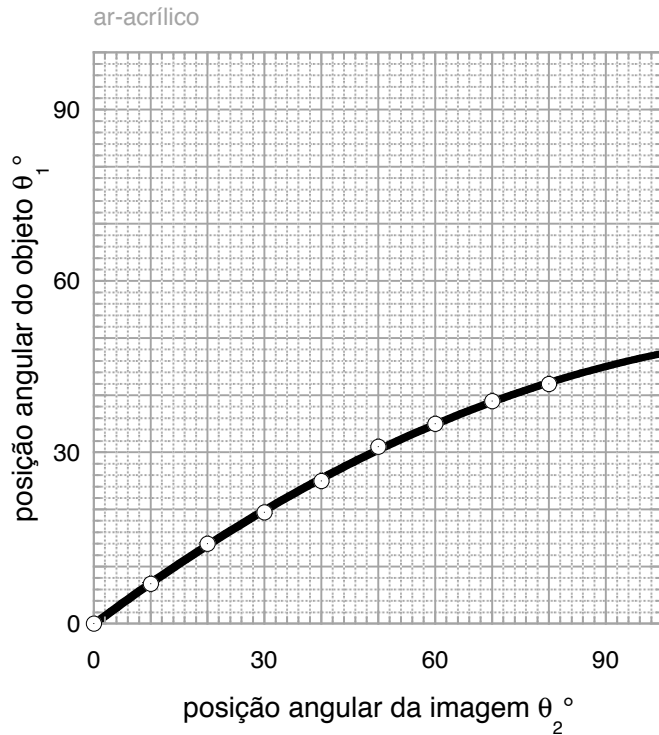


Figura 11. – Medidas para a posição angular do objeto, θ_1 , vs. posição angular da imagem, θ_2 , para o dioptra ar-acrílico e o objeto é observado a partir do meio menos denso (o ar) para o mais denso (o acrílico). A curva representa a função (2.9).

A partir da equação (2.9) também observamos que a posição angular da imagem do objeto, $\theta_2 = 90^\circ$ define um ângulo limite θ_c para a localização angular do objeto:

$$\theta_c = a \, 90^\circ \left(1 - \frac{90^\circ}{\theta_0} \right) = 45(3)^\circ. \quad (2.12)$$

Este último resultado pode ser verificado imediatamente pelo experimentador. Para o nosso dioptra ar-acrílico temos que o valor experimental de θ_c é igual a $44(1)^\circ$. Portanto, a previsão da posição limite do objeto, pela lei de Ptolomeu, apresenta uma discrepância de 1° em relação a posição angular real.

Observamos ainda que, para pequenas posições angulares das imagens, podemos reescrever a equação (2.9) na forma

$$\theta_1 \approx a \, \theta_2. \quad (2.13)$$

Assim, o coeficiente a é uma “medida” da quantidade de encurvamento causado pelo nosso dioptra. A equação (2.13) é conhecida como a lei de Kepler para a refração, quando os ângulos são pequenos.

É importante salientar que na experimentação que realizamos o objeto é observado a partir do meio menos denso (o ar) para o mais denso (o acrílico). É natural, portanto, se

perguntar o que ocorre quando observamos a formação da imagem do objeto a partir de um meio mais denso em direção a um meio menos denso. Para realizar tal experimento, rearranjamos o baptistir como ilustrado na figura 12.

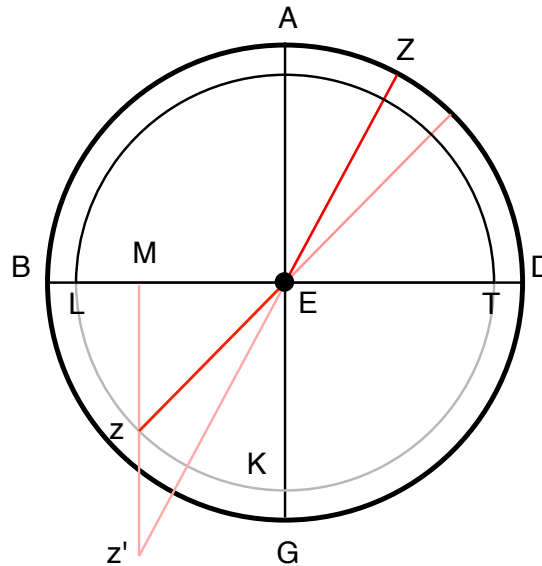


Figura 12. – Baptistir e o dioptra ar-acrílico, onde o objeto em z , no meio menos denso (o ar), é agora observado a partir de Z , o meio mais denso (o acrílico). O semidisco de acrílico agora está apoiado no recipiente semicircular BGD do baptistir.

Um conjunto de medidas das posições angulares das imagens do objeto para diferentes posições angulares do objeto é apresentado na Tabela 2 e está representado graficamente na figura 13.

Tabela 2. – Medidas para a posição angular da imagem, θ_2 e a ângulo da posição angular do objeto, θ_1 , para o dioptra ar-acrílico quando o objeto é observado a partir do meio mais denso (o acrílico) para o meio menos denso (o ar). A localização angular da imagem foi desviada de $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ em relação à posição do objeto.

$\theta_2(^{\circ})$	$\theta_1(^{\circ})$	$\Delta\theta(^{\circ})$
6,5(2)	10,0(2)	-3,5(4)
13,0(2)	20,0(2)	-7,0(4)
19,5(2)	30,0(2)	-10,5(4)
25,5(2)	40,0(2)	-14,5(4)
31,5(2)	50,0(2)	-18,5(4)
36,0(2)	60,0(2)	-24,0(4)
39,0(2)	70,0(2)	-31,0(4)
42,5(2)	80,0(2)	-37,5(4)

Observamos da figura 13 que, para valores angulares para a posição do objeto — quando o objeto é observado a partir do meio menos denso (o ar) para o mais denso (o

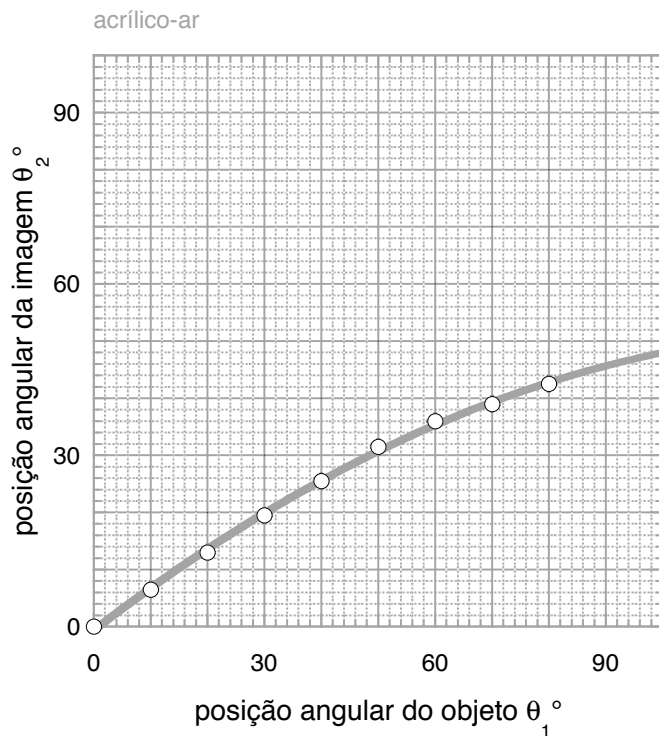


Figura 13. – Medidas para a posição angular da imagem, θ_2 , vs. a posição angular do objeto, θ_1 , para o dióptro ar-acrílico quando o objeto é observado a partir do meio mais denso (o acrílico) para o menos denso (o ar). Observe a inversão em relação a figura 11.

acrílico) — são simétricos àqueles determinados quando o objeto observado a partir do meio mais denso (o acrílico) para o menos denso (o ar).

Uma vez mais podemos analisar o comportamento da razão entre essas duas grandezas, com representado no gráfico da figura 14.

Observamos da figura 14 que, para posições angulares da imagem maiores do que 30° , está razão varia linearmente com o ângulo da posição angular do objeto, θ_1 . Desse modo, podemos escrever que

$$\frac{\theta_2}{\theta_1} = a' - b' \theta_1, \quad (2.14)$$

onde a' e b' são constantes de valor aproximado

$$a' \approx 0.76(1) \quad (2.15)$$

e

$$b' = \frac{0.76(1) - 0.48(1)}{100(1)^\circ} \approx 0.0028(2)^\circ. \quad (2.16)$$

Estas constantes e suas incertezas são, respectivamente, o coeficiente linear e angular de (2.14), determinados por triangulação a partir do gráfico da figura 14.

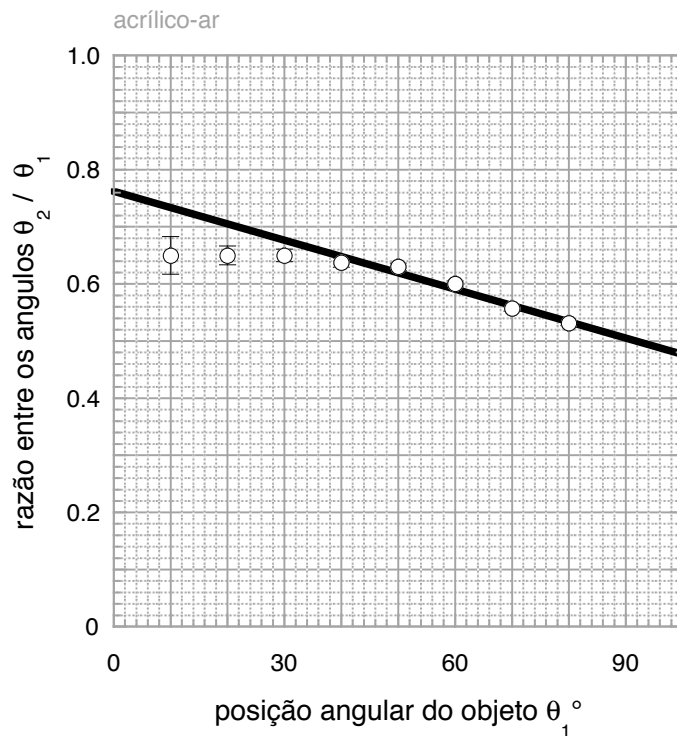


Figura 14. – Razão entre as medidas da posição angular da imagem e do objeto, θ_1/θ_2 vs. ângulo da posição angular da imagem do objeto, θ_2 , para o dióptro ar-acrílico e o objeto observado a partir do meio menos denso (o ar) para o mais denso (o acrílico).

Portanto, esta análise revela que a razão entre as medidas da posição angular da imagem e do objeto, θ_2/θ_1 varia linearmente com a posição angular do objeto, θ_1 , e podemos concluir que

$$\theta_2 = \theta_1 (a' - b' \theta_1) \quad (2.17)$$

ou, ainda, que

$$\theta_2 = a' \theta_1 \left(1 - \frac{\theta_1}{\theta'_0} \right), \quad (2.18)$$

onde

$$\theta'_0 = \frac{a'}{b'} \quad (2.19)$$

é uma constante que corresponde a um ângulo característico do experimento. Assim, para o dióptro ar-acrílico, obtemos

$$\theta'_0 \approx 270(30)^\circ. \quad (2.20)$$

Observe que θ'_0 é praticamente igual a constante θ_0 determinada anteriormente.

A figura 15 representa o comportamento parabólico, definido pela equação (2.18), da relação entre a posição angular da imagem do objeto, θ_2 e a posição angular do objeto, θ_1 .

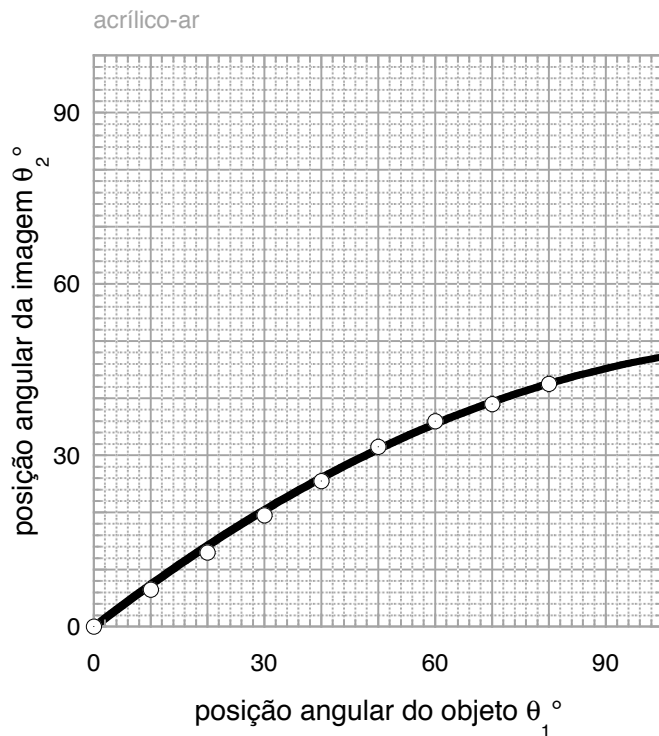


Figura 15. – Medidas para a posição angular da imagem, θ_2 , vs. posição angular do objeto, θ_1 , para o dioptra ar-acrílico e o objeto é observado a partir do meio menos denso (o ar) para o mais denso (o acrílico). A curva representa a função (2.18). Observe a discrepância entre a função e os valores observados para a posição angular do objeto para ângulos menores do que 30° .

A partir da equação (2.18) também observamos que a posição angular do objeto, $\theta_1 = 90^\circ$ define um ângulo limite θ'_c para a localização angular da imagem:

$$\theta'_c = a \, 90^\circ \left(1 - \frac{90^\circ}{\theta'_0} \right) = 46(2)^\circ. \quad (2.21)$$

Este último resultado é similar ao caso precedente e pode ser verificado imediatamente pelo experimentador. Para o nosso dioptra ar-acrílico temos que o valor experimental de θ_c é igual a $44(1)^\circ$. Portanto, a previsão da posição limite do objeto, pela lei de Ptolomeu, apresenta uma discrepância de 2° em relação a posição angular real.

2.4 A refração para o dioptra ar-água

Após termos investigado o dioptra ar-acrílico, vamos explorar os efeitos da água sobre a formação da imagem de um objeto. Primeiramente, colocamos o baptistir na vertical e preenchemos o seu recipiente semicilíndrico com água limpa e em quantidade suficiente para alcançar a sua borda. Em seguida, verificamos se a superfície do disco do baptistir

está perpendicular à superfície da água. Esta superfície divide o disco em duas metades, de maneira que a metade BGD , fica inteiramente abaixo do nível da água. Assim, o diâmetro AEG também está perpendicular a superfície da água, como ilustrado na figura 16.

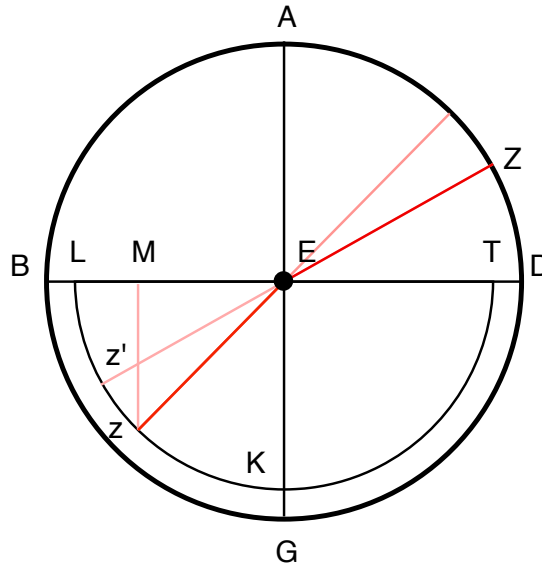


Figura 16. – Baptistir e o dióptro ar-água.

Agora procedemos como descrito na Seção 2.3. Colocamos um marcador em E , o ponto médio da lateral reta do semicilindro. Colocamos um outro marcador em z na base curva do recipiente e observamos, ao longo da borda do disco, partindo da ponto A linha guia AE a posição da imagem do objeto alinhada com o ponto E . Esta posição é indicada pelo ponto Z .

Um conjunto de medidas para estes ângulos é apresentado na Tabela 3 e está representado graficamente na figura 17. Mais uma vez percebemos, a partir das nossas medidas, indicadas na Tabela 3, que a posição angular da imagem AZ é maior do que a posição angular do objeto Kz .

Como podemos observar da figura 17, para o dióptro ar-água e o objeto sendo observado a partir do meio menos denso (o ar) para o mais denso (a água), temos que o arco AZ é sempre maior do que o arco Kz e, por conseqüência, a posição angular da imagem, θ_2 , é sempre maior do que a posição angular do objeto, θ_1 . Portanto, podemos afirmar que a guia para a observação do objeto em H sofreu um desvio, isto é, o segmento de reta que orientava a visão do objeto na direção EZ foi encurvada para a direção Ez pela quantidade $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$, de modo a observarmos o objeto em z , como no caso do dióptro ar-acrílico. Podemos afirmar então que a refração ocorre ao observamos um objeto através de dois meios transparentes em contato e o segmento de reta de orientação visual é refratado na interface entre os dois meios considerados.

Tabela 3. – Medidas para a posição angular da imagem, θ_2 e a posição angular do objeto, θ_1 , para o dioptra ar-acrílico quando o objeto é observado a partir do meio menos denso (o ar) para o mais denso (a água). A localização angular da imagem foi desviada de $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ em relação à posição do objeto.

$\theta_2(^{\circ})$	$\theta_1(^{\circ})$	$\Delta\theta(^{\circ})$
10,0(2)	9,0(2)	1,0(4)
20,0(2)	16,0(2)	4,0(4)
30,0(2)	23,0(2)	7,0(4)
40,0(2)	29,5(2)	10,5(4)
50,0(2)	36,0(2)	14,0(4)
60,0(2)	41,0(2)	19,0(4)
70,0(2)	44,5(2)	25,5(4)
80,0(2)	49,0(2)	31,0(4)

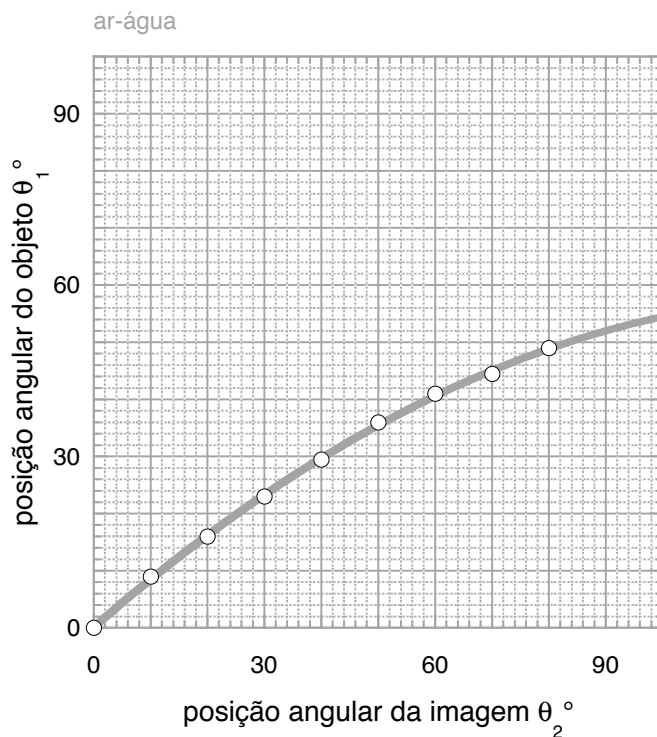


Figura 17. – Medidas para a posição angular do objeto, θ_1 , vs. posição angular da imagem, θ_2 , para o dioptra ar-água e o objeto é observado a partir do meio menos denso (o ar) para o mais denso (a água).

É interessante perceber que, se observarmos o objeto em G a partir da perpendicular AE , a guia não sofre nenhum desvio: a imagem continua sobre a mesma linha reta AE . Em todas as outras posições, entretanto, uma vez que aumentamos o arco Kz , o arco AZ também aumenta, mas o encurvamento é progressivamente maior. Entretanto, os incrementos não são linearmente proporcionais. Ilustramos na figura 18 o comportamento

da razão entre as posições angulares em função da posição angular da imagem.

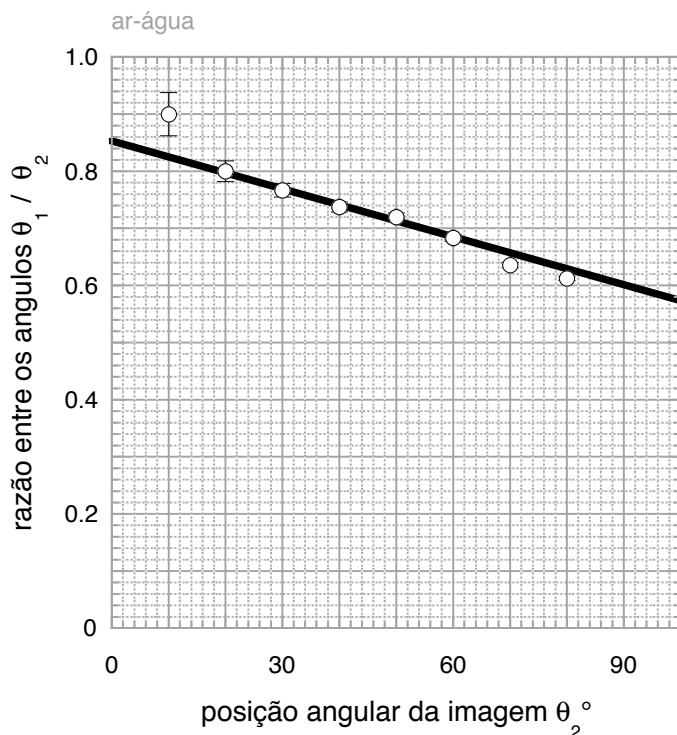


Figura 18. – Razão entre as medidas da posição angular da imagem e do objeto, θ_1/θ_2 vs. ângulo da posição angular da imagem do objeto, θ_2 , para o dioptro ar-água e o objeto observado a partir do meio menos denso (o ar) para o mais denso (a água).

Observamos da figura 18 que esta razão varia linearmente com o ângulo da posição imagem do objeto, θ_2 . Desse modo, podemos escrever que

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = a - b \theta_2, \tag{2.22}$$

onde a e b são constantes de valor aproximado

$$a \approx 0.85(1) \tag{2.23}$$

e

$$b = \frac{0.85(1) - 0.57(1)}{100(1)^\circ} \approx 0.0028(2)^\circ. \tag{2.24}$$

Estas constantes e suas incertezas são, respectivamente, o coeficiente linear e angular de (2.22), determinados por triangulação a partir do gráfico da figura 18.

Portanto, esta análise revela que a razão entre as medidas da posição angular da imagem e do objeto, θ_1/θ_2 varia linearmente com a posição angular da imagem do objeto, θ_2 , e podemos concluir que

$$\theta_1 = \theta_2 (a - b \theta_2) \tag{2.25}$$

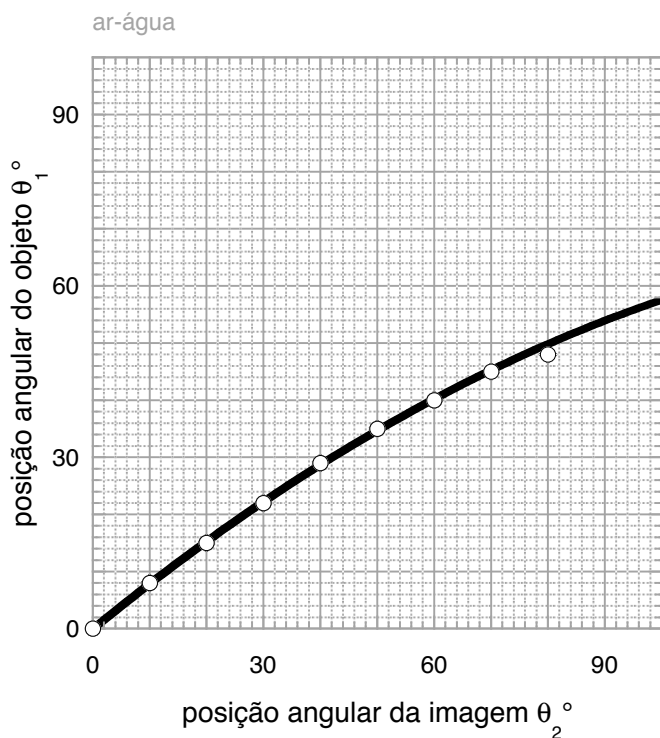


Figura 19. – Medidas para a posição angular do objeto, θ_1 , vs. a posição angular da imagem, θ_2 , para o dioptro ar-água e o objeto observado a partir do meio menos denso (o ar) para o mais denso (a água). A curva representa a função (2.26). Observe a discrepância entre a função e os valores observados para a posição angular do objeto para ângulos maiores do que 60° .

ou, ainda, que

$$\theta_1 = a \theta_2 \left(1 - \frac{\theta_2}{\theta_0} \right), \tag{2.26}$$

onde

$$\theta_0 = \frac{a}{b} \tag{2.27}$$

é uma constante que corresponde a um ângulo característico do experimento. Esta é a lei da refração de Ptolomeu, aplicada ao dioptro ar-água.

Assim, para o dioptro ar-água, obtemos

$$\theta_0 \approx 300(30)^\circ. \tag{2.28}$$

A figura 19 representa o comportamento parabólico, definido pela equação (2.26), da relação entre a posição angular do objeto, θ_1 e a posição angular de sua imagem, θ_2 .

A partir da equação (2.26) também observamos que a posição angular da imagem do objeto em $\theta_2 = 90^\circ$ define um ângulo limite θ_c para a localização angular do objeto:

$$\theta_c = a 90^\circ \left(1 - \frac{90^\circ}{\theta_0} \right) = 54(3)^\circ. \tag{2.29}$$

Este último resultado pode ser verificado imediatamente pelo experimentador. Para o nosso dioptro ar-água temos que o valor experimental de θ_c é igual a $49(1)^\circ$. Portanto, a previsão da posição limite do objeto, pela lei de Ptolomeu, apresenta uma discrepância de 5° em relação a posição angular real. Isso significa que a lei de Ptolomeu prevê um ângulo limite maior do que o observado experimentalmente.

Observamos mais uma vez que, para pequenas posições angulares das imagens, podemos reescrever a equação (2.26) na forma

$$\theta_1 \approx a \theta_2. \quad (2.30)$$

Assim, percebemos novamente que o coeficiente a é uma “medida” da quantidade de encurvamento causado pelo nosso dioptro e a lei de Kepler para a refração, quando os ângulos são pequenos, se cumpre mais uma vez.

2.5 A refração para o dioptro acrílico-água

Após termos investigado o dioptro ar-água, vamos explorar os efeitos da combinação acrílico-água sobre a formação da imagem de um objeto. Primeiramente, colocamos o baptistir na vertical e preenchemos o seu recipiente semicilíndrico com água limpa e em quantidade suficiente para alcançar a sua borda. Em seguida, verificamos se a superfície do disco do baptistir está perpendicular a superfície da água. Esta superfície divide o disco em duas metades, de maneira que a metade BGD , fica inteiramente abaixo do nível da água. Em seguida colocamos o semidisco em acrílico sobre a borda do recipiente. Assim, o diâmetro AEG também está perpendicular a superfície da água, como ilustrado na mesma figura 12 que representou o dioptro ar-acrílico.

Ao procedermos como descrito na Seção 2.4, obtemos o conjunto de medidas para os ângulos como apresentado na Tabela 4 e representado graficamente na figura 20.

Tabela 4. – Medidas para a posição angular da imagem, θ_2 e a posição angular do objeto, θ_1 , para o dioptro acrílico-água quando o objeto é observado a partir do meio mais denso (o acrílico) para o meio menos denso (a água). A localização angular da imagem foi desviada de $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ em relação à posição do objeto.

$\theta_2(^\circ)$	$\theta_1(^\circ)$	$\Delta\theta(^\circ)$
8,0(2)	10,0(2)	-2,0(4)
17,0(2)	20,0(2)	-3,0(4)
25,5(2)	30,0(2)	-4,5(4)
34,5(2)	40,0(2)	-5,5(4)
42,5(2)	50,0(2)	-7,5(4)
50,0(2)	60,0(2)	-10,0(4)
56,5(2)	70,0(2)	-13,5(4)
61,0(2)	80,0(2)	-19,0(4)

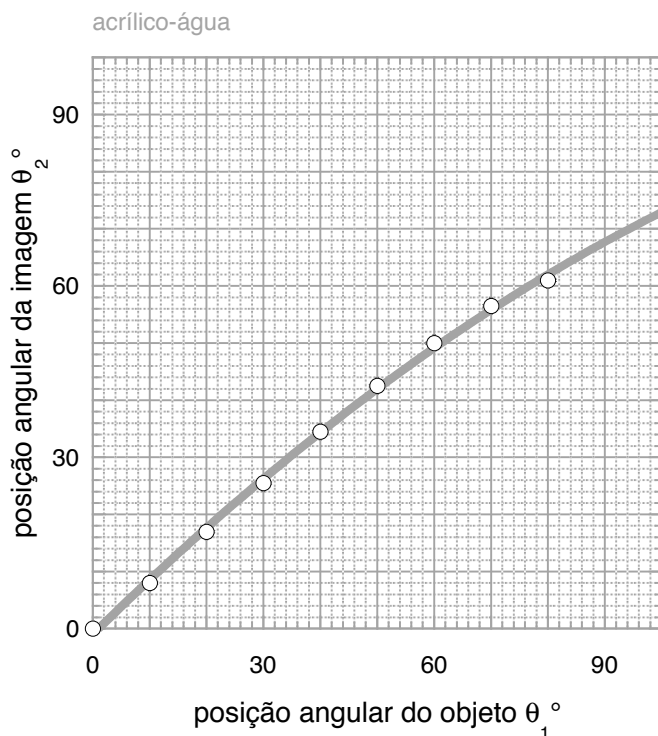


Figura 20. – Medidas para a posição angular da imagem, θ_2 , vs. posição angular do objeto, θ_1 , para o dióptro ar-acrílico quando o objeto é observado a partir do meio mais denso (o acrílico) para o menos denso (o ar).

Observamos da figura 20 que os valores para a posição angular do objeto quando o objeto é observado a partir do meio mais denso (o acrílico) para o menos denso (a água) são similares àqueles determinados quando o objeto observado a partir do meio mais denso (o acrílico) para o menos denso (o ar). Uma vez mais podemos analisar o comportamento da razão entre essas duas grandezas, com representado no gráfico da figura 21.

Observamos da figura 21 que, para posições angulares da imagem maiores do que 30° , está razão varia linearmente com a posição angular do objeto, θ_1 . Desse modo, podemos escrever que

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = a' - b' \theta_2, \tag{2.31}$$

onde a' e b' são constantes de valor aproximado

$$a' \approx 0.97(1) \tag{2.32}$$

e

$$b' = \frac{0.97(1) - 0.72(1)}{100(1)^\circ} \approx 0.0025(2)^\circ. \tag{2.33}$$

Estas constantes e suas incertezas são, respectivamente, o coeficiente linear e angular de (2.31), determinados por triangulação a partir do gráfico da figura 21.

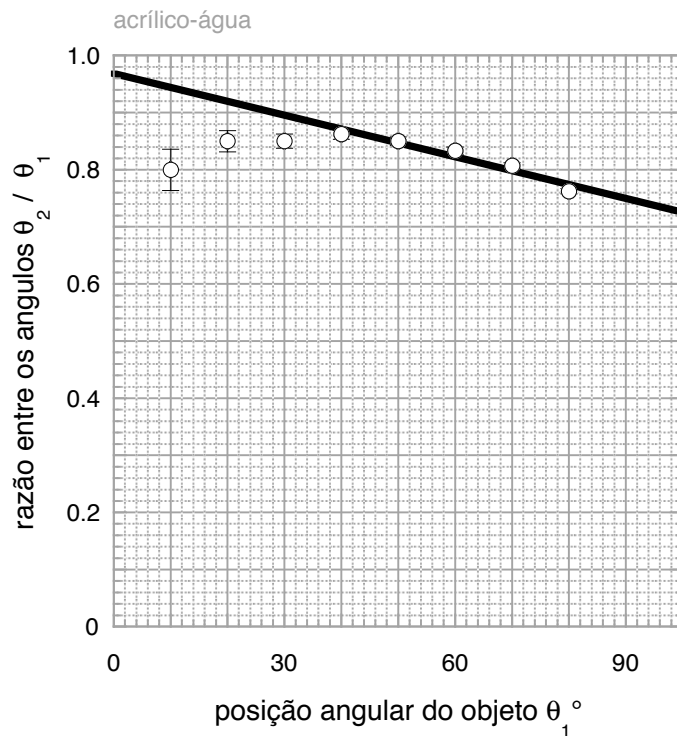


Figura 21. – Razão entre as medidas da posição angular da imagem e do objeto, θ_1/θ_2 vs. posição angular da imagem do objeto, θ_2 , para o dióptro acrílico-água e o objeto é observado a partir do meio menos denso (o acrílico) para o mais denso (a água).

Portanto, esta análise revela que a razão entre as medidas da posição angular da imagem e do objeto, θ_2/θ_1 varia linearmente com a posição angular do objeto, θ_1 , e podemos concluir que

$$\theta_2 = \theta_1 (a' - b' \theta_1) \quad (2.34)$$

ou, ainda, que

$$\theta_2 = a' \theta_1 \left(1 - \frac{\theta_1}{\theta'_0} \right), \quad (2.35)$$

onde

$$\theta'_0 = \frac{a'}{b'} \quad (2.36)$$

é uma constante que corresponde a um ângulo característico do experimento. Assim, para o dióptro ar-acrílico, obtemos

$$\theta_0 \approx 390(30)^\circ. \quad (2.37)$$

A figura 22 representa o comportamento parabólico, definido pela equação (2.35), da relação entre o ângulo posição angular da imagem do objeto, θ_2 e a posição angular do objeto, θ_1

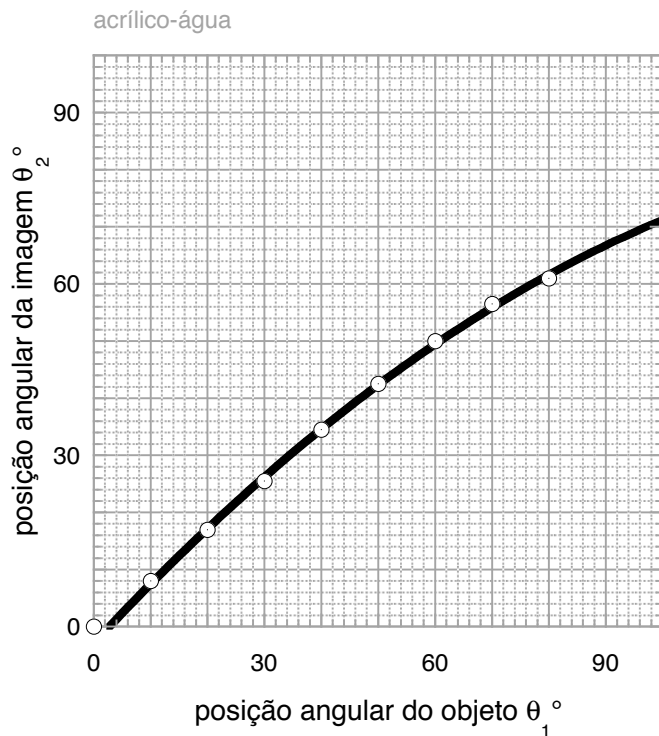


Figura 22. – Medidas para a posição angular da imagem, θ_2 , vs. posição angular do objeto, θ_1 , para o dióptro ar-acrílico e o objeto é observado a partir do meio menos denso (o ar) para o mais denso (o acrílico). A curva representa a função (2.35). Observe a discrepância entre a função e os valores observados para a posição angular do objeto para ângulos menores do que 30° .

A partir da equação (2.18) também observamos que a posição angular do objeto, $\theta_1 = 90^\circ$ define um ângulo limite θ_c para a localização angular da imagem:

$$\theta_c = a \, 90^\circ \left(1 - \frac{90^\circ}{\theta_0} \right) = 68(2)^\circ. \quad (2.38)$$

Este último resultado pode ser verificado imediatamente pelo experimentador. Para o nosso dióptro acrílico-água temos que o valor experimental de θ_c é igual a $65(2)^\circ$. Portanto, a previsão da posição limite do objeto, pela lei de Ptolomeu, apresenta uma discrepância de 2° em relação a posição angular real.

2.6 As características dos dióptros

Uma análise das medidas para a posição angular do objeto, θ_1 , e da posição angular da sua imagem, θ_2 , para diferentes dióptros e quando o objeto é observado a partir do meio menos denso para o mais denso, mostraram que estas grandezas físicas obedecem a

lei de Ptolomeu:

$$\theta_1 = a \theta_2 \left(1 - \frac{\theta_2}{\theta_0} \right), \quad (2.39)$$

onde a e θ_0 são constantes que dependem do dioptro considerado. Na Tabela 5 apresentamos um resumo das características dos dioptros analisados.

Tabela 5. – Parâmetros matemáticos obtidos da análise dos dioptros ar-água e ar-acrílico apresentados nesta dissertação.

dioptro	a	b	$n_P = 1/a$	θ_0	θ_c	$\theta_{c \text{ exp}}$
ar-acrílico	0,74(1)	0,0026(2)	1,35(1)	280(30)	45(3)	44(1)
ar-água	0,85(1)	0,0028(2)	1,18(1)	300(30)	54(3)	49(1)

Uma análise da Tabela 5 mostra que o valor do parâmetro a é menor para o dioptro ar-água do que o seu correspondente para o dioptro ar-acrílico. Entretanto, o dioptro ar-acrílico produz uma refração maior do que o dioptro ar-água. Podemos então definir um coeficiente $n_P = 1/a$ que represente este comportamento. Este coeficiente n_P é denominado índice de refração do material.

Assim podemos concluir que: (1) o encurvamento do raio visual não ocorre em qualquer líquido ou meios rarefeitos. Um certo grau de encurvamento ocorre somente no caso daqueles meios transparentes de características refratárias diferentes; (2) o raio visual se prolonga ao longo de um segmento de reta e é naturalmente encurvado somente na interface entre os dois meios transparentes de intensidades diferentes; (3) o encurvamento ocorre não somente na interface orientada de um meio menos denso para um mais denso (como no caso da reflexão) mas, também, na interface orientada de um meio mais denso para um menos denso; e (4) este encurvamento não ocorre em ângulos iguais, quando medidos em relação à perpendicular a interface entre o dois meios, mas eles apresentam uma relação quantitativa bem definida, descrita aproximadamente pela lei de Ptolomeu dada pela equação (2.39).

2.7 A fórmula de Bhaskara

Como podemos observar da análise dos nossos resultados, a lei de Ptolomeu dada pela equação (2.39) representa uma boa aproximação para se determinar a posição angular do objeto uma vez conhecida a posição angular da sua imagem. Entretanto a lei de Ptolomeu apresenta uma discrepância significativa com a localização real quando consideramos ângulos menores do que 30° ou maiores do que 60° .

Para solucionar este problema, procedemos da seguinte maneira. Observemos da figura 23 que o círculo de diâmetro AG possui um raio $R = EZ$, e um arco AZ igual a θ

graus. Da figura, podemos ainda escrever que

$$mZ = R \operatorname{sen} \theta. \quad (2.40)$$

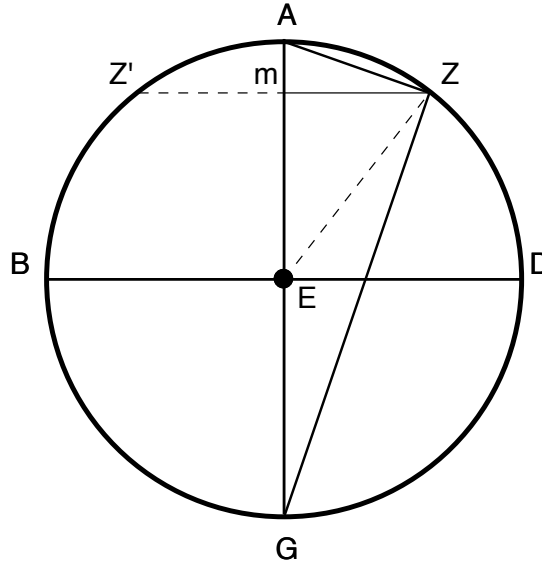


Figura 23. – A circunferência de diâmetro AG , raio $R = EZ$ e a corda $Z'Z$ correspondente ao arco $Z'AZ$. Observe que $mZ = R \operatorname{sen}(AZ)$.

Agora consideremos a área do triângulo AZG , inscrito na circunferência $ABGD$:

$$\begin{aligned} \Delta AZG &= \frac{1}{2} AZ \cdot ZG, \\ &= \frac{1}{2} AG \cdot mZ. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Portanto, podemos estabelecer a igualdade

$$\frac{1}{mZ} = \frac{AG}{AZ \cdot ZG}. \quad (2.42)$$

Como as cordas AZ e ZG são menores do que os seus respectivos arcos, podemos então afirmar que

$$\frac{1}{mZ} > \frac{AG}{(\operatorname{arc}AZ) \cdot (\operatorname{arc}ZG)}. \quad (2.43)$$

Para igualar o lado esquerdo de (2.43) ao seu lado direito, vamos agora admitir que deve ser satisfeita a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \frac{1}{mZ} &= \frac{x \cdot AG}{(\operatorname{arc}AZ) \cdot (\operatorname{arc}ZG)} + y, \\ &= \frac{2xR}{\theta(180 - \theta)} + y, \end{aligned} \quad (2.44)$$

onde x e y são constantes a serem determinadas. Substituindo (2.42) em (2.44) obtemos então

$$R \operatorname{sen} \theta = \frac{\theta (180 - \theta)}{2xR + y\theta (180 - \theta)}. \quad (2.45)$$

Consideremos, agora, dois valores particulares de θ como, por exemplo, 30° e 90° para os quais conhecemos os valores exatos dos senos correspondentes. Assim, podemos determinar as constantes x e y com a ajuda da equação (2.45). Desta forma, encontramos:

$$2xR = \frac{40500}{4R}, \quad (2.46)$$

$$y = -\frac{1}{4R}. \quad (2.47)$$

Finalmente, substituindo esses valores para x e y na equação (2.45), obtemos a fórmula de Bhaskara para a determinação do seno de um dado ângulo, com a precisão desejada:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{4\theta (180 - \theta)}{40500 - \theta (180 - \theta)}. \quad (2.48)$$

Como podemos observar da Tabela 6 e da figura 24, esta aproximação algébrica relativamente simples para a determinação dos senos, descoberta por Bhaskara I no século VII (GUPTA, 1967), é surpreendentemente acurada em relação aos valores dos senos calculados com a fórmula de Euler, criada mil anos mais tarde.

Tabela 6. – Tabela de senos para diferentes ângulos θ , conforme calculado pela fórmula de Bhaskara, $\operatorname{sen}_B(\theta)$, e pela fórmula de Euler, $\operatorname{sen}(\theta)$. Também estão indicadas as incertezas correspondentes na determinação dos senos se a incerteza no valor do ângulo for igual a $\delta\theta = 0.2^\circ$.

$\theta(^{\circ})$	$\operatorname{sen}_B \theta$	$\operatorname{sen} \theta$
0,0(2)	0,000(4)	0,000(4)
10,0(2)	0,175(4)	0,174(3)
20,0(2)	0,343(4)	0,342(3)
30,0(2)	0,500(5)	0,500(3)
40,0(2)	0,642(5)	0,643(3)
50,0(2)	0,765(5)	0,766(2)
60,0(2)	0,865(5)	0,866(2)
70,0(2)	0,939(5)	0,940(1)
80,0(2)	0,985(6)	0,985(1)
90,0(2)	1,000(6)	1,000(0)

A título de comparação, para o cálculo dos senos pela fórmula de Euler empregamos a equação

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (2.49)$$

É interessante lembrar que, no nosso caso, os ângulos estão em graus. Assim, para calcular o seno do ângulo θ com a fórmula de Euler, temos que primeiramente dividi-lo por 180°

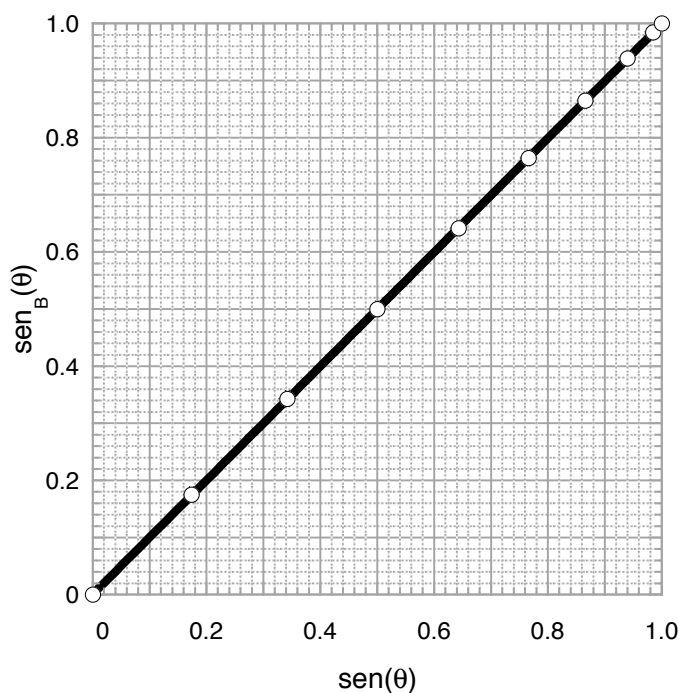


Figura 24. – Seno do ângulo θ como determinado pela fórmula de Bhaskara, equação (2.48), vs. seno do mesmo ângulo, como determinado pela fórmula de Euler.

e, em seguida, multiplicá-lo por π . Este procedimento exige que usemos o valor de π com muitas casas decimais, de forma a realizar um cálculo preciso dos diferentes termos da série e, ao final, determinar o mais acuradamente possível o valor desejado para o seno.

Uma rápida investigação da Tabela 6 nos revela que a fórmula de Bhaskara é discrepante da fórmula de Euler a partir somente da terceira casa decimal. Mais ainda, para erros da ordem do décimo de grau na medida angular, esta discrepância é oculta pela incerteza da medida.

Desse modo, a fórmula de Bhaskara se apresenta como uma fórmula bastante conveniente para propósitos práticos, particularmente quando lembramos que foi somente em 1622, na Inglaterra, que William Oughtred, um pastor anglicano, colocou lado a lado duas régua de madeira com escalas logarítmicas e criou a primeira régua de cálculo que se tem notícia. Acrescente-se, ainda, que usamos as mesmas régua de cálculo de Oughtred até os anos setenta do século passado e as primeiras calculadoras de bolso só começaram a ser produzidas comercialmente a partir de 1947 (STOLL, 2004; STOLL, 2006).

2.8 A lei da refração atual

Agora que sabemos como determinar os valores do seno trigonométrico com a fórmula de Bhaskara, para qualquer ângulo que consideremos, vamos então determinar a posição angular do objeto a partir da posição angular da sua imagem e considerando os respectivos senos. Inicialmente representamos geometricamente a formação da imagem como indicado na figura 25.

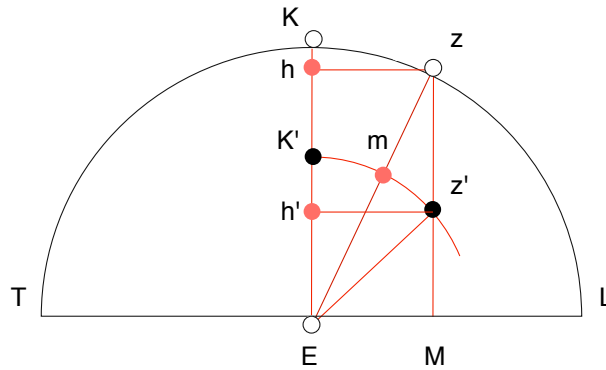


Figura 25. – Representação da formação de imagens da primeira atividade, com o semidisco que representa o dioptro ar-acrílico. Observe as posições K' e z' das imagens dos objetos em K e z , em relação a E , e suas respectivas localizações, indicadas pelos círculos pretos. Observe também a decomposição dos diferentes orientações em relação a EK e à face TL .

Se as posições z e z' estão sobre a mesma perpendicular zM , então podemos escrever que

$$\frac{\text{sen } \theta_1}{\text{sen } \theta_2} = \frac{Ez}{Ez'} = \frac{1}{k}, \quad (2.50)$$

onde $\theta_1 = Kz$ e $\theta_2 = K'z'$ são, respectivamente, a orientação angular do objeto e da imagem e k é um parâmetro a ser determinado, que pode depender ou não da posição angular da imagem. Neste caso, o comportamento do parâmetro k pode ser estabelecido investigando-se a razão entre $\text{sen } \theta_1$ e $\text{sen } \theta_2$.

Apresentamos na Tabela 7 as medidas para a posição angular da imagem, θ_2 , em função do ângulo da posição angular do objeto, θ_1 , para os dioptros ar-acrílico e ar-água, e o objeto é observado a partir do meio menos denso (o ar) para o mais denso (o acrílico ou a água). Incluímos também os seus respectivos senos, determinados a partir da fórmula de Bhaskara. Estas medidas estão representadas no gráfico da figura 26.

Como podemos concluir da figura 26 que, para o dioptro ar-acrílico e ar-água — e o objeto sendo observado a partir do meio menos denso (o ar) para o mais denso (o acrílico ou a água) —, temos que o arco KZ é sempre menor do que o arco $K'z'$ e, por conseqüência, a posição angular da imagem, θ_2 , é sempre maior do que a posição angular do objeto, θ_1 .

Assim, podemos afirmar que a linha guia para a observação do objeto em z foi refratada: ela sofreu um desvio na interface entre o ar e o acrílico ou entre o ar e a água.

Tabela 7. – Medidas para a posição angular da imagem, θ_2 e a posição angular do objeto, θ_1 , para o diopetro ar-acrílico quando o objeto é observado a partir do meio menos denso (o ar) para o mais denso (o acrílico ou a água). Incluímos também os seus respectivos senos, determinados a partir da fórmula de Bhaskara.

ar-acrílico			
$\theta_2(^{\circ})$	$\theta_1(^{\circ})$	$\text{sen}_B \theta_2$	$\text{sen}_B \theta_1$
10,0(2)	7,0(2)	0,175(3)	0,123(3)
20,0(2)	14,0(2)	0,343(3)	0,244(3)
30,0(2)	19,5(2)	0,500(3)	0,335(3)
40,0(2)	25,0(2)	0,642(3)	0,423(3)
50,0(2)	31,0(2)	0,765(2)	0,515(3)
60,0(2)	35,0(2)	0,865(2)	0,573(3)
70,0(2)	39,0(2)	0,939(1)	0,628(3)
80,0(2)	42,0(2)	0,985(1)	0,668(3)
ar-água			
$\theta_2(^{\circ})$	$\theta_1(^{\circ})$	$\text{sen}_B \theta_2$	$\text{sen}_B \theta_1$
10,0(2)	9,0(2)	0,175(3)	0,158(3)
20,0(2)	16,0(2)	0,343(3)	0,277(3)
30,0(2)	23,0(2)	0,500(3)	0,392(3)
40,0(2)	29,5(2)	0,642(3)	0,492(3)
50,0(2)	36,0(2)	0,765(2)	0,587(3)
60,0(2)	41,0(2)	0,865(2)	0,655(3)
70,0(2)	44,5(2)	0,939(1)	0,700(2)
80,0(2)	49,0(2)	0,985(1)	0,753(2)

Portanto, o segmento de reta que orientava a visão do objeto na direção Ez foi encurvada para a direção Ez' pela quantidade $\Delta\theta = \text{asen} \theta_2 - \text{asen} \theta_1$, de modo a observarmos a imagem do objeto em z' .

Observamos da figura 26 que o seno da posição angular do objeto, $\text{sen} \theta_1$, varia linearmente com a posição angular da imagem do objeto, $\text{sen} \theta_2$. Desse modo, podemos escrever que

$$\text{sen} \theta_1 = \frac{1}{k} \text{sen} \theta_2, \quad (2.51)$$

onde k é uma constante de valor aproximado $1/0.74(1)$ e $1/0.67(1)$ para o diopetro ar-água e para o diopetro ar-acrílico, respectivamente. Observamos ainda que a refração é maior para o menor valor de k . Deste modo, podemos definir o índice n tal que

$$n = \frac{1}{0.76(1)} \approx 1.32(2) \quad (2.52)$$

e

$$n = \frac{1}{0.67(1)} \approx 1.49(2). \quad (2.53)$$

para o diopetro ar-água e para o diopetro ar-acrílico, respectivamente, e elas caracterizam o grau de refração causado pelo diopetro. Esta constante corresponde ao inverso do coefi-

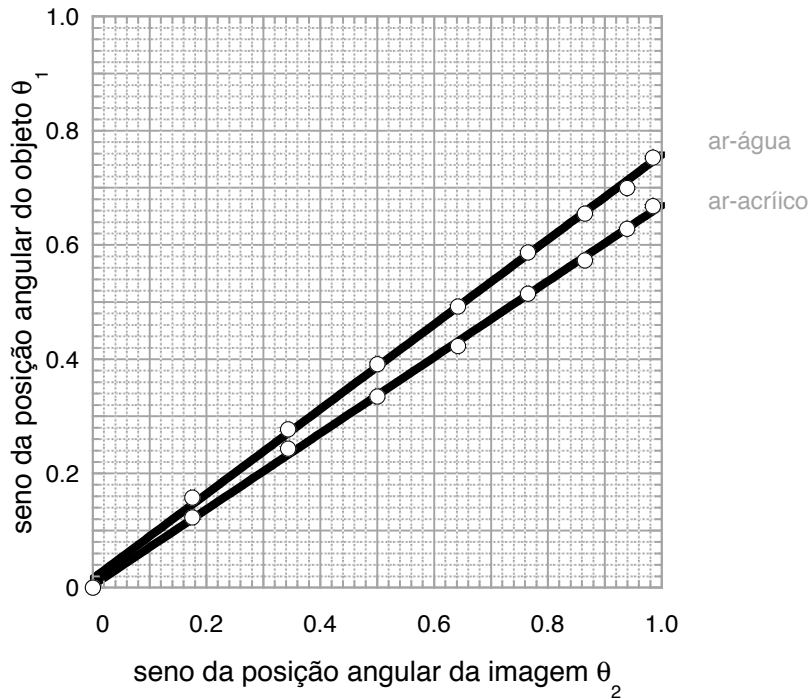


Figura 26. – Seno das medidas para a posição angular do objeto, θ_1 , vs. seno da posição angular da imagem, θ_2 , para o diopetro ar-acrílico e ar-água, onde o objeto é observado a partir do meio menos denso (o ar) para o mais denso (o acrílico ou a água).

ciente angular da equação (2.51), é determinada pela triangulação a partir do gráfico da figura 26. Ela é denominada *índice de refração* do material que constitui o diopetro.

Portanto, esta análise revela que a razão entre o seno das medidas da posição angular da imagem e do objeto correspondente, $\text{sen } \theta_1 / \text{sen } \theta_2$, é uma constante que determina o índice de refração do material. Esta é a lei da refração estabelecida por Snel, no início do século XVII, a partir da análise dos seus experimentos.

Desse modo, a posição angular do objeto, θ_1 , é dada pela expressão

$$\theta_1 = \text{asen}(n \text{ sen } \theta_2). \quad (2.54)$$

Portanto, conhecendo-se o índice de refração do diopetro n e a posição angular θ_2 da imagem, o lado direito da equação (2.3), a posição angular do objeto, θ_1 , fica completamente determinada.

Lembremos ainda, como discutimos no início da Seção 2.3, que a máxima posição angular θ_1 deve ser igual a 90° . Naturalmente, isso só poderá acontecer quando

$$\text{sen } \theta_2 = \frac{1}{n} \quad (2.55)$$

ou, ainda,

$$\theta_2 = \text{asen}\left(\frac{1}{n}\right). \quad (2.56)$$

Para os dioptros ar-acrílico e ar-água, temos então $\theta_{c \text{ ar-ac}} = \text{asen}(0,67)$ e $\theta_{c \text{ ar-ag}} = \text{asen}(0,74)$, respectivamente. Consultando a Tabela 7 podemos determinar estes ângulos por interpolação. Para o diopetro ar-acrílico obtemos

$$\theta_{c \text{ ar-ac}} = 40,0(2) + \frac{50,0 - 40,0}{0,765 - 0,642}(0,67 - 0,642) = 42(2). \quad (2.57)$$

Para o diopetro ar-acrílico obtemos

$$\theta_{c \text{ ar-ag}} = 40,0(2) + \frac{50,0 - 40,0}{0,765 - 0,642}(0,74 - 0,642) = 48(2). \quad (2.58)$$

Apresentamos na Tabela 8 as medidas para a posição angular da imagem, θ_2 , em função do ângulo da posição angular do objeto, θ_1 , para o diopetro ar-acrílico e o objeto é observado a partir do meio menos denso (o ar) para o mais denso (o acrílico ou a água). Incluímos também os seus respectivos senos, determinados a partir da fórmula de Bhaskara. Estas medidas estão representadas no gráfico da figura 27.

Tabela 8. – Medidas para a posição angular da imagem, θ_2 e a posição angular do objeto, θ_1 , para o diopetro acrílico-ar quando o objeto é observado a partir do meio menos denso (o ar) para o mais denso (o acrílico ou a água). Incluímos também os seus respectivos senos, determinados a partir da fórmula de Bhaskara.

acrílico-ar			
$\theta_2(^{\circ})$	$\theta_1(^{\circ})$	$\text{sen}_B \theta_2$	$\text{sen}_B \theta_1$
6,5(2)	10,0(2)	0,115(4)	0,175(3)
13,0(2)	20,0(2)	0,227(3)	0,343(3)
19,5(2)	30,0(2)	0,335(3)	0,500(3)
25,5(2)	40,0(2)	0,431(3)	0,642(3)
31,5(2)	50,0(2)	0,522(3)	0,765(2)
36,0(2)	60,0(2)	0,587(3)	0,865(2)
39,0(2)	70,0(2)	0,628(3)	0,939(1)
42,5(2)	80,0(2)	0,674(3)	0,985(1)
acrílico-água			
$\theta_2(^{\circ})$	$\theta_1(^{\circ})$	$\text{sen}_B \theta_2$	$\text{sen}_B \theta_1$
8,0(2)	10,0(2)	0,141(4)	0,175(3)
17,0(2)	20,0(2)	0,294(3)	0,343(3)
25,5(2)	30,0(2)	0,431(3)	0,500(3)
34,5(2)	40,0(2)	0,566(3)	0,642(3)
42,5(2)	50,0(2)	0,674(3)	0,765(2)
50,0(2)	60,0(2)	0,765(2)	0,865(2)
56,5(2)	70,0(2)	0,833(2)	0,939(1)
61,0(2)	80,0(2)	0,873(2)	0,985(1)

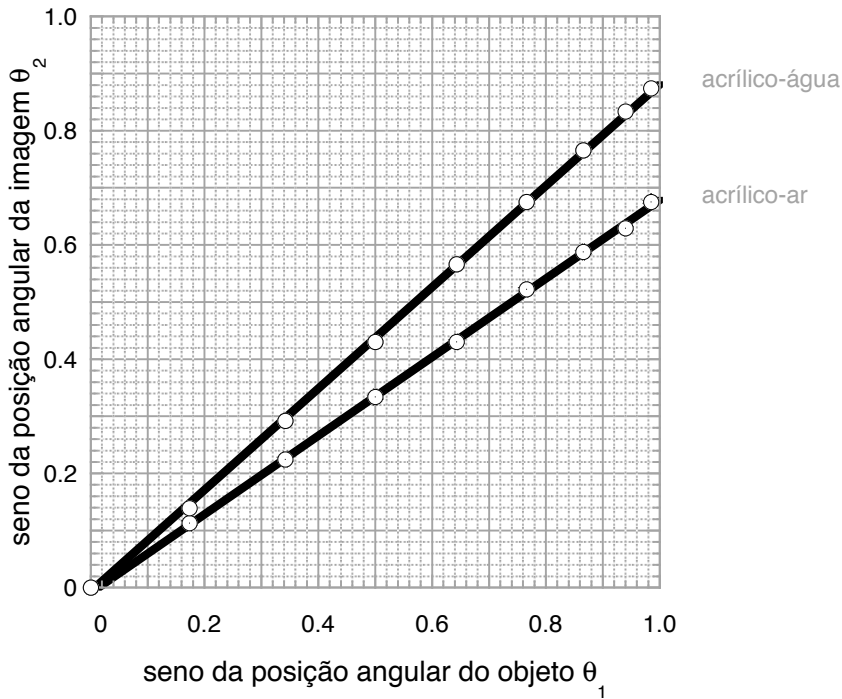


Figura 27. – Seno das medidas para a posição angular do objeto, θ_1 , vs. seno da posição angular da imagem, θ_2 , para o dióptro ar-acrílico e ar-água, onde o objeto é observado a partir do meio mais denso (o acrílico) menos denso (o ar) para o menos denso (o ar ou a água).

Da figura 27 observamos que o coeficiente angular para a formação de imagens com o dióptro acrílico-ar tem o mesmo coeficiente que para o caso ar-acrílico. Assim, podemos escrever que

$$\text{sen } \theta_2 = \frac{1}{n_{\text{ar-ac}}} \text{sen } \theta_1 \quad (2.59)$$

e, por conseqüência, reobtemos o mesmo resultado apresentado em (2.54) que relaciona as posições angulares da imagem e do objeto correspondente. Se fizermos a analogia para o caso acrílico-água, devemos também ter que

$$\text{sen } \theta_2 = \frac{1}{n_{\text{ac-ag}}} \text{sen } \theta_1. \quad (2.60)$$

Como o objeto está na água e a sua imagem é percebida através do acrílico, podemos fazer a seguinte conjectura: o índice de refração do dióptro acrílico-água deve ser descrito pela razão

$$n_{\text{ac-ag}} = \frac{n_{\text{ac}}}{n_{\text{ag}}}. \quad (2.61)$$

Novamente, da figura 27, obtemos que $n_{\text{ac-ag}} = 1/0.88(2) \approx 1,14(2)$ e, desse modo,

$$n_{\text{ac}} \text{sen } \theta_2 = n_{\text{ag}} \text{sen } \theta_1. \quad (2.62)$$

Podemos, assim, resumir algumas propriedades da refração, a partir dos experimentos realizados. A quantidade de encurvamento, o efeito da refração, é o mesmo quando observamos o objeto mergulhado em um determinado meio com um outro meio interposto entre o observador e o objeto. O que difere é o sentido do encurvamento. Quando observamos o objeto em um determinado meio, a partir de um meio menos denso, a imagem se afasta da normal à interface entre os dois meios. Quando o objeto é observado a partir de um meio mais denso, a imagem se aproxima desta normal.

É importante frisar que os valores determinados para n correspondem ao índice de refração relativo entre os materiais que compõe o dioptro. No caso dos nossos dioptros, formados com o ar, podemos definir os valores encontrados como valores relativos ao índice de refração do ar.

Referências

ANDERSON, M.; KATZ, V.; WILSON, R. (Ed.). *Sherlock Holmes in Babylon and other tales of mathematical history*. Washington: The Mathematical Association of America, 2004.

COHEN, M.; DRABKIN, I. *A source book in Greek science*. Harvard University Press, 1958. (Source books in the history of the sciences). Disponível em: <[http://books-google.com.br/books?id=E VX7ZAF CWg0C](http://books.google.com.br/books?id=E VX7ZAF CWg0C)>.

GUPTA, R. Bhaskara I's approximation to sine. *Indian Journal of History of Science*, v. 2, p. 121–136, 1967.

STOLL, C. The curious history of the first pocket calculator. *Scientific American*, v. 290, n. 1, p. 92–99, 2004.

STOLL, C. When slide rules ruled. *Scientific American*, v. 294, n. 5, p. 80–87, 2006.