



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO  
Instituto de Física  
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física  
Mestrado Profissional em Ensino de Física

## **Uma Mecânica discreta para o ensino**

Servio Tulio Lunguinho de Sousa

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Orientadores:  
Filadelfo Cardoso Santos  
Vitorvani Soares

Rio de Janeiro  
Outubro de 2013

**Uma Mecânica discreta  
para o ensino**

Servio Tulio Lunguinho de Sousa

Orientadores:

Filadelfo Cardoso Santos

Vitorvani Soares

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Aprovada por:

---

Presidente, Prof. Vitorvani Soares

---

Prof. Antonio Carlos Fontes dos Santos

---

Prof. José Abdalla Helayel Neto

Rio de Janeiro  
Outubro de 2013

## Ficha catalográfica

S719m Sousa, Servio Tulio Lunguinho de  
Uma Mecânica discreta para o ensino / Servio Tulio Lunguinho de Sousa. – Rio de Janeiro: UFRJ/IF, 2013.

xiv, 165 f. : il. ; 30 cm.

Orientadores: Filadelfo Cardoso Santos; Vitorvani Soares.

Dissertação (mestrado) – UFRJ / Instituto de Física / Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, 2013.

Referências Bibliográficas: f. 79.

1. Ensino de Física. 2. Cinemática. 3. Mecânica Discreta.  
I. Santos, Filadelfo Cardoso. II. Soares, Vitorvani. III. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Física, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física. IV. Uma Mecânica discreta para o ensino.

*Dedico este trabalho à Marcia.*

## **Agradecimentos**

Agradeço à minha esposa Marcia, aos meus filhos Ana Luiza e Isaac Tulio pela paciência e compreensão quando estive ausente por estar dedicando tempo na elaboração deste trabalho. Agradeço aos meus orientadores professor Filadelfo Cardoso Santos e professor Vitorvani Soares pela ajuda e dedicação. Agradeço aos meus amigos que sempre acreditaram em mim.

# RESUMO

## Uma Mecânica discreta para o ensino

Servio Tulio Lunguinho de Sousa

Orientadores:

Filadelfo Cardoso Santos

Vitorvani Soares

Resumo da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Na Mecânica estudada no Ensino Médio, frequentemente os alunos estudam uma série de problemas de movimentos sem resolvê-los. Isso se deve ao fato de a segunda lei de Newton ser um tipo especial de equação, cuja solução depende de uma série de regras de cálculo que não está presente nos conteúdos estudados no Ensino Médio. Nosso trabalho propõe regras de discretização do movimento que permitem a obtenção de soluções para problemas de dinâmica a partir da aplicação da segunda lei de Newton. Estas regras são acessíveis aos alunos do Ensino Médio e permitem solucionar problemas tradicionais e os não tão tradicionais que não são abordados nos livros didáticos utilizados neste nível de ensino. Apresentamos as soluções dos problemas que permitem a construção de gráficos pelos próprios alunos. Para a construção dos gráficos, pode-se utilizar calculadora e papel milimetrado ou computadores. Neste trabalho usamos o Excel para construir os gráficos apresentados nas figuras. Se o professor privilegiar o uso de computador será necessária a utilização de um programa que permita a geração dos valores das grandezas envolvidas no estudo do movimento, a partir das soluções obtidas pelos alunos ao aplicarem a segunda lei de Newton, e que também construa os gráficos com os valores obtidos.

Palavras chave: Ensino de Física, Cinemática, Mecânica Discreta.

Rio de Janeiro  
Outubro de 2013

# ABSTRACT

## **A discrete Mechanics for an undergraduate course**

Servio Tulio Lunguinho de Sousa

Supervisors:

Filadelfo Cardoso Santos

Vitorvani Soares

Abstract of master's thesis submitted to Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, in partial fulfillment of the requirements for the degree Mestre em Ensino de Física.

The study of Mechanics in Brazilian High Schools often involves studying a series of problems of movement without really solving them. This is due to the fact that Newton's Second Law is a special type of equation, whose solution depends on a series of calculus, which is not present in the High Schools curricula. In this thesis, we propose rules of discretization of movement that allow us to obtain solutions to problems of Dynamics by applying Newton's Second Law. These rules are accessible to high school students and allow us to solve both traditional and not so traditional problems that are presented in High School syllabus. We present the solutions to these problems that allow the students themselves to draw the graphics. In order to draw the graphics, we can use calculators and graph papers or even a personal computer. In this thesis, we made use of MS Excel in order to draw the graphics. If the teacher prefers to use computers, software is needed in order to generate the values of quantities involved in the study of movement, given the solutions by the application of Newton's Second Law and in order to draw the graphics.

Keywords: Physics education, Kinematics, Discrete mechanics.

Rio de Janeiro  
Outubro de 2013

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>O Ensino Médio</b>	<b>2</b>
2.1	Introdução	2
2.2	O Ensino Médio segundo os PCNEM	2
2.3	A Física no Ensino Médio	4
2.4	A Mecânica no Ensino Médio	5
<b>3</b>	<b>O Método da discretização</b>	<b>23</b>
3.1	Introdução	23
3.2	A velocidade e a aceleração como grandezas físicas discretas	25
3.3	A conservação de energia e a discretização	28
<b>4</b>	<b>Aplicações do método da discretização</b>	<b>33</b>
4.1	Movimento uniforme	33
4.2	Movimento sob a ação de uma força constante	34
4.3	Movimento retilíneo com atrito	40
4.4	Oscilador harmônico	48
<b>5</b>	<b>Mais aplicações da Física Discreta</b>	<b>60</b>
5.1	Movimento com atrito proporcional ao quadrado da velocidade	60
5.2	Movimento de projéteis	61
5.3	Oscilador harmônico com atrito e em duas dimensões	66
<b>6</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>77</b>
	<b>Referências</b>	<b>79</b>
<b>A</b>	<b>Programação</b>	<b>80</b>
A.1	Movimento retilíneo uniforme	80
A.2	Movimento de queda livre	84
A.3	Queda com atrito	88
A.3.1	Equações discretas sem o critério de conservação	88
A.3.2	Equações discretas com critério de conservação	94
A.4	Oscilador harmônico	100
A.4.1	Equações discretas sem critério de conservação	100
A.4.2	Equações discretas com critério de conservação	106
A.5	Movimento com atrito proporcional ao quadrado da velocidade	109



A.6	Movimento de projéteis . . . . .	115
A.6.1	Movimento de projéteis com atrito desprezível . . . . .	115
A.6.2	Movimento de projéteis com atrito . . . . .	122
A.7	Exercício com oscilador . . . . .	135
A.8	Oscilador com atrito cinético . . . . .	137
A.9	Oscilador amortecido . . . . .	140
A.10	Oscilador em duas dimensões . . . . .	143
<b>B</b>	<b>Números complexos . . . . .</b>	<b>150</b>

## Lista de ilustrações

Figura 1	Duas partículas em movimento . . . . .	7
Figura 2	Duas partículas em movimento na direção vertical. . . . .	7
Figura 3	Carros I e II em movimento. . . . .	8
Figura 4	Movimento em linha reta. . . . .	9
Figura 5	Velocidade média. . . . .	9
Figura 6	Velocidade instantânea. . . . .	10
Figura 7	Aceleração média. . . . .	12
Figura 8	Aceleração instantânea. . . . .	12
Figura 9	Posição em função do tempo para um móvel em MRU. . . . .	13
Figura 10	Velocidade em função do tempo para um móvel em MRU. . . . .	14
Figura 11	Velocidade em função do tempo. . . . .	14
Figura 12	Representação gráfica da velocidade em função do tempo. . . . .	15
Figura 13	Velocidade em função do tempo de um corpo em MRUV. . . . .	16
Figura 14	Representação gráfica do vetor deslocamento. . . . .	17
Figura 15	Representação gráfica do vetor variação da posição. . . . .	18
Figura 16	Vetor velocidade instantânea. . . . .	18
Figura 17	Trajetória de um projétil. . . . .	20
Figura 18	Oscilador harmônico. . . . .	24
Figura 19	Partícula em movimento retilíneo. . . . .	26
Figura 20	Valores discretos das velocidades no plano $tx$ . . . . .	27
Figura 21	Valores discretos das velocidades no plano $tv$ . . . . .	27
Figura 22	Velocidade discreta de um corpo em movimento uniforme. . . . .	34
Figura 23	Solução discreta do movimento com velocidade constante. . . . .	34
Figura 24	Velocidades discretas de um corpo em queda livre. . . . .	37
Figura 25	Solução discreta de um corpo em queda livre. . . . .	38
Figura 26	Velocidades discretas de corpos em queda. . . . .	42
Figura 27	Movimento de um corpo em queda considerando o seu atrito. . . . .	44
Figura 28	Solução discreta do movimento em queda com as equações (4.16) e (4.20). . . . .	46
Figura 29	O sistema massa-mola. . . . .	48
Figura 30	O número complexo. . . . .	50
Figura 31	Solução discreta do movimento de um oscilador harmônico. Caso I. . .	52
Figura 32	Velocidades discretas do oscilador harmônico. . . . .	55
Figura 33	Solução discreta do movimento do oscilador harmônico. Caso II. . . .	56

Figura 34	Velocidades discretas de um corpo em queda submetido a força proporcional ao quadrado da velocidade. . . . .	61
Figura 35	Soluções do movimento em queda submetidos a força proporcional ao quadrado da velocidade. . . . .	61
Figura 36	Representação da trajetória de um projétil. . . . .	63
Figura 37	Trajétória discreta de um projétil. . . . .	63
Figura 38	Representação da trajetória de um projétil lançado com velocidade $v_0$ . Neste problema a força de arrasto esta sendo considerada. . . . .	64
Figura 39	Trajétórias de um projétil considerando-se a ação do ar. . . . .	65
Figura 40	O sistema massa-mola. . . . .	66
Figura 41	Solução de um problema de movimento de OHS. . . . .	67
Figura 42	Nossa solução do problema do movimento de OHS. . . . .	69
Figura 43	Solução discreta do movimento de um oscilador harmônico submetido ao atrito cinético. . . . .	70
Figura 44	Sistema massa-mola submetido a ações externas. . . . .	71
Figura 45	Solução discreta do problema de movimento de um oscilador submetido à ação de uma força resistiva. . . . .	73
Figura 46	Oscilador em duas dimensões. . . . .	73
Figura 47	Solução discreta do problema de movimento de um oscilador harmônico em duas dimensões. . . . .	75
Figura 48	Oscilação vertical do oscilador da figura 46. . . . .	76
Figura 49	Janela do Excel. . . . .	82
Figura 50	Planilha Excel para um movimento retilíneo uniforme. . . . .	83
Figura 51	Planilha Excel para a queda livre de uma massa. Caso I. . . . .	85
Figura 52	Planilha Excel para a queda livre de uma massa. Caso II. . . . .	87
Figura 53	Planilha Excel para a queda livre de uma massa. Caso I. $\alpha = 0$ . . .	90
Figura 54	Planilha Excel para a queda livre de uma massa. Caso I. $\alpha = 0,2$ . .	91
Figura 55	Planilha Excel para a queda livre de uma massa. Caso I. $\alpha = 0,6$ . .	92
Figura 56	Planilha Excel para a queda livre de uma massa. Caso I. $\alpha = 1,25$ .	93
Figura 57	Planilha Excel para a queda livre de uma massa. Caso II. $\alpha = 0$ . .	95
Figura 58	Planilha Excel para a queda livre de uma massa. Caso II. $\alpha = 0,2$ .	97
Figura 59	Planilha Excel para a queda livre de uma massa. Caso II. $\alpha = 0,6$ .	98
Figura 60	Planilha Excel para a queda livre de uma massa. Caso II. $\alpha = 1,25$ .	99
Figura 61	Solução do movimento de OHS. Caso I. $\tau_{aI} = 0,02$ . . . . .	102
Figura 62	Solução do movimento de OHS. Caso I. $\tau_{aI} = 0,01$ . . . . .	103
Figura 63	Solução do movimento de OHS. Caso I. $\tau_{aI} = 0,006$ . . . . .	104
Figura 64	Solução do movimento de OHS. Caso I. $\tau_{aI} = 0,001$ . . . . .	105
Figura 65	Solução do movimento de OHS. Caso II. $\tau_{aI} = 0,01$ . . . . .	108
Figura 66	Planilha Excel para o movimento de Queda livre de uma massa. . . .	110

Figura 67	Planilha Excel para o movimento de queda. Força resistiva proporcional ao quadrado da velocidade do corpo. alfa: $\text{alfa1} = 0,025$ . . . . .	112
Figura 68	Planilha Excel para o movimento de queda. Força resistiva proporcional ao quadrado da velocidade do corpo. alfa: $\text{alfa1} = 0,075$ . . . . .	113
Figura 69	Planilha Excel para o movimento de queda. Força resistiva proporcional ao quadrado da velocidade do corpo. alfa: $\text{alfa1} = 0,125$ . . . . .	114
Figura 70	Comportamentos das componentes horizontais da velocidade e posição do projétil. Neste caso consideramos desprezível a ação do ar. . . . .	117
Figura 71	Comportamentos das componentes verticais da velocidade e posição do projétil. Neste caso consideramos desprezível a ação do ar. . . . .	119
Figura 72	Trajectoria do projétil com a ação do ar desprezível. . . . .	121
Figura 73	Componentes horizontais da velocidade e posição de um projétil em movimento com atrito: $\text{alfa1} = 0,1$ . . . . .	124
Figura 74	Componentes vertical da velocidade e posição de um projétil em movimento com atrito: $\text{alfa1} = 0,1$ . . . . .	126
Figura 75	Trajectoria de um projétil em movimento com atrito: $\text{alfa1} = 0,1$ . . . . .	128
Figura 76	Componentes horizontais da velocidade e posição de um projétil em movimento com atrito: $\text{alfa2} = 0,2$ . . . . .	129
Figura 77	Componentes verticais da velocidade e posição de um projétil em movimento com atrito: $\text{alfa2} = 0,2$ . . . . .	130
Figura 78	Trajectoria de um projétil em movimento com atrito: $\text{alfa2} = 0,2$ . . . . .	131
Figura 79	Componentes horizontais da velocidade e posição de um projétil em movimento com atrito: $\text{alfa3} = 0,3$ . . . . .	132
Figura 80	Componentes verticais da velocidade e posição de um projétil em movimento com atrito: $\text{alfa3} = 0,3$ . . . . .	133
Figura 81	Trajectoria de um projétil em movimento com atrito: $\text{alfa3} = 0,3$ . . . . .	134
Figura 82	Velocidade e posição em função do tempo de um oscilador harmônico simples. . . . .	136
Figura 83	Velocidade e posição em função do tempo de um oscilador harmônico submetido a força de atrito cinético. . . . .	139
Figura 84	Velocidade e posição em função do tempo de um oscilador harmônico amortecido. . . . .	142
Figura 85	Componentes horizontais da velocidade e da posição em função do tempo do problema do oscilador em duas dimensões. . . . .	145
Figura 86	Componentes verticais da velocidade e da posição em função do tempo do problema do oscilador em duas dimensões. . . . .	147
Figura 87	Oscilador em duas dimensões. . . . .	149

# Lista de tabelas

Tabela 1	Tabela com valores das posições de um oscilador considerando as equações (5.9) e (5.10). . . . .	69
Tabela 2	Tabela com valores discretos das posições do oscilador da figura 44. . .	72

# 1 Introdução

A Física discreta pode ser formulada de duas formas: a primeira admite que a própria natureza do espaço e do tempo é discreta e a segunda surge do resultado de um processo de discretização de relações contínuas. Em nosso trabalho consideramos apenas a segunda formulação. A experiência nos mostra que é possível estudar uma grande variedade de problemas físicos recorrendo a Física discreta, sem que haja grandes divergências nos resultados quando comparados com métodos tradicionais. A vantagem é que na Física discreta a álgebra envolvida é muito mais simples e permite que analisemos um número maior de problemas no Ensino Médio.

Concentramos nossa atenção na área da Física que estuda o movimento dos corpos: a Mecânica. Dedicamos uma importância especial para a Mecânica estudada no Ensino Médio. Entretanto, as técnicas e métodos de solução de problemas expostas neste trabalho não se limitam ao universo do Ensino Médio. Entendemos que nossa abordagem se aplica ao estudo introdutório da Física em segmentos iniciais do Ensino Superior. Como recorreremos à Física discreta para o estudo de movimentos, nos sentimos a vontade ao considerar uma Mecânica discreta. Assim, estudamos problemas de movimento com equações discretizadas, tais como a expressão matemática da segunda lei de Newton e as equações que definem a aceleração e a velocidade como grandezas discretas.

No decorrer deste trabalho resolvemos problemas de movimento que, tradicionalmente, são estudados no Ensino Médio e outros que não são considerados neste nível de ensino. Alguns problemas de Mecânica são abordados no Ensino Médio mesmo sem a obtenção de uma solução para o problema. Muitas vezes a solução do problema e sua representação gráfica são dadas aos alunos, sem que haja o envolvimento por parte do estudante com os processos de solução e de construção de suas representações gráficas. Os alunos, então, têm como tarefa decorar as soluções e suas representações gráficas, com o objetivo de resolver questões encontradas em livros didáticos de Física utilizados nas aulas.

No nosso trabalho resolvemos estes problemas aplicando a segunda lei de Newton discretizada. Portanto, nosso objetivo nesta dissertação é propor e aplicar um conjunto de regras de cálculo que nos permita resolver problemas de dinâmica, seja no contexto do Ensino Médio ou em segmentos iniciais dos cursos de graduação.

## 2 O Ensino Médio

### 2.1 Introdução

São comuns à maioria das pessoas situações nas quais crianças relatam que profissões querem desempenhar quando crescerem. Algumas revelam que desejam ser médico, advogado, policial e outras almejam ser professor. Nestas situações, podemos inferir que essas crianças têm algum adulto como referência. A prática de buscarmos referências para, a partir daí, delinear nossas atitudes é comum e, me parece, intrínseca ao ser humano. Quando expressamos nossas opiniões ou construímos nossos pensamentos e argumentações, normalmente o fazemos pautados por uma informação ou um conjunto delas. Para se construir um “novo” conhecimento é necessário que já exista o “velho”.

Neste momento de minha formação, no qual não disponho de uma quantidade razoável de conhecimento derivado da prática docente, considero importante ter como referência os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) (BRASIL, 2000). Estes Parâmetros cumprem o duplo papel de difundir os princípios de uma reforma curricular e orientar o professor, na busca de novas abordagens e metodologias.

Partindo de princípios definidos pelas Leis de Diretrizes e Bases (LDB) (BRASIL, 1996), o currículo do Ensino Médio assume um novo perfil, apoiado em competências básicas para a inserção de nossos jovens na vida adulta. Tínhamos um ensino descontextualizado, compartimentalizado e baseado no acúmulo de informações. Ao contrário disso, a proposta atual é buscar dar significado ao conhecimento escolar, mediante a contextualização; evitar a compartimentalização, mediante a interdisciplinaridade; e incentivar o raciocínio e a capacidade de aprender.

### 2.2 O Ensino Médio segundo os PCNEM

Os últimos anos têm sido marcados por mudanças no discurso sobre a educação, o ensino e o Ensino Médio. Estas mudanças estão sendo acompanhadas por um novo vocabulário, que inclui conceitos como contextualização, interdisciplinaridade, competências e habilidades. A implantação de novas diretrizes que estão sendo propostas depende do trabalho de incontáveis professores, em suas salas de aula, nas mais diversas realidades. Depende, também, de um processo contínuo de discussão, investigação e atuação, necessariamente permeado do diálogo constante entre todos os envolvidos.

No final de 2002, foram publicados os *PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Linguagens, códigos e suas tecnologias* (PCN+) (BRASIL, 2002). O PCN+ é dirigido aos professores, onde se busca aprofundar a proposta que foi apresentada nos PCNEM (BRASIL, 2000). Entretanto,

O PCNEN não pretende, com isso, impor soluções pois este mesmo documento sugere que elas devem ser construídas dentro de cada realidade escolar, por cada professor em conjunto com a comunidade escolar.

De acordo com o PCN+, o objetivo da escola média deve, nos dias de hoje, estar voltado para a formação de jovens, independente de sua escolaridade futura. Para isto, é necessário mudar o caráter do Ensino Médio, que durante muitos anos foi considerado como uma preparação para o ensino universitário, tendo como objetivo último o sucesso no vestibular. Para que isso ocorra, é necessário fazer mudanças.

Nesse sentido, para estabelecer as condições que possam propiciar uma ação mais integrada, foi proposta uma organização do conhecimento por grandes áreas, reunindo em cada área diversas disciplinas afins. Assim foram definidas três grandes áreas de conhecimento, para permitir uma maior articulação das competências e conteúdos de diferentes disciplinas: 1) Linguagens e Códigos (Português, Língua Estrangeira, Artes, Educação Física, Informática e demais formas de expressão). 2) Ciências da Natureza e Matemática (Biologia, Física, Química e Matemática). 3) Ciências Humanas (História, Geografia e demais áreas das Ciências Humanas, como, por exemplo, Psicologia, Sociologia e Filosofia).

Na busca por um conhecimento mais integrado, cada área não pode ser considerada como um domínio de conhecimento isolado das outras áreas. Ainda que a Física pertença à área de Ciências da Natureza, seu ensino deve também contemplar as dimensões da linguagem e conteúdo humano-social. Essa é uma das faces da interdisciplinaridade desejada. Assim, o trabalho de aprendizagem em cada disciplina deve estar atento ao domínio das outras disciplinas e das outras áreas. E para dar conta desta inter-relação, em cada disciplina podem ser consideradas três dimensões. No caso da Física, uma delas, diz respeito à investigação e compreensão propriamente dita dos fenômenos físicos. A outra, para expressar a relação da Física com a área de linguagens e códigos, diz respeito a questões relativas à representação e comunicação em Física. Finalmente, para estabelecer com mais clareza a relação da Física com as Ciências Humanas, há que considerar-se a contextualização sócio-cultural dos conhecimentos científicos. Essas dimensões devem estar presentes de maneira integrada durante as aulas de Física.

O vasto conhecimento relacionado ao estudo da Física impõe a necessidade de se fazer escolhas quando se pensa em determinar os conteúdos que devem estar presentes no Ensino Médio. Para isso, seria necessário pensar em quais critérios utilizar. Concordando com o PCN+, deve-se tomar como referência o que precisará um jovem para atuar e viver solidariamente em mundo tecnológico, complexo e em permanente transformação. Assim, os critérios básicos referem-se ao que o jovem deve saber e saber fazer, as competências em Física que devem ter para lidar com o seu dia-a-dia, suas aspirações e o seu trabalho. Ou seja, privilegiar competências e habilidades. Entretanto, essas escolhas dependem de cada realidade escolar, e os critérios para estabelecê-las devem levar em conta os processos e



fenômenos físicos de maior relevância no mundo contemporâneo, além de procurar cobrir diferentes campos de fenômenos (Mecânica, Termologia, Óptica e Eletromagnetismo) e diferentes formas de abordagem.

A discussão sobre as competências e os conhecimentos a serem promovidos não pode ocorrer dissociada da discussão sobre as estratégias de ensino e aprendizagem a serem utilizadas em sala de aula, pois são essas estratégias que expressam o que se deseja promover. As mudanças esperadas para o Ensino Médio se concretizam na medida em que as aulas deixam de ser apenas “quadro negro e giz”. É necessário que os conhecimentos se apresentem como desafios cuja solução, por parte dos alunos, envolve mobilização de recursos cognitivos, investimento pessoal e perseverança para uma tomada de decisão.

Mesmo reconhecendo a complexidade da questão, será sempre possível apresentar alguns exemplos, com o objetivo de reforçar o objetivo último que se deseja do trabalho escolar, no que diz respeito mais de perto ao fazer da Física. O conjunto de ideias aqui resumidas é apenas um ponto de partida para uma nova forma de encarar a presença da Física na escola média.

### 2.3 A Física no Ensino Médio

De acordo com o PCN+, a presença do conhecimento de Física na escola média ganhou um novo sentido a partir das diretrizes apresentadas nos PCNEM. Nesta etapa da formação dos estudantes, a Física deve apresentar-se como um conjunto de competências específicas que permitam perceber e lidar com os fenômenos naturais e tecnológicos, presentes tanto no cotidiano mais imediato quanto na compreensão do universo distante, a partir de princípios, leis e modelos por ela construídos. Isso implica, também, a introdução à linguagem própria da Física, que faz uso de conceitos e terminologia bem definidos, além de suas formas de expressão que envolvem, muitas vezes, tabelas, gráficos ou relações matemáticas.

No entanto, as competências para lidar com o mundo físico não têm qualquer significado quando trabalhadas de forma isolada. Competências em Física para a vida se constroem em um presente contextualizado, em articulação com competências de outras áreas, impregnadas de outros conhecimentos. Elas passam a ganhar sentido somente quando colocadas lado a lado, e de forma integrada, com as demais competências desejadas para a realidade dos alunos.

Tradicionalmente, a seleção dos temas a serem abordados no ensino de Física tem sido feita em termos de conceitos considerados centrais em áreas de fenômenos de natureza física diferentes, delimitando os conteúdos de Mecânica, Termologia, Óptica e Eletromagnetismo. Nesta proposta, os critérios de seleção para definir os conteúdos a serem trabalhados restringem-se ao conhecimento e à estrutura da Física, sem levar em consideração o sentido mais amplo da formação desejada.

Esse sentido emerge na medida em que o conhecimento de Física deixa de constituir um objetivo em si mesmo, mas passa a ser compreendido como um instrumento para a compreensão do mundo. Nessa perspectiva, o conhecimento de Física passa a ser, para os estudantes, uma ferramenta a mais em suas formas de agir e pensar.

Os critérios que orientam a ação pedagógica deixam, portanto, de tomar como referência primeira “o que ensinar de Física”, passando a centrar-se em “para que ensinar Física”, explicitando a preocupação em atribuir ao conhecimento um significado no momento mesmo de seu aprendizado.

Esse objetivo mais amplo requer, sobretudo, que os jovens adquiram competências para lidar com as situações que vivenciam ou que venham vivenciar no futuro. Nada mais natural, portanto, que substituir a preocupação central com os conteúdos por uma identificação das competências que, se imagina, eles terão necessidade de adquirir em seu processo de escolaridade Média.

Mas como identificar as competências desejadas? A resposta para esta pergunta passa a ser o problema central quando se pensa na formulação dos conteúdos. Caberá sempre ao professor, dentro das condições específicas nas quais desenvolve seu trabalho, em função do perfil de sua escola e do projeto pedagógico em andamento, selecionar, priorizar, redefinir e organizar os objetivos em torno dos quais faz mais sentido trabalhar.

## 2.4 A Mecânica no Ensino Médio

A Física, no início de seu desenvolvimento, era considerada a ciência que se dedicava a estudar todos os fenômenos que ocorrem na natureza. A palavra Física provém da palavra grega *φύσις*, que significa *natureza*. Daí ter sido esta ciência, durante muitos anos, denominada “Filosofia Natural”. Entretanto, a partir do século XIX, a Física restringiu seu campo, limitando-se a estudar profundamente um menor número de fenômenos, denominados “fenômenos físicos” ( fenômenos mecânicos, térmicos, elétricos e luminosos ), e os fenômenos que dela se destacaram deram origem a outras ciências naturais.

Segundo Máximo e Alvarenga (2005a), no início do desenvolvimento das ciências, os nossos sentidos eram as fontes de informação utilizadas na observação dos fenômenos que ocorrem na natureza. Por isso mesmo o estudo da Física foi se desenvolvendo, subdividindo-se em diversos ramos, cada um deles agrupando fenômenos relacionados com o sentido pelo qual eles eram percebidos. Então surgiram: A Mecânica, o Calor, os Movimentos Ondulatórios, a Ótica, a Eletricidade, o Magnetismo e a Física Moderna.

A Mecânica, que é o que de fato nos interessa neste trabalho, é o ramo da Física que estuda os fenômenos relacionados com o movimento dos corpos. Assim, estamos tratando com fenômenos mecânicos quando estudamos o movimento de queda de um corpo, o movimento dos planetas, ou a colisão de dois automóveis, por exemplo.

No Ensino Médio, o estudo da Mecânica é dividido em duas etapas: o estudo da

Cinemática e o estudo da Dinâmica. Ao estudar Cinemática, o objetivo é descrever os movimentos dos corpos, sem a preocupação de entender suas causas. Assim, tornam-se essenciais as definições de grandezas físicas como velocidade e aceleração. Já no estudo da Dinâmica, o objetivo pretendido é estudar as causas dos movimentos dos corpos. Para isso, são estudadas as “Leis do Movimento” e suas aplicações.

Os primeiros movimentos estudados na Cinemática são os movimentos retilíneos uniforme e uniformemente variado, ambos em uma dimensão. Como já foi mencionado, nesta etapa é necessária a introdução dos conceitos de velocidade e aceleração. Os livros didáticos frequentemente adotados nos cursos de Física no Ensino Médio geralmente valem-se de exemplos, presentes no cotidiano dos alunos, para introduzir o conceito de velocidade. Consideremos o seguinte exemplo (MÁXIMO; ALVARENGA, 2005a, p. 43): Considerando que um carro que se desloca em linha reta em uma estrada percorre uma distância  $d$  durante um intervalo de tempo  $t$ , a velocidade média do carro é definida por meio de

$$v_{\text{méd}} = \frac{d}{t}. \quad (2.1)$$

Esta definição de velocidade, que é muito utilizada na resolução de problemas de movimento no Ensino Médio, limita o estudo de diferentes tipos de movimentos. Se sabemos que a velocidade média de um corpo é de 80 km/h, não sabemos a direção e o sentido do seu movimento e mesmo supondo que seu movimento seja retilíneo não poderíamos determinar sua posição final. Os exemplos abaixo ilustram essas limitações.

**Exemplo 1:** Uma partícula percorre 20.0 m em 2.0 s para leste e uma segunda partícula percorre 20.0 m em 2.0 s para o norte. Os movimentos ocorrem em direções distintas mas, nos dois casos, as velocidades definidas como em (2.1) são iguais a

$$v_{\text{méd}} = \frac{20.0 \text{ m}}{2.0 \text{ s}} = 10 \text{ m/s}$$

A figura 1 ilustra este exemplo.

**Exemplo 2:** Neste exemplo vamos considerar uma partícula  $A$  que cai verticalmente de uma altura  $h$  e outra,  $B$ , que é lançada verticalmente para cima e alcança a mesma altura  $h$ . Se as duas partículas percorrem a mesma distância  $d = h$  no mesmo intervalo de tempo, então as duas partículas têm a mesma velocidade média, a despeito de os movimentos das duas partículas serem diferentes. A figura 2 representa esta situação.

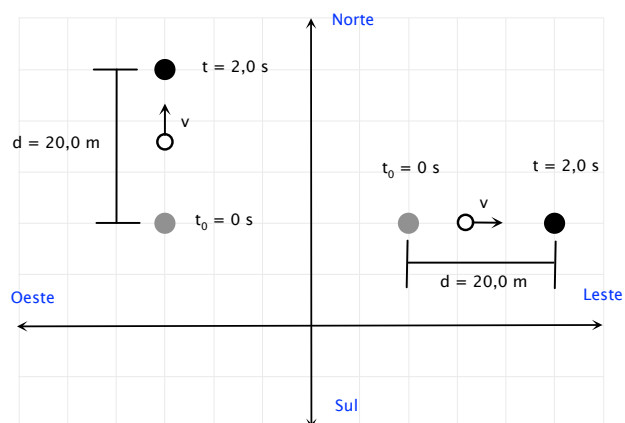
A velocidade média da partícula  $A$  ( $v_{A \text{ méd}}$ ) vale

$$v_{A \text{ méd}} = \frac{h}{t} = \frac{5.0 \text{ m}}{1.0 \text{ s}} = 5.0 \text{ m/s}$$

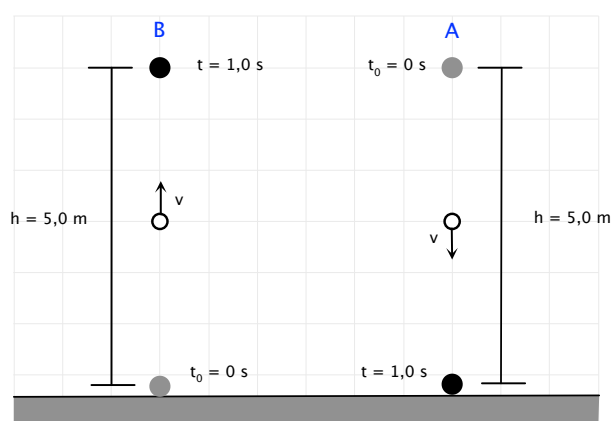
e a velocidade média da partícula  $B$  ( $v_{B \text{ méd}}$ ) vale

$$v_{B \text{ méd}} = \frac{h}{t} = \frac{5.0 \text{ m}}{1.0 \text{ s}} = 5.0 \text{ m/s}$$

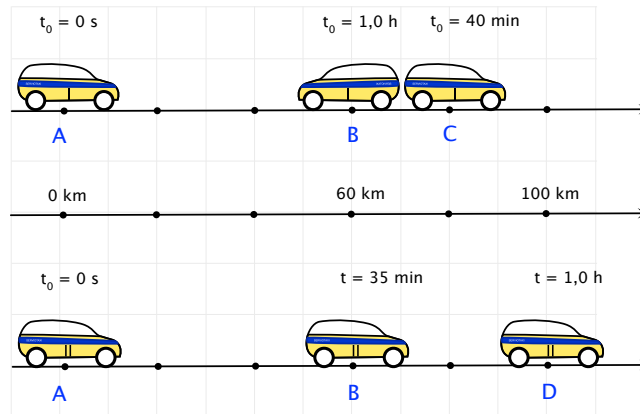
**Exemplo 3:** Neste exemplo, considere a situação mostrada na figura 3.



**Figura 1.** – Duas partículas em movimento: Uma com movimento horizontal, de Oeste para Leste e outra com movimento vertical, de Sul para Norte.



**Figura 2.** – Duas partículas em movimento na direção vertical. A partícula B de baixo para cima e a partícula A de cima para baixo.



**Figura 3.** – Carros I e II em movimento. O carro I parte da cidade *A*, vai até a cidade *C* e, depois, para a cidade *B*. O carro II parte da cidade *A* e vai até a cidade *D*.

Chamemos de carro I, um carro que parte da cidade *A* e segue em linha reta até chegar em uma cidade *C*, percorrendo 80.0 km em 40.0 min. Em seguida este mesmo carro parte da cidade *C* e vai até a cidade *B*, percorrendo 20.0 km em 20.0 min. Então, de acordo com a equação (2.1), a velocidade média do carro I na viagem vale

$$v_{\text{I méd}} = \frac{80 \text{ km} + 20 \text{ km}}{40 \text{ min} + 20 \text{ min}} = 1.0 \times 10^2 \text{ km/h.}$$

Agora consideremos um outro carro, chamemos de carro II, que parte da cidade *A* no mesmo instante que o carro I. O carro II, seguindo sempre em linha reta, vai até uma cidade *D*, percorrendo 100.0 km em uma hora. Portanto, a velocidade média do carro II vale

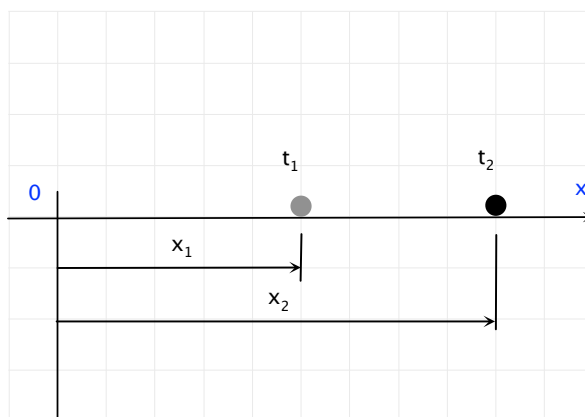
$$v_{\text{II méd}} = \frac{100 \text{ km}}{1.0 \text{ h}} = 1.0 \times 10^2 \text{ km/h.}$$

Então, podemos perceber que as velocidades média dos dois carros são iguais, apesar de os dois carros se movimentarem de formas diferentes. Novamente, conhecer o valor das velocidades médias dos carros I e II não nos permite diferenciar suas trajetórias.

Com o objetivo de eliminar as limitações conceituais apontadas, consideramos oportuno escrever a partir de agora a velocidade média de uma partícula em termos de coordenadas cartesianas. Para descrever um movimento, precisamos em primeiro lugar de um referencial que, no caso unidimensional, é simplesmente uma reta orientada, em que se escolhe a origem 0. A posição de uma partícula em movimento no instante  $t$  é descrita pela abscissa correspondente  $x(t)$ . Consideremos uma partícula que se desloca em linha reta e que no instante  $t_1$  situa-se na posição  $x(t_1) = x_1$  e no instante  $t_2$  ocupa a posição  $x(t_2) = x_2$ , como representado na figura 4.

Então, podemos definir a velocidade média da partícula como:

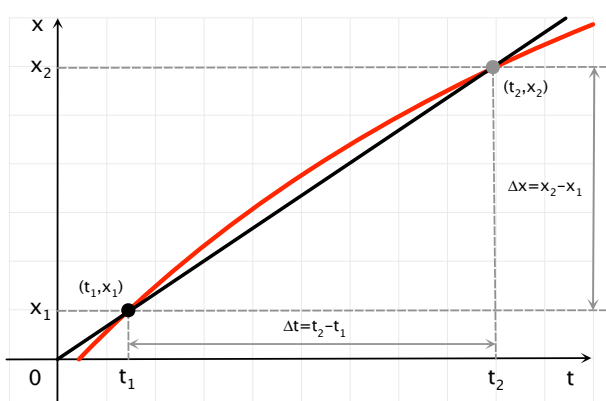
$$v_{\text{méd}} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (2.2)$$



**Figura 4.** – Uma partícula se movimenta em linha reta no sentido positivo da reta orientada. Ela ocupa a posição  $x_1$  no instante  $t_1$  e a posição  $x_2$  no instante  $t_2$ .

Comparando essa definição de velocidade com aquela dada pela equação (2.1), vemos que a principal diferença está no fato de considerarmos o deslocamento  $\Delta x$  e não a distância percorrida pela partícula. Desse modo, a velocidade dada pela equação (2.2) pode ser positiva (quando  $x_2$  for maior que  $x_1$ ) ou negativa (quando  $x_2$  for menor que  $x_1$ ), o que não ocorre com a definição dada pela equação (2.1), que torna a velocidade uma grandeza não algébrica, ou seja, sempre positiva.

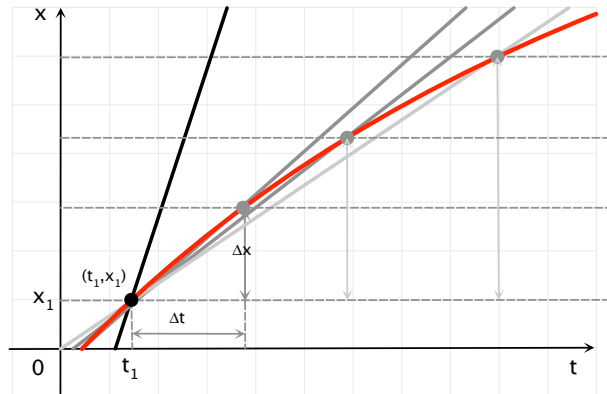
Se construirmos um gráfico  $x(t)$  vs.  $t$ , a velocidade escalar média será a inclinação da reta que une os pontos  $(t_1, x_1)$  e  $(t_2, x_2)$ . Observe a figura 5.



**Figura 5.** – Representação gráfica da velocidade média no intervalo de tempo  $\Delta t$ .

Mas qual a velocidade em  $t_1$ ? Ou seja, qual é a velocidade instantânea no instante  $t = t_1$ . Observando a figura 6, que é o gráfico  $x(t)$  vs.  $t$  do movimento de uma partícula, podemos constatar que quanto consideramos intervalos de tempo sucessivamente menores,

começando em  $t_1$ , a velocidade média para o intervalo se aproxima da inclinação da reta tangente ao gráfico no ponto  $(t_1, x_1)$ .



**Figura 6.** – Representação gráfica da velocidade instantânea em um instante de tempo  $t$ . A reta de maior inclinação, em preto, é a reta tangente no ponto  $(t_1, x_1)$ .

Portanto, a velocidade instantânea em  $t_1$  é definida como a inclinação da reta tangente ao gráfico no ponto  $(t_1, x_1)$ . Em outras palavras, a velocidade instantânea é um caso limite da velocidade média, que surge quando consideramos intervalos de tempo muito pequenos. Além da discussão acerca da representação gráfica da velocidade instantânea, podemos ir além na abordagem deste conceito usando um exemplo comum no Ensino Médio. Consideremos o problema de movimento de um corpo que cai em queda livre. A equação horária do movimento da partícula que parte do repouso é dada por

$$x(t) = -\frac{g}{2}t^2 = -5t^2, \quad (2.3)$$

onde consideramos  $g = 10 \text{ m/s}^2$ . Se usarmos a expressão (2.3) para calcularmos as posições e em seguida usarmos os resultados, poderemos obter a velocidade escalar média entre os instantes considerados. Vamos considerar a notação  $v_{\text{méd}} = \bar{v}$ . Vamos ao trabalho:

$$\bar{v}_{1,0 \rightarrow 1,1} = \frac{x(1,1) - x(1,0)}{\Delta t} = \frac{-5(1,1)^2 + 5(1,0)^2}{1,1 - 1,0} = -10.5 \text{ m/s},$$

onde usamos  $\Delta t = 0.1 \text{ s}$ . Agora vamos fazer o mesmo procedimento para intervalos de tempo ainda menores:

$$\begin{aligned} \bar{v}_{1,00 \rightarrow 1,01} &= \frac{x(1,01) - x(1,00)}{1,01 - 1,00} = -10.05 \text{ m/s}, \\ \bar{v}_{1,000 \rightarrow 1,001} &= \frac{x(1,001) - x(1,000)}{1,001 - 1,000} = -10.005 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

Continuando para um intervalo de tempo arbitrário  $\Delta t$ , temos

$$\begin{aligned}\bar{v}_{t \rightarrow t+\Delta t} &= \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{-5(t+\Delta t)^2 + 5t^2}{\Delta t}, \\ \bar{v}_{t \rightarrow t+\Delta t} &= \frac{-5(t^2 + \Delta t^2 + 2t\Delta t) + 5t^2}{\Delta t}, \\ \bar{v}_{t \rightarrow t+\Delta t} &= \frac{-5t^2 - 5\Delta t^2 - 10t\Delta t + 5t^2}{\Delta t} = -5\Delta t - 10t.\end{aligned}\quad (2.4)$$

Se considerarmos intervalos de tempo cada vez menores de modo que possamos considerar  $\Delta t \approx 0$ , podemos escrever a relação (2.4) da seguinte forma

$$v(t) = -10t$$

e, deste modo, temos que

$$v(1,0) = -10 \text{ m/s}, \quad (2.5)$$

que é a velocidade instantânea da partícula no instante  $t = 1.0 \text{ s}$ .

O conceito de velocidade instantânea é de fundamental importância no estudo da Mecânica. Entretanto, podemos observar que este conceito é tratado forçosamente de maneira muito superficial no Ensino Médio. Esta superficialidade se deve a dificuldades como, por exemplo, a ausência de noção sobre limite por parte dos estudantes deste nível de ensino.

A aceleração escalar média é definida como a variação da velocidade de um corpo em um determinado intervalo de tempo. Assim, se um corpo tem velocidade  $v(t_1) = v_1$  em um instante  $t_1$  e velocidade  $v(t_2) = v_2$  em um instante  $t_2$ , a expressão matemática para a aceleração média do corpo no intervalo de tempo  $\Delta t = t_2 - t_1$  é

$$a_{\text{méd}} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

e, portanto,

$$a_{\text{méd}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \quad (2.6)$$

Se construirmos um gráfico  $v(t)$  vs.  $t$ , a aceleração escalar média será a inclinação da reta que une os pontos  $(t_1, v_1)$  e  $(t_2, v_2)$ . Observe a figura 7.

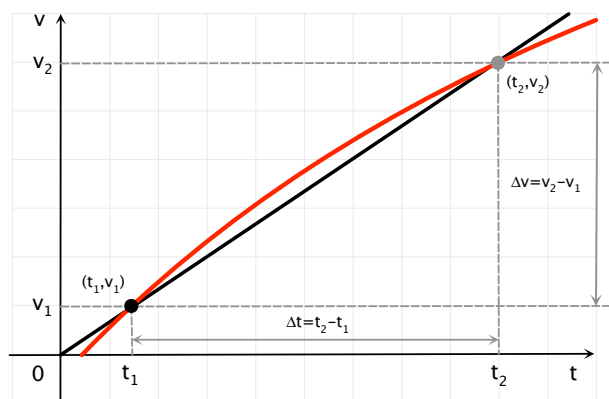
Devemos notar que os valores das velocidades na expressão (2.6) são os valores das velocidades instantâneas do corpo nos instantes mencionados. Neste momento, já podemos perceber a importância do conceito de velocidade instantânea. O conceito de aceleração é fundamental para a definição de força, conceito fundamental que está presente na segunda lei de Newton.

Em uma dimensão, a forma matemática da segunda lei de Newton é dada por

$$F = ma,$$

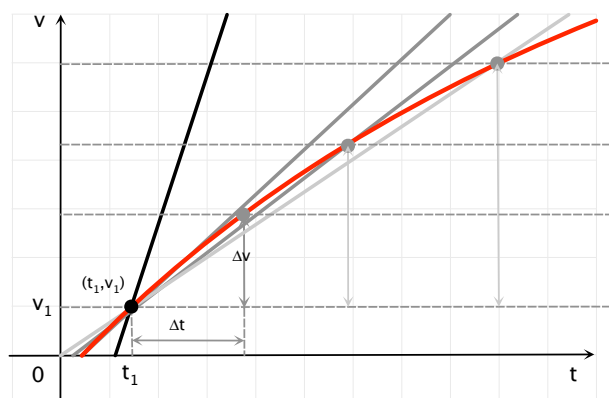
onde  $F$  é a resultante da soma algébrica de todas as forças, cuja direção é a mesma do movimento, que agem sobre um corpo que adquire uma aceleração instantânea  $a$ . O conceito de aceleração instantânea raramente é tratado nos livros de Física do Ensino Médio.





**Figura 7.** – Representação gráfica da aceleração média no intervalo de tempo  $\Delta t$ .

Por isso a maior parte dos problemas de Mecânica estudados são aqueles que envolvem aceleração nula ou constante, para os quais a aceleração escalar média é igual a aceleração instantânea em qualquer instante. A representação gráfica do conceito de aceleração instantânea é semelhante a da velocidade instantânea. A figura 8 é a representação gráfica das velocidades de uma partícula em função do tempo.



**Figura 8.** – Representação gráfica da aceleração instantânea em um instante de tempo  $t$ . A reta de maior inclinação, em preto, é a reta tangente no ponto  $(t_1, v_1)$ .

A medida que consideramos intervalos de tempo sucessivamente menores, a partir de  $t_1$ , a inclinação da reta correspondente ao intervalo se aproxima da inclinação da reta tangente à curva no ponto  $(t_1, v_1)$ . Portanto, a aceleração instantânea em  $t_1$  é definida como a inclinação da reta tangente ao gráfico no ponto  $(t_1, v_1)$ . Em outras palavras, a aceleração instantânea é um caso limite da aceleração média, que surge quando consideramos intervalos de tempo muito pequenos. A semelhança nas definições de velocidade e

aceleração instantâneas se deve ao fato de ambas serem taxas de variação temporal. Ou seja, a velocidade instantânea é uma taxa de variação da posição em relação ao tempo e a aceleração instantânea é uma taxa de variação da velocidade em relação ao tempo.

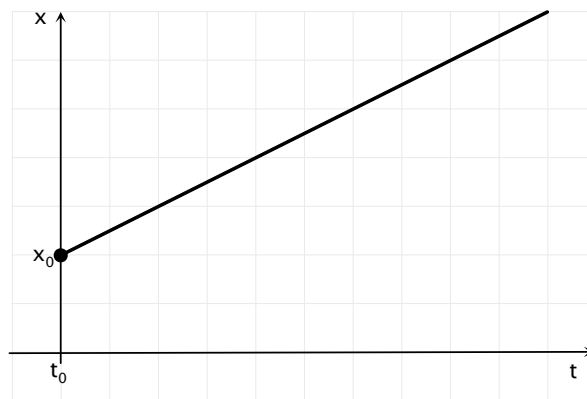
Se uma partícula se desloca em linha reta a partir de uma posição  $x(t_0) = x_0$  com velocidade constante, podemos calcular sua posição em qualquer instante aplicando a expressão (2.2):

$$v_{\text{méd}} = \frac{x(t) - x_0}{t - t_0}$$

e, portanto,

$$x(t) = x_0 + v(t - t_0), \quad (2.7)$$

onde a velocidade tem o mesmo valor em todos os instantes. A equação (2.7) é uma equação linear e sua representação gráfica no plano  $x(t)$  vs.  $t$  é uma reta, cuja inclinação é igual ao valor da velocidade. Observe a figura 9.



**Figura 9.** – Gráfico da posição em função do tempo para um móvel em movimento retilíneo e uniforme.

A representação gráfica da velocidade em função do tempo está representada na figura 10.

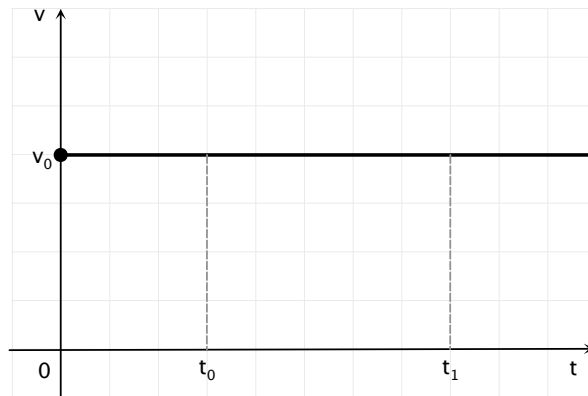
Neste momento consideramos oportuno chamar a atenção dos alunos para um aspecto interessante: o deslocamento da partícula é numericamente igual à área sob o gráfico da velocidade no intervalo de tempo considerado. De acordo com a equação (2.2), o deslocamento total é dado por

$$\Delta x = v_{\text{méd}}(t - t_0)$$

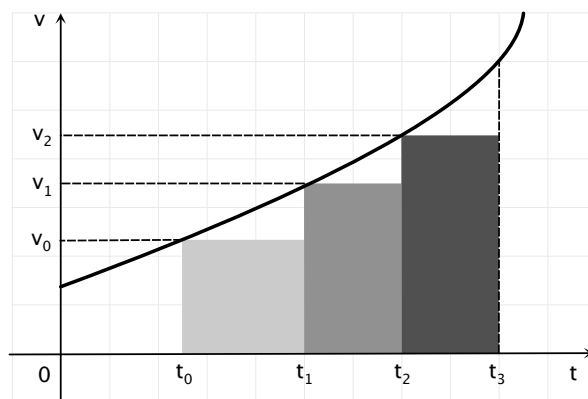
e, portanto, como  $v_{\text{méd}} = v$ ,

$$\Delta x = v(t - t_0),$$

que é equivalente a calcular a área do retângulo de lados  $t - t_0$  e  $v$ . Podemos generalizar essa idéia considerando o gráfico das velocidades de uma partícula cujo movimento não seja uniforme. Observe a figura 11.



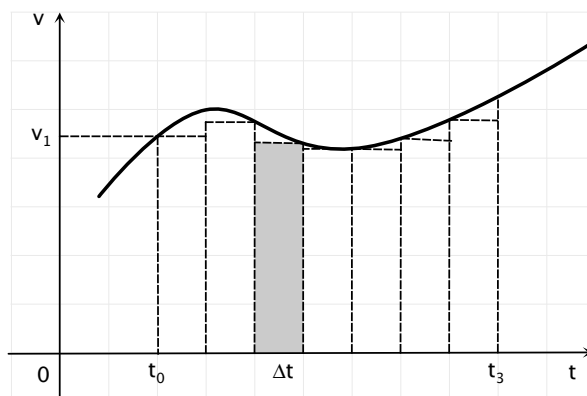
**Figura 10.** – Gráfico da velocidade em função do tempo para um móvel em movimento retilíneo e uniforme.



**Figura 11.** – Gráfico da velocidade em função do tempo para uma partícula em movimento. As áreas preenchidas são numericamente iguais aos deslocamentos da partícula nos intervalos de tempo correspondentes.

Na figura 11, a área sob o gráfico da velocidade em função do tempo, limitada pelo intervalo de tempo  $\Delta t = t_3 - t_0$ , está dividida em três retângulos coloridos, cujas áreas correspondem a maior parte da área sob o gráfico, e em uma área não preenchida, que corresponde a menor parte da área sob o gráfico. A área de cada retângulo é numericamente igual ao produto entre a velocidade e o intervalo de tempo correspondente ao retângulo. Ou seja, a área de cada retângulo equivale ao deslocamento no intervalo de tempo correspondente. Ao somarmos as áreas dos retângulos estaremos calculando o deslocamento aproximado no intervalo de tempo que limita a área total sob a curva. Assim, se somarmos as áreas vermelha, amarela e verde da figura 11, estaremos calculando o deslocamento aproximado no intervalo de tempo  $\Delta t = t_3 - t_0$ . Esta aproximação tende

para um valor exato a medida que consideramos intervalos de tempo cada vez menores. Se observarmos a figura 12, podemos concluir que a medida que consideramos intervalos de tempo cada vez menores, a área sob o gráfico da velocidade em função do tempo vai sendo preenchida por retângulos cujas áreas equivalem ao deslocamento no intervalo de tempo considerado.



**Figura 12.** – Representação gráfica da velocidade em função do tempo para o movimento de uma partícula. A medida que se considera intervalos de tempo cada vez menores, a área sob a curva vai sendo preenchida. Quando este intervalo de tempo tende para zero, o deslocamento da partícula equivale a área sob a curva limitada por  $t_0$  e  $t_3$ .

Considere agora uma partícula que se encontra em movimento retilíneo uniformemente variado com aceleração  $a$ . No instante  $t_0$ , a partícula tem velocidade  $v_0$  e no instante  $t_f$  tem velocidade  $v_f$ . O gráfico da velocidade em função do tempo será aquele representado pela figura 13.

A área sob o gráfico é igual a área de um trapézio, cuja a base maior é igual a  $(v_0 + a\Delta t)$ , a base menor é igual a  $v_0$  e a altura é igual a  $\Delta t$

$$\text{Área do trapézio} = \left( \frac{v_0 + v_f}{2} \right) \Delta t.$$

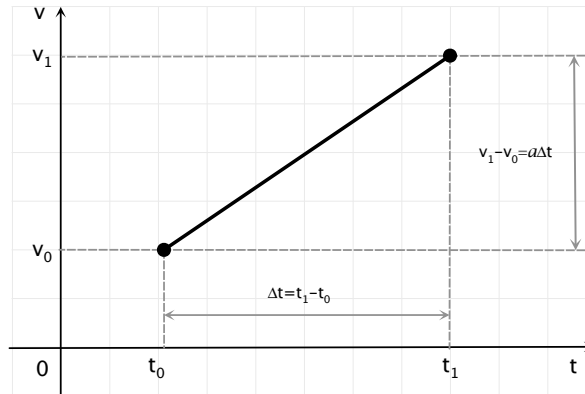
Como a área sob o gráfico é igual ao deslocamento da partícula no intervalo  $\Delta t$ , podemos escrever, de acordo com a equação (2.2),

$$v_{\text{méd}} \Delta t = \Delta x = \left( \frac{v_0 + v_f}{2} \right) \Delta t$$

e, portanto, temos

$$v_{\text{méd}} = \frac{v_0 + v_f}{2}. \quad (2.8)$$

A equação (2.8) é válida apenas para movimentos uniformemente variados. Podemos ainda estabelecer as relações que nos permitem calcular as velocidades e as posições da



**Figura 13.** – Gráfico da velocidade em função do tempo de um corpo em movimento retilíneo uniformemente variado.

partícula para qualquer instante. De acordo com a equação (2.6), temos

$$a = \frac{v(t) - v_0}{t - t_0}$$

e, portanto, obtemos

$$v(t) = v_0 + a(t - t_0). \quad (2.9)$$

Olhando para o gráfico representado na figura 13 e aplicando as equações (2.2) e (2.8), temos

$$v_{\text{méd}} = \frac{x(t) - x_0}{t - t_0} = \frac{v_0 + v_0 + a(t - t_0)}{2}$$

e

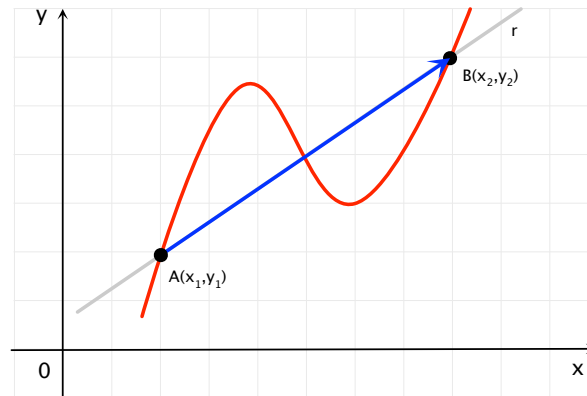
$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{a}{2}(t - t_0)^2, \quad (2.10)$$

onde  $x_0$  e  $v_0$  são, respectivamente, a posição e a velocidade da partícula no instante  $t_0$ .

Até o presente momento de nossa abordagem tratamos apenas de movimentos unidimensionais. Para o estudo de movimentos em mais de uma dimensão necessitamos introduzir o conceito de vetor, pois os deslocamentos espaciais são vetoriais e, portanto, a velocidade e a aceleração também são grandezas físicas vetoriais. Vamos nos restringir ao estudo de movimentos em duas dimensões.

Quando uma partícula se movimenta, seu deslocamento tem não apenas uma direção no espaço, mas também uma magnitude. A grandeza que fornece a distância em linha reta entre dois pontos do espaço, bem como sua orientação, é um segmento de reta chamado vetor deslocamento. Ele é representado graficamente por uma seta cuja orientação é a mesma do vetor deslocamento e cujo comprimento é proporcional à magnitude desse vetor.

Na figura 14, uma partícula descreve a trajetória representada. Em um instante qualquer ela se encontra no ponto  $A$  e em outro instante se encontra no ponto  $B$ . O vetor



**Figura 14.** – Representação gráfica do vetor deslocamento.

deslocamento da partícula é representado graficamente pela seta que tem a mesma direção da reta  $r$ , que une os pontos  $A$  e  $B$ , e que tem magnitude (ou módulo) igual ao comprimento da seta. Além da direção e do módulo, o vetor deslocamento sempre indica um sentido para o movimento que, no caso da figura 14, é o sentido que vai de  $A$  para  $B$ .

O vetor posição de uma partícula é um vetor desenhado da origem de um sistema de coordenadas até a posição da partícula. Para uma partícula no ponto  $(x, y)$ , o vetor posição  $\vec{r}$  é

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j},$$

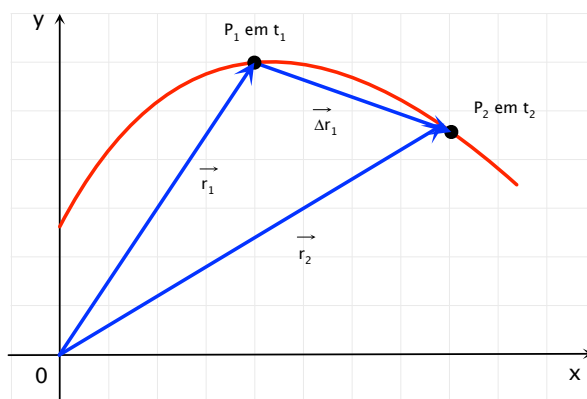
onde  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$  são vetores unitários, cujos módulos são iguais a um. A direção e o sentido do vetor unitário  $\hat{i}$  são a direção e o sentido positivo da reta dos  $x$ , respectivamente. A direção e o sentido do vetor unitário  $\hat{j}$  são a direção e o sentido positivo da reta dos  $y$ , respectivamente. A figura 15 mostra a trajetória de uma partícula. No instante  $t_1$  a partícula está em  $P_1$ , com vetor posição  $\vec{r}_1$ ; em  $t_2$ , a partícula encontra-se em  $P_2$ , com vetor posição  $\vec{r}_2$ . A variação na posição da partícula é o vetor deslocamento  $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ .

A razão entre o vetor deslocamento e o intervalo de tempo  $\Delta t = t_2 - t_1$  é o vetor velocidade média

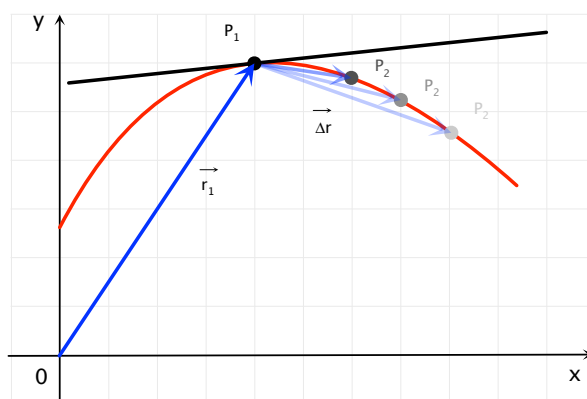
$$\vec{v}_{\text{méd}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \quad (2.11)$$

Esse vetor possui a mesma orientação do vetor deslocamento. Observe que o módulo do vetor deslocamento é menor do que a distância percorrida ao longo da curva, a menos que a partícula esteja se movendo em linha reta. Entretanto, ao se considerar intervalos de tempo cada vez menores, o módulo do deslocamento tende a ser igual à distância percorrida ao longo da curva, e sua direção tende a ficar tangente a curva no início do intervalo. Observe a figura 16.

A direção da reta tangente à curva em  $P_1$  coincide, por definição, com a direção do vetor velocidade instantânea. O vetor aceleração média é definida como a razão entre a



**Figura 15.** – Representação gráfica do vetor variação da posição.



**Figura 16.** – Representação gráfica do vetor velocidade instantânea. A direção do vetor velocidade instantânea coincide com a direção da reta tangente no ponto P<sub>1</sub>.

variação do vetor velocidade instantânea  $\Delta \vec{v}$  e o intervalo de tempo correspondente a esta variação

$$\vec{a}_{\text{méd}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}. \quad (2.12)$$

Da mesma forma que o vetor velocidade instantânea é um limite para o vetor velocidade média, o vetor aceleração instantânea é o limite do vetor aceleração média, que surge a medida que tomamos intervalos de tempo sucessivamente menores.

O estudo da Dinâmica, no Ensino Médio, tem como assunto central o estudo e as aplicações das “Leis do Movimento”, como são chamadas as três leis básicas da Mecânica, formuladas pelo famoso físico e matemático Isaac Newton em sua obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, publicada em 1687.

Ao estudar os princípios da Mecânica, Newton se baseou em estudos de grandes físicos

que o precederam, entre eles Galileu. A *primeira lei de Newton* nada mais é do que uma síntese das idéias de Galileu relativas à inércia e, por isso, também é denominada *lei da inércia de Galileu*.

**Primeira lei de Newton (Lei da inércia de Galileu)**<sup>1</sup>. Todo o corpo mantém o seu estado de repouso ou de movimento uniforme segundo uma linha recta, se não for compelido a mudar o seu estado por forças nele impressas (NEWTON, 2010).

A segunda lei de Newton é uma das leis básicas da Mecânica, sendo utilizada na análise dos movimentos que observamos próximos à superfície da Terra e no estudo dos movimentos dos corpos celestes. O próprio Newton a aplicou ao desenvolver seus estudos dos movimentos dos planetas, e o grande sucesso alcançado constituiu uma das primeiras confirmações desta lei.

**Segunda lei de Newton.** A mudança no movimento é proporcional à força motora impressa e faz-se na direcção da linha recta segundo a qual a força motora é impressa (NEWTON, 2010).

A forma matemática da segunda lei de Newton é

$$\vec{F} = m \vec{a}, \quad (2.13)$$

onde  $\vec{F}$  é o vetor força, que resulta da soma vetorial de todas as forças que agem no corpo de massa  $m$  e  $\vec{a}$  é o vetor aceleração instantânea que o corpo adquire. O conceito de aceleração instantânea raramente é mencionado nos livros de Física destinados ao Ensino Médio. Por isso os problemas de movimento resolvidos aplicando-se a segunda lei de Newton são muito simples e idealizados. Como já foi mencionado, estes problemas restringem-se a acelerações nulas ou constantes. Acreditamos que esse tratamento dado à Mecânica cria dificuldades conceituais e lógicas e impossibilita a resolução de vários problemas da Mecânica que têm ampla visibilidade na experiência diária dos alunos.

Em seus estudos de Mecânica, Newton percebeu que as forças sempre aparecem como resultado da interação de dois corpos. Além disso, Newton constatou que, na interação de dois corpos, as forças sempre aparecem aos pares: para cada ação de um corpo sobre o outro, existirá sempre uma reação igual e contrária deste outro corpo sobre o primeiro.

**Terceira lei de Newton.** A toda a acção opõe-se sempre uma igual reacção. Isto é, as acções mútuas de dois corpos um sobre o outro são sempre iguais e opostas (NEWTON, 2010).

Nesta seção nosso objetivo é mostrar, de forma resumida, como está estruturada a Mecânica no Ensino Médio. Entretanto, gostaríamos de nos restringir daqui para frente ao que de fato nos interessa para este trabalho. O que almejamos é propor o método da discretização de funções como ferramenta para solucionar problemas de movimento que não são estudados na Mecânica no Ensino Médio, devido às complicações conceituais e matemáticas oferecidas por estes problemas. Diante desta configuração, consideramos

<sup>1</sup> Mantivemos a grafia original portuguesa do padre J. Resina Rodrigues.



importante comentar sobre problemas de movimento que são resolvidos e os que não são resolvidos no contexto do Ensino Médio atual.

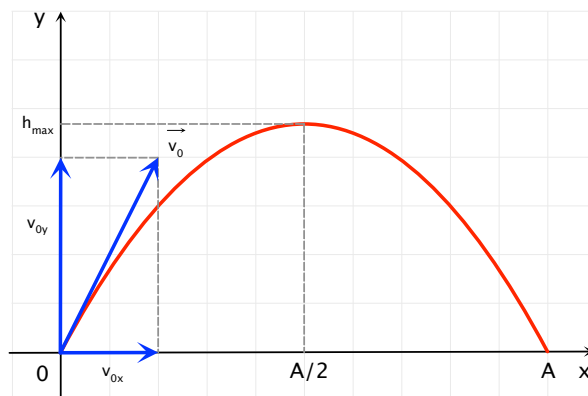
Quando um corpo cai livremente sob a ação de seu próprio peso, dizemos que este corpo está em queda livre e seu movimento é retilíneo e uniformemente variado, com  $a = -g$ , onde  $g$  é a letra usada para representar a aceleração da gravidade. Portanto, o problema de movimento de qualquer corpo em queda livre estará resolvido se forem dadas as condições iniciais do problema,  $y(t_0) = y_0$  e  $v(t_0) = v_0$ . A solução será dada pela relação (2.10), com  $y(t)$  representando a posição do corpo no instante  $t$ ,  $a = -g$  e  $t_0 = 0$ . Portanto, temos

$$v(t) = v_0 - g t$$

e

$$y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{g}{2} t^2. \quad (2.14)$$

A velocidade e a aceleração são grandezas vetoriais. Entretanto, na análise de movimentos retilíneos a notação vetorial muitas das vezes é omitida. Já nas análises de movimentos não retilíneos é necessário que os alunos estejam familiarizados tanto com a notação quanto com as operações vetoriais. É o que ocorre com a análise de movimentos oblíquos, nos quais é conveniente substituir o vetor posição do corpo lançado pelas suas componentes cartesianas. Observe a figura 17, na qual estão representados os parâmetros relevantes para o estudo deste tipo de movimento pelos estudantes do Ensino Médio.



**Figura 17.** – Trajetória de um projétil. O alcance está representado por  $x = A$  e o ponto mais alto da trajetória tem ordenada  $y = h$ .

Em qualquer ponto da trajetória parabólica o corpo sofre a ação da força peso, exercida pela Terra sobre o corpo. Portanto, o corpo tem uma aceleração de módulo igual a  $g$ , na direção vertical e cujo sentido é o sentido negativo do eixo dos  $y$ . Logo, no espaço conclui-se que a componente  $x$  da posição varia uniformemente no tempo e que a componente  $y$  varia parabolicamente. Vamos escrever matematicamente estes conceitos aplicando as

equações (2.7) e (2.10):

$$x(t) = x_0 + v_{0x}(t - t_0) \quad (2.15)$$

e

$$y(t) = y_0 + v_{0y}(t - t_0) - \frac{g}{2}(t - t_0)^2. \quad (2.16)$$

Se considerarmos  $x_0 = y_0 = 0$ , quando  $t_0 = 0$ , e substituirmos o vetor velocidade inicial do corpo por suas componentes cartesianas, teremos

$$x(t) = (v_0 t) \cos \alpha \quad (2.17)$$

e

$$y(t) = (v_0 t) \operatorname{sen} \alpha - \frac{g}{2} t^2. \quad (2.18)$$

Com as equações (2.17) e (2.18), que substituem satisfatoriamente a álgebra vetorial em função do tempo, o problema de movimento do corpo lançado de forma oblíqua está resolvido. Entretanto, gostaria de chamar a atenção neste momento com uma pergunta: Podemos, ao mesmo tempo, contextualizar problemas deste tipo e resolvê-los com estas equações?

Se observarmos a trajetória real de uma bola de futebol, após um chute de um jogador, e conhecermos o módulo do vetor velocidade inicial e a inclinação que ele faz com o plano do campo, o alcance  $A$  da bola não será dado por

$$A = (v_0 t_A) \cos \alpha, \quad (2.19)$$

onde  $t_A$  é o tempo que a bola leva para atingir o campo novamente. Isto ocorre porque não se considera a ação do ar sobre a bola durante sua trajetória. Da mesma forma, os movimentos dos planetas não são estudados de forma consistente no nível médio, ou seja, a partir das leis de Newton. As trajetórias dos planetas são sempre definidas de acordo com as leis de Kepler, mas quando abordados matematicamente são tratadas não como trajetórias elípticas e sim como trajetórias circulares. Nesta etapa, em geral, são apresentadas sem justificativas relações matemáticas que muitas vezes são encaradas de forma desesperadora pelos alunos. Nestas relações estão envolvidas grandezas como período, velocidade angular e raios de órbitas.

No estudo do movimento harmônico simples, o único movimento harmônico estudado no Ensino Médio, novamente não se resolve o problema de movimento. As expressões envolvendo o período, a velocidade, a frequência e a frequência angular são apresentadas aos alunos e cobra-se que sejam decoradas.

Outros temas fundamentais na mecânica do Ensino Médio são o conceito de quantidade de movimento (ou momento linear) e o de energia. A quantidade de movimento ou momento linear de uma partícula de massa  $m$  é dado pelo produto entre a massa e o vetor velocidade instantânea  $\vec{v}$  da partícula,  $\vec{p} = m\vec{v}$ . Para um sistema formado por  $n$

partículas, o momento linear do sistema é dado pela soma vetorial dos momentos lineares de cada partícula que constitui o sistema. A expressão matemática para esta definição é

$$\left(\vec{P}\right)_{\text{sis}} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots + m_n\vec{v}_n. \quad (2.20)$$

Um dos princípios mais importantes da Física, que já é estudado no nível médio, é o da conservação da quantidade de movimento (MAXWELL, 2010).

**Conservação da quantidade de movimento.** Se a força externa resultante atuando sobre um sistema permanece nula, a quantidade de movimento total do sistema relativamente a um sistema inercial permanece constante.

Este princípio de conservação é muito trabalhado no Ensino Médio, sendo aplicado para a resolução de muitos exercícios de Mecânica. As colisões entre corpos estudadas neste nível de ensino são um exemplo da aplicação deste conceito. Além destes, podemos encontrar aplicações em problemas de movimento de sistemas de corpos como dois patinadores que se deslocam sobre uma pista de gelo e em um dado momento de suas trajetórias se tocam ou, ainda, como uma pessoa se deslocando na superfície de um barco que se encontra inicialmente em repouso sobre a superfície de um lago ou encostado livremente em um ancoradouro.

O outro conceito importantíssimo estudado é o de energia. São vários os tipos de energia mecânica estudadas no nível médio, como, por exemplo, a energia de movimento (ou energia cinética), a energia potencial gravitacional e a energia potencial elástica. O princípio de conservação de energia mais estudado no Ensino Médio é o de conservação da energia mecânica (MAXWELL, 2010).

**Conservação da energia mecânica.** Se um corpo encontra-se em movimento, em relação a um referencial inercial, sob ação apenas de forças conservativas sua energia mecânica se conserva em relação a este referencial.

Um conjunto de problemas de movimento são resolvidos com a aplicação deste princípio de conservação. Problemas como o de um corpo em queda livre ou lançado verticalmente, ou o de um corpo que se desloca em superfícies como um plano inclinado ou que contém curvas.

No decorrer deste trabalho propomos um método para não só ampliar os problemas estudados na Mecânica do nível médio mais também oferecer aos alunos uma ferramenta para melhorar o entendimento dos conteúdos estudados. Podemos estudar fenômenos complexos usando uma álgebra simples, sempre interessados na contextualização e na análise de aspectos que demonstrem as características físicas de cada situação. Por exemplo, ao estudarmos o movimento harmônico amortecido, estaremos interessados em mostrar a natureza periódica e o comportamento gráfico do problema.

## 3 O Método da discretização

### 3.1 Introdução

Na mecânica a equação que descreve o movimento dos corpos é a segunda lei de Newton, cuja forma matemática é

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}, \quad (3.1)$$

onde  $\sum \vec{F}$  é a soma vetorial de todas as forças que agem sobre o corpo de massa  $m$ , que adquire o vetor aceleração instantânea  $\vec{a}$  devido a ação desses forças. Esta soma é comumente chamada de resultante das forças que agem sobre o corpo. Esta forma matemática da segunda lei de Newton limita o número de problemas que podemos estudar no Ensino Médio. A principal dificuldade está no fato de a equação (3.1) ser, em geral, uma equação cuja solução dependerá da aplicação de um conjunto de regras de cálculo que não faz parte dos conteúdos estudados no Ensino Médio.

A equação (3.1) só é resolvida satisfatoriamente no Ensino Médio quando a força é constante, o que acarreta uma aceleração também constante. Quando estudamos problemas de movimento de corpos que se encontram sob a ação de forças variáveis, como o problema de um oscilador harmônico ou de um corpo em queda que sofre a ação de forças resistivas dependentes da velocidade, percebemos as dificuldades matemáticas ao tentarmos encontrar uma função que permita calcular as velocidades e as posições do corpo em movimento. Vamos tentar ilustrar essa idéia.

Tratemos os problemas citados como problemas unidimensionais, nos quais a posição é representada pela letra  $x$ . Portanto, aplicando a segunda lei de Newton, podemos escrever para o oscilador harmônico simples

$$ma = -kx$$

e, portanto, temos que

$$a + \frac{k}{m}x = 0, \quad (3.2)$$

onde  $k$  é uma constante positiva. Para a queda de um corpo na qual se considera a ação do ar, podemos escrever

$$ma = -mg - bv.$$

Desse modo, temos que

$$a + \frac{b}{m}v + g = 0. \quad (3.3)$$

Podemos, também, reescrever a equação (3.3) considerando que a força resistiva exercida pelo ar sobre o corpo em queda seja proporcional ao quadrado do valor da sua velocidade em cada instante:

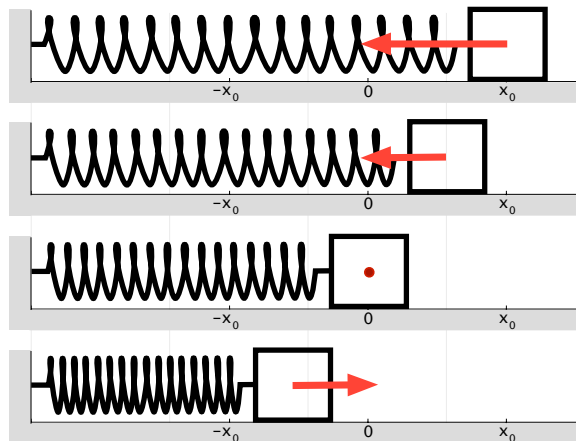
$$ma = -mg - bv^2.$$

Assim, temos

$$a + \frac{b}{m}v^2 + g = 0. \quad (3.4)$$

A solução de um problema de movimento consiste em encontrar equações que relacionem as posições e as velocidades do corpo em movimento com o tempo. Se observarmos a equação (3.2) podemos notar que quando um oscilador harmônico simples muda de posição, o que caracteriza seu movimento, sua aceleração se altera. Neste caso, é evidente que a velocidade do oscilador também estará variando e esta variação caracteriza uma variação na posição do oscilador. Portanto, podemos concluir que na equação (3.2) cada parcela da soma é caracterizada por uma variação na posição do oscilador.

Para ilustrar este conceito, consideremos um corpo de massa  $m$  preso a extremidade de uma mola de constante elástica  $k$ . Ao ser distendida a mola exerce sobre o corpo uma força elástica  $F_{\text{elástica}} = -kx$ , onde  $x$  é o valor da posição do corpo em um instante. Aplicando a segunda lei de Newton ao problema obtemos a equação (3.2), que é a equação de movimento de um oscilador harmônico simples. A figura 18 tenta ilustrar o comportamento do sistema em alguns instantes do movimento.



**Figura 18.** – Oscilador harmônico.

A solução do problema consiste em encontrar uma equação que possibilite calcular as posições e as velocidades da massa em movimento em qualquer instante. Como já foi mencionado, os procedimentos que permitem encontrar uma solução para estes problemas não são simples e não fazem parte do conteúdo estudado no Ensino Médio. As mesmas idéias podem ser aplicadas às equações (3.3) e (3.4).

### 3.2 A velocidade e a aceleração como grandezas físicas discretas

Neste momento, nosso desafio consiste em considerar e aplicar um conjunto de regras de cálculo, que ao mesmo tempo sejam acessíveis aos alunos do Ensino Médio e permitam uma descrição de movimentos de corpos nos quais a aceleração seja ou não constante.

Podemos estudar qualquer problema de movimento aplicando as leis da Física e considerando a grandeza escalar tempo como uma grandeza discreta. Isto é feito dividindo um intervalo de tempo qualquer, no qual é observado o movimento de uma partícula, em um número natural  $N$  de intervalos menores. Em nossa abordagem, esses intervalos menores serão considerados iguais e chamados de passo. Vamos representar o passo com a letra grega  $\tau$ . De acordo com estas convenções podemos escrever uma equação para o tempo da seguinte forma:

$$t_{n+1} - t_n = \tau$$

ou

$$t_{n+1} = t_n + \tau, \quad (3.5)$$

onde  $n = 0, 1, 2, 3, \dots, N$ . Em palavras, o passo  $\tau$  é um intervalo de tempo entre dois valores discretos do tempo. Podemos ainda explorar essa representação e obtermos uma notação mais simples:

$$\begin{array}{ll} n = 0 & t_1 = t_0 + \tau, \\ n = 1 & t_2 = t_1 + \tau, \\ n = 2 & t_3 = t_2 + \tau, \\ \vdots & \vdots \\ n = n - 1 & t_n = t_{n-1} + \tau. \end{array}$$

Somando as relações acima, temos

$$t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_{n-1} + t_n = t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_{n-1} + n\tau,$$

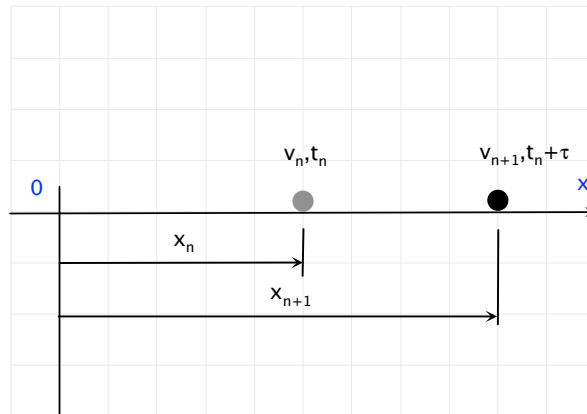
e podemos concluir que

$$t_n = t_0 + n\tau. \quad (3.6)$$

Podemos notar que quanto menor for o valor de  $\tau$  menor será a diferença entre  $t_{n+1}$  e  $t_n$  e, conseqüentemente, estaremos aproximando os instantes  $t_n$  e  $t_{n+1}$ .

Vamos considerar o movimento retilíneo de um corpo e adotar como sistema de referência uma reta orientada, como foi feito no Capítulo 2. Observe a figura 19.

A partícula representada na figura 19 encontra-se na posição  $x_n$  no instante  $t_n$  e possui velocidade  $v_n$ . Após um intervalo de tempo  $\tau$  ela encontra-se na posição  $x_{n+1}$  no instante  $t_{n+1} = t_n + \tau$  e possui velocidade  $v_{n+1}$ . Para problemas de movimento como o representado



**Figura 19.** – Duas posições ocupadas por uma partícula em movimento retilíneo. No instante  $t_n$ , a partícula ocupa a posição  $x_n$  e sua velocidade é igual a  $v_n$ . No instante  $t_{n+1}$ , a partícula ocupa a posição  $x_{n+1}$  e sua velocidade é igual a  $v_{n+1}$ .

na figura, ou seja, problemas unidimensionais, definimos a velocidade discreta da seguinte forma:

$$v_{n+1} = \frac{x_{n+1} - x_n}{t_{n+1} - t_n}. \quad (3.7)$$

Como já mencionamos, em um problema de movimento a solução do problema consiste em equações que relacionam as posições e as velocidades da partícula em movimento com o tempo. Quando consideramos o tempo como uma grandeza discreta, a solução permitirá que calculemos valores discretos das posições e, conseqüentemente, das velocidades.

Vamos analisar a figura 20, que ilustra a definição representada pela equação (3.7). A figura é o gráfico  $x(t)$  vs.  $t$  do movimento de uma partícula que no instante  $t_0$  se encontra na posição  $x_0$ .

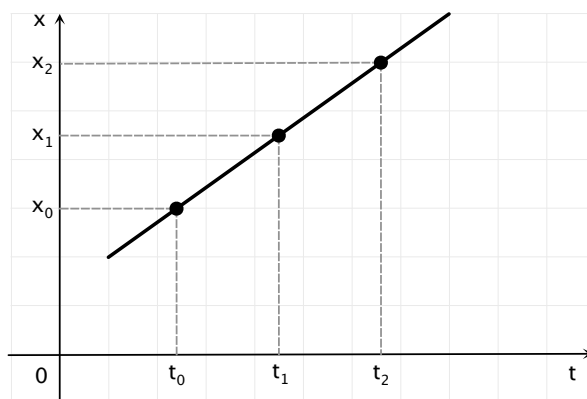
Na figura, os valores das posições  $(x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  são valores discretos nos instantes considerados  $(t_0, t_1, t_2, t_3, \dots, t_n)$ , que também são discretos. Assim, quando consideramos  $n = 0, 1, 2, \dots, N$  temos, de acordo com a equação (3.7), os seguintes resultados para as velocidades:

$$v_1 = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}, v_2 = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}, v_3 = \frac{x_3 - x_2}{t_3 - t_2}, \dots, v_{n+1} = \frac{x_{n+1} - x_n}{t_{n+1} - t_n}.$$

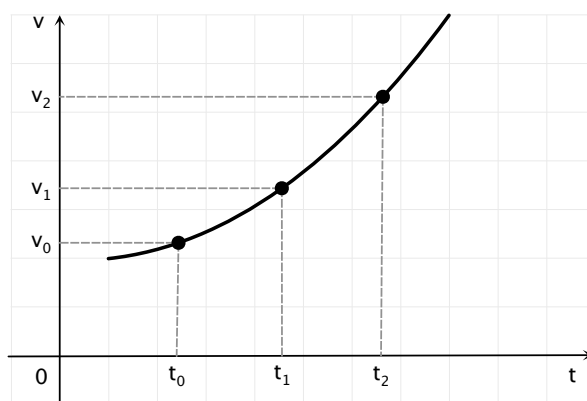
Para aplicarmos a segunda lei de Newton é necessário definirmos, assim como foi feito para a velocidade, a aceleração, considerando que tanto a grandeza tempo quanto a grandeza velocidade são grandezas discretas. Portanto, conforme D’Innocenzo, Renna e Rotelli (1987), definimos a aceleração da seguinte forma:

$$a_n = \frac{v_{n+1} - v_n}{t_{n+1} - t_n}. \quad (3.8)$$

Uma representação gráfica desta definição está na figura 21.



**Figura 20.** – Valores discretos das velocidades e dos instantes de tempo são representados por pontos no plano  $tx$ .



**Figura 21.** – Valores discretos das velocidades e dos instantes de tempo são representados por pontos no plano  $tv$ .

Ao considerarmos as definições (3.7) e (3.8), a forma matemática da segunda lei de Newton passa a ter a forma

$$\left(\sum F\right)_n = ma_n. \quad (3.9)$$

Portanto, podemos generalizar: quando estudamos um problema de movimento e consideramos a discretização do tempo, obteremos uma solução discreta para o problema aplicando a equação (3.9), que nos permitirá calcular os valores discretos das posições e, conseqüentemente, das velocidades do corpo em movimento. Desta forma, não estaremos preocupados em determinar valores intermediários entre duas posições discretas consecutivas ou duas velocidades discretas consecutivas.

Gostaríamos de chamar a atenção que a definição da velocidade (3.7) não é única.



Podemos também defini-la como

$$v_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{t_{n+1} - t_n}. \quad (3.10)$$

A definição (3.7) nos afirma que a posição ocupada pelo corpo em movimento após um intervalo de tempo  $\tau$  é igual a soma da posição anterior mais o resultado da multiplicação entre a velocidade que o corpo tem nessa posição e o intervalo  $\tau$ :  $x_{n+1} = x_n + v_{n+1}\tau$ . A definição (3.10) nos afirma que a posição ocupada pelo corpo em movimento após um intervalo de tempo  $\tau$  é igual a soma da posição anterior mais o resultado da multiplicação entre a velocidade que o corpo tinha na posição anterior e o intervalo  $\tau$ :  $x_{n+1} = x_n + v_n\tau$ . O mesmo raciocínio se aplica a definição (3.8). Apesar de parecer contraditório, as definições (3.7) e (3.10) são equivalentes. Essa equivalência se deve ao fato de  $v_{n+1}$  e  $v_n$  terem valores muito próximos, pois o intervalo de tempo  $\tau$  pode ser tão pequenos quanto quisermos. A mesma idéia vale para as posições, que estarão tão próximas quanto quisermos. Portanto, não importará se calculamos as posições considerando as definições (3.7) ou (3.10), ou ainda, a média aritmética entre  $v_{n+1}$  e  $v_n$ .

Ainda vale ressaltar que o que queremos é aplicar a segunda lei de Newton na forma da equação (3.9) e resolvermos os problemas de movimento considerando as definições de velocidade e aceleração discretas.

### 3.3 A conservação de energia e a discretização

O processo de discretização da equação de movimento (ou qualquer equação diferencial) não produz uma única equação discreta, ou seja, esse processo não é único e a equação discreta resultante de um dado processo é aproximadamente equivalente à equação diferencial somente em um intervalo limitado. Assim é possível escolher um processo de discretização mais vantajoso do que outro segundo um critério. Entretanto, é necessário ter em mente que só podemos dizer que relações entre as variáveis discretas  $x_n, x_m, \dots$  e  $v_n, v_m, \dots$  são uma discretização da equação de movimento se, ao fazermos o limite do parâmetro  $\tau$  tender para zero nas relações discretas, obtivermos  $v = dx/dt$  e  $a = dv/dt$ . O critério que usaremos no processo de discretização das equações de movimento que iremos desenvolver neste trabalho será aquele que condiciona as equações resultantes do processo a estarem de acordo com o princípio de conservação de energia.

Considere as definições gerais

$$\frac{(1 + \gamma)v_{n+1} + (1 - \gamma)v_n}{2} = \frac{x_{n+1} - x_n}{\tau} \quad (3.11)$$

e

$$\frac{(1 + \beta)a_{n+1} + (1 - \beta)a_n}{2} = \frac{v_{n+1} - v_n}{\tau}, \quad (3.12)$$

onde  $\gamma$  e  $\beta$  são parâmetros arbitrários. Assim, poderemos escolher os valores de  $\gamma$  e  $\beta$  convenientemente e impor o nosso critério. Por exemplo, sabemos que quando um

corpo de massa  $m$  cai livremente sua energia mecânica se conserva e é possível escrever  $E_{n+1} = E_n$ , onde

$$E_{n+1} = mgx_{n+1} + \frac{1}{2}mv_{n+1}^2$$

e

$$E_n = mgx_n + \frac{1}{2}mv_n^2.$$

Como  $a_{n+1} = a_n = -g$ , podemos escrever, de acordo com a equação (3.12),

$$\frac{-(1+\beta)g - (1-\beta)g}{2} = \frac{v_{n+1} - v_n}{\tau}$$

ou

$$\frac{-g - \beta g - g + \beta g}{2} = -\frac{2g}{2} = \frac{v_{n+1} - v_n}{\tau}$$

ou, ainda, que

$$-g = \frac{v_{n+1} - v_n}{\tau}. \quad (3.13)$$

Podemos perceber que para este tipo de problema de movimento o parâmetro  $\beta$  não é relevante. Entretanto, não acontece o mesmo com a escolha do parâmetro  $\gamma$ . De acordo com a equação (3.11), podemos escrever

$$\frac{(1+\gamma)v_{n+1} + (1-\gamma)v_n}{2} = \frac{x_{n+1} - x_n}{\tau}$$

e, então, considerando a equação (3.13), obtemos

$$\frac{(1+\gamma)v_{n+1} + (1-\gamma)v_n}{2} = \frac{-g(x_{n+1} - x_n)}{v_{n+1} - v_n}.$$

Como

$$\begin{aligned} &v_{n+1}^2 + \gamma v_{n+1}^2 + \\ &+ v_{n+1}v_n - \gamma v_{n+1}v_n - v_n^2 + \\ &+ \gamma v_n^2 - v_{n+1}v_n - \gamma v_{n+1}v_n = -2gx_{n+1} + 2gx_n, \end{aligned}$$

temos, portanto, que

$$v_{n+1}^2 - v_n^2 + \gamma(v_{n+1}^2 + v_n^2 - 2v_{n+1}v_n) = -2gx_{n+1} + 2gx_n.$$

Multiplicando todos os termos do resultado acima por  $m/2$  e considerando a igualdade

$$v_{n+1}^2 + v_n^2 - 2v_{n+1}v_n = (v_{n+1} - v_n)^2 = (-g\tau)^2 = g^2\tau^2,$$

obtemos

$$\frac{1}{2}mv_{n+1}^2 - \frac{1}{2}mv_n^2 + \frac{1}{2}m\gamma g^2\tau^2 = -mgx_{n+1} + mgx_n.$$

Portanto,

$$E_{n+1} = E_n - \frac{1}{2}m\gamma g^2\tau^2.$$

De acordo com este resultado, podemos perceber que para preservar o princípio da conservação de energia é necessário considerar  $\gamma = 0$ . Assim, as equações discretas que devem ser consideradas, segundo o critério adotado, para o estudo do movimento de queda livre são as equações (3.8) e

$$\frac{v_{n+1} + v_n}{2} = \frac{x_{n+1} - x_n}{\tau}. \quad (3.14)$$

Se considerarmos  $\gamma = 1$ , por exemplo, iremos obter como resultado a equação discreta (3.7). Então, para o exemplo da queda livre, teremos

$$E_{n+1} = E_n - \frac{1}{2}mg^2\tau^2,$$

que não está de acordo com o princípio de conservação de energia. Entretanto, no limite em que  $\tau$  tende para zero, para um dado intervalo de tempo  $\Delta t$ , a conservação de energia é recuperada ( $N \gg 1$ ). Estes resultados nos mostram que quando consideramos o critério adotado, o processo de discretização nos permitirá obter soluções discretas que serão aproximações melhores em intervalos de tempo maiores, quando comparadas com soluções contínuas.

De acordo com as equações (3.11) e (3.12), podemos perceber que para valores diferentes de  $\gamma$  e  $\beta$  nós iremos obter equações discretas diferentes. Isso implica em uma escolha que devemos fazer e, portanto, julgamos necessário estabelecer um critério para nortear nossas escolhas. Entretanto, estabelecer um critério não é uma condição para o estudo de problemas de movimento através de equações discretizadas. As soluções discretas obtidas considerando todas as equações expostas até aqui são equivalentes no limite em que o parâmetro  $\tau$  tende para zero.

Um outro exemplo em que consideramos pertinente impor o critério da conservação de energia é o problema do oscilador harmônico simples. Neste tipo de movimento, sabemos que a energia mecânica se conserva, o que nos permite escrever  $E_{n+1} = E_n$ , onde

$$E_{n+1} = \frac{1}{2}kx_{n+1}^2 + \frac{1}{2}mv_{n+1}^2$$

e

$$E_n = \frac{1}{2}kx_n^2 + \frac{1}{2}mv_n^2.$$

Neste exemplo, estamos considerando um sistema massa-mola em uma dimensão, em que  $x_n$  e  $v_n$  são a posição relativa a posição de equilíbrio e a velocidade da massa em um instante  $t_n$ , respectivamente, e a constante  $k$  é a constante da mola. Considerando que a única força que age sobre a massa na direção do movimento é a força elástica  $F_n = -kx_n$ , podemos escrever, de acordo com a segunda lei de Newton discretizada,

$$F_n = -kx_n = ma_n.$$

Portanto, obtemos a seguinte equação para a aceleração:

$$a_n = -\frac{k}{m}x_n.$$

Com a equação acima, podemos escrever

$$a_{n+1} = -\frac{k}{m}x_{n+1}; \quad a_n = -\frac{k}{m}x_n.$$

De acordo com a equação (3.12), podemos escrever

$$\frac{(1 + \beta)a_{n+1} + (1 - \beta)a_n}{2} = \frac{v_{n+1} - v_n}{\tau}$$

ou, ainda,

$$-\frac{k}{m} \left[ \frac{(1 + \beta)x_{n+1} + (1 - \beta)x_n}{2} \right] = \frac{v_{n+1} - v_n}{\tau}.$$

Combinando a equação (3.11) com o resultado acima, obtemos

$$\frac{(1 + \gamma)v_{n+1} + (1 - \gamma)v_n}{2} = \frac{x_{n+1} - x_n}{\tau}$$

ou

$$\frac{(1 + \gamma)v_{n+1} + (1 - \gamma)v_n}{(x_{n+1} - x_n)} = -\frac{k}{m} \left[ \frac{(1 + \beta)x_{n+1} + (1 - \beta)x_n}{(v_{n+1} - v_n)} \right]$$

ou, ainda, que

$$[(1 + \gamma)v_{n+1} + (1 - \gamma)v_n](v_{n+1} - v_n) = -\frac{k}{m}(x_{n+1} - x_n)[(1 + \beta)x_{n+1} + (1 - \beta)x_n].$$

Rearranjando as parcelas, temos

$$v_{n+1}^2 - v_n^2 + \gamma(v_{n+1}^2 + v_n^2 - 2v_nv_{n+1}) = -\frac{k}{m} \left[ x_{n+1}^2 - x_n^2 + \beta(x_{n+1}^2 + x_n^2 - 2x_nx_{n+1}) \right]$$

ou

$$v_{n+1}^2 - v_n^2 + \gamma(v_{n+1} - v_n)^2 = -\frac{k}{m}(x_{n+1}^2 - x_n^2) - \frac{k}{m}\beta(x_{n+1} - x_n)^2.$$

Multiplicando o resultado acima por  $m/2$ , obtemos

$$\frac{1}{2}mv_{n+1}^2 - \frac{1}{2}mv_n^2 + \frac{1}{2}m\gamma(v_{n+1} - v_n)^2 = -\frac{1}{2}kx_{n+1}^2 + \frac{1}{2}kx_n^2 - \frac{1}{2}k\beta(x_{n+1} - x_n)^2$$

ou

$$\frac{1}{2}mv_{n+1}^2 + \frac{1}{2}kx_{n+1}^2 = \frac{1}{2}mv_n^2 + \frac{1}{2}kx_n^2 - \frac{1}{2}k\beta(x_{n+1} - x_n)^2 - \frac{1}{2}m\gamma(v_{n+1} - v_n)^2.$$

Então, temos que

$$E_{n+1} = E_n - \frac{1}{2}k\beta(x_{n+1} - x_n)^2 - \frac{1}{2}m\gamma(v_{n+1} - v_n)^2. \quad (3.15)$$

Novamente, devido a imposição do critério da conservação da energia e considerando o resultado obtido acima, devemos arbitrar os valores de  $\gamma$  e  $\beta$  de tal forma que a equação (3.15) se reduza a  $E_{n+1} = E_n$ . Para que essa redução ocorra, basta considerar  $\gamma = \beta = 0$ .

Portanto, ao estudar o problema de movimento do oscilador harmônico em uma dimensão usando equações discretas que irão gerar soluções que não ferem o princípio da conservação da energia a cada passo, devemos considerar as equações

$$\frac{v_{n+1} + v_n}{2} = \frac{x_{n+1} - x_n}{\tau} \quad (3.14)$$

e

$$\frac{a_{n+1} + a_n}{2} = \frac{v_{n+1} - v_n}{\tau}. \quad (3.16)$$

Neste trabalho, além de defender o uso da Física discreta no Ensino Médio como ferramenta que permite o estudo de problemas de movimento de corpos submetidos à ação de forças variáveis, mostraremos que a escolha adequada do valor do passo, ou seja, do valor de  $\tau$ , é muito importante para que os cálculos com as soluções obtidas produzam valores que permitam a análise das características de cada movimento. Para isso, resolvemos alguns problemas com discretizações diferentes, tentando ilustrar as vantagens que uma discretização apresenta quando comparada com outra.

## 4 Aplicações do método da discretização

### 4.1 Movimento uniforme

Nesta parte de nosso trabalho tentaremos ilustrar a aplicação do método de discretização. O movimento mais simples estudado no Ensino Médio é o movimento retilíneo uniforme. Uma partícula estará em movimento uniforme, em relação a um sistema de referência, quando sua velocidade for constante em relação a um observador em repouso neste sistema de referência. Consideremos o sistema de referência adotado na Seção 3.2. Como a velocidade da partícula é constante, a equação (3.7) nos permite escrever

$$v_{n+1} = \frac{x_{n+1} - x_n}{t_{n+1} - t_n}$$

e, deste modo, temos que

$$x_{n+1} = x_n + v(t_{n+1} - t_n).$$

Esta equação nos permite calcular valores sucessivos da posição da partícula quando o valor de  $n$  aumenta. Assim, temos

$$\begin{array}{ll} n = 0 & x_1 = x_0 + v\tau, \\ n = 1 & x_2 = x_1 + v\tau, \\ n = 2 & x_3 = x_2 + v\tau, \\ \vdots & \vdots \\ n = n - 1 & x_n = x_{n-1} + v\tau. \end{array}$$

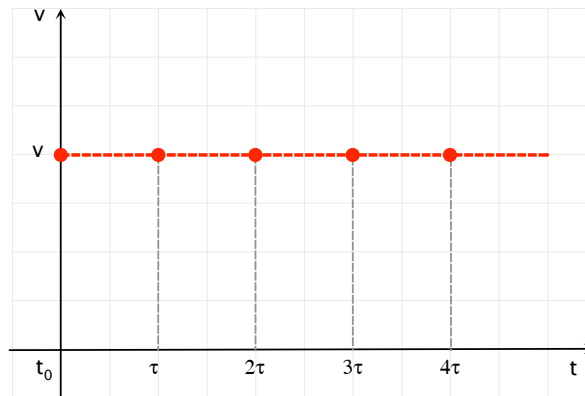
Ao somarmos as expressões acima, teremos como resultado uma expressão que permite determinar o valor da posição da partícula para qualquer valor de  $n$ .

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + vn\tau,$$

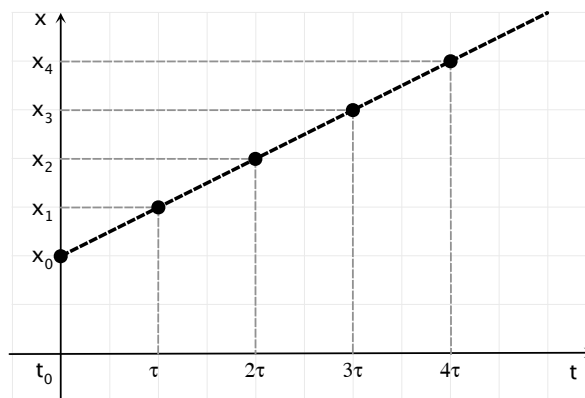
e, deste modo, temos que

$$x_n = x_0 + vt_n. \tag{4.1}$$

A equação (4.1) nos permite calcular as ordenadas da partícula para qualquer valor de  $n$ . Observe que para cada valor de  $n$  teremos uma ordenada correspondente. Portanto, a equação (4.1) é uma função  $x_n = f(n)$ , cujo domínio é o conjunto dos valores de  $n$  (o conjunto dos números naturais) e o contra-domínio (ou imagem da função) são os valores de  $x_n$ , obtidos variando os valores de  $n$  na função. Na linguagem da matemática a equação (4.1) é chamada de sequência. Esta equação é uma solução que chamaremos de solução discreta exata para o problema de movimento de uma partícula que se desloca com velocidade constante  $v$ , pois podemos escolher o valor de  $\tau$  e, conseqüentemente, de acordo com a relação (3.6), estaremos tão próximos de um instante  $t_n$  quanto desejarmos. Os gráficos  $v_n(t_n)$  vs.  $t_n$  e  $x_n(t_n)$  vs.  $t_n$  para um movimento como este serão:



**Figura 22.** – Velocidade discreta de um corpo em movimento uniforme.



**Figura 23.** – Solução discreta do problema de movimento que se desloca com velocidade constante.

## 4.2 Movimento sob a ação de uma força constante

Um problema importante no Ensino Médio é o movimento unidimensional sob a ação de uma força constante. Na Mecânica discreta uma força é constante se

$$F_{n+1} = F_n \quad \text{ou} \quad F_n = F.$$

Aplicando a segunda lei de Newton (3.9), obtemos

$$a_{n+1} = a_n \quad \text{ou} \quad a_n = a.$$

Esse movimento é, portanto, uniformemente acelerado. Aplicando a segunda lei de Newton e considerando a equação (3.8), podemos escrever

$$\left(\sum F\right)_n = ma$$

e, deste modo, temos que

$$m \left( \frac{v_{n+1} - v_n}{t_{n+1} - t_n} \right) = ma.$$

Portanto,

$$v_{n+1} = v_n + a\tau.$$

Seguindo os mesmos passos da seção anterior, podemos calcular valores sucessivos da velocidade da partícula:

$$\begin{array}{ll} n = 0 & v_1 = v_0 + a\tau, \\ n = 1 & v_2 = v_1 + a\tau, \\ n = 2 & v_3 = v_2 + a\tau, \\ \vdots & \vdots \\ n = n - 1 & v_n = v_{n-1} + a\tau. \end{array}$$

Somando as expressões acima, obteremos uma expressão parecida com a (4.1):

$$v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_{n-1} + v_n = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_{n-1} + an\tau,$$

que se reduz a

$$v_n = v_0 + an\tau$$

e, assim, temos que

$$v_n = v_0 + at_n. \quad (4.2)$$

A equação (4.2) nos permite calcular os valores da velocidade em diferentes instantes de tempo.

Para o cálculo das posições, de acordo com a equação (3.7), temos

$$v_{n+1} = \frac{x_{n+1} - x_n}{t_{n+1} - t_n}$$

e, deste modo, temos que

$$x_{n+1} = x_n + v_{n+1}\tau.$$

Na equação (4.2), se fizermos  $n = n + 1$ , obtemos como resultado  $v_{n+1} = v_0 + (n + 1)a\tau$ . Substituindo  $v_{n+1}$  na expressão acima por  $v_0 + (n + 1)a\tau$ , temos

$$x_{n+1} = x_n + [v_0 + (n + 1)a\tau]\tau$$

e, deste modo,

$$x_{n+1} = x_n + v_0\tau + (n + 1)a\tau^2.$$



Para valores diferentes de  $n$ , temos

$$\begin{array}{ll} n = 0 & x_1 = x_0 + v_0\tau + a\tau^2, \\ n = 1 & x_2 = x_1 + v_0\tau + 2a\tau^2, \\ n = 2 & x_3 = x_2 + v_0\tau + 3a\tau^2, \\ \vdots & \vdots \\ n = n - 1 & x_n = x_{n-1} + v_0\tau + na\tau^2. \end{array}$$

Somando as relações acima, exatamente como fizemos para a velocidade, obtemos

$$x_n = x_0 + nv_0\tau + (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n)a\tau^2. \quad (4.3)$$

As parcelas entre parênteses constituem a soma de uma sequência de números naturais chamada de progressão aritmética (PA), que é conhecida pelos alunos do Ensino Médio. Em uma progressão aritmética cada termo da sequência é obtido somando-se um valor constante  $r$ , chamado de razão da PA, ao termo anterior. A expressão matemática que permite calcular a soma  $S_n$  de  $n$  termos de uma PA é

$$S_n = \frac{(A_1 + A_n)n}{2},$$

onde  $A_1$  é chamado de primeiro termo da PA. Assim, podemos escrever

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{(1 + n)n}{2}$$

e substituir este resultado na equação (4.3):

$$x_n = x_0 + nv_0\tau + \left[ \frac{(1 + n)n}{2} \right] a\tau^2. \quad (4.4)$$

Esta é uma solução discreta exata do problema de movimento de uma partícula que se desloca em uma dimensão com aceleração constante.

O exemplo mais familiar de movimento retilíneo uniformemente acelerado é a queda livre de um corpo solto a partir de repouso. Este foi um dos problemas analisados por Galileu em seus trabalhos, que deram origem à era moderna da Física.

Um corpo em queda livre encontra-se submetido a ação de apenas uma força, oriunda da interação entre o corpo e a Terra, chamada de força peso ( $P = mg$ ). Aplicando a expressão (3.9) ao movimento de um corpo em queda livre, temos

$$\left( \sum F \right)_n = ma_n = -mg$$

e, então,

$$a_n = -g.$$

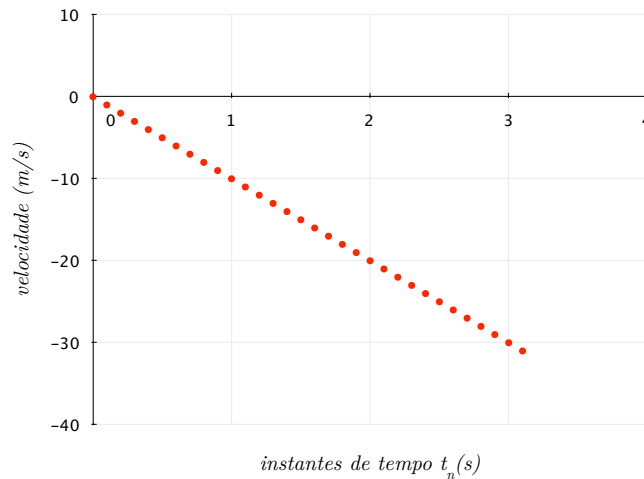
Substituindo este resultado nas equações (4.2) e (4.4), obtemos

$$v_n = v_0 - gt_n \quad (4.5)$$

e

$$x_n = x_0 + nv_0\tau - \left[ \frac{(1+n)n}{2} \right] g\tau^2. \quad (4.6)$$

A solução completa do problema de um corpo em queda livre depende dos valores  $x_0$  e  $v_0$ , chamados de valores iniciais. Os problemas de valores iniciais são aqueles em que é necessário conhecer valores iniciais de grandezas como velocidade e posição, para se obter os valores das posições e velocidades com a evolução temporal. Se considerarmos os valores iniciais  $x_0 = 50$  m,  $v_0 = 0$  e  $g = 9.8$  m/s<sup>2</sup>, estaremos tratando do movimento unidimensional de queda livre de um corpo que parte do repouso e que no instante  $t_0 = 0$  encontra-se à 50 m de distância da origem do sistema de referência. Isto é análogo a soltarmos uma esfera maciça de bilhar, de pequenas dimensões, do topo de um edifício de 50 m de altura. Os gráficos  $v_n(t_n)$  vs.  $t_n$  e  $x_n(t_n)$  vs.  $t_n$  deste movimento estão representados nas figuras 24 e 25, respectivamente.



**Figura 24.** – Velocidades discretas de um corpo em queda livre a partir do repouso.

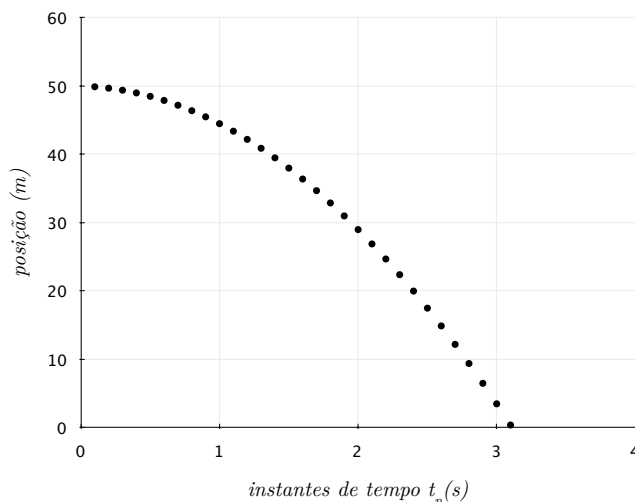
Se reescrevermos a equação (4.6) retirando os parenteses, obtemos

$$x_n = x_0 + nv_0\tau - \frac{g}{2}n^2\tau^2 - \frac{g}{2}n\tau^2$$

que, de acordo com a (3.5), pode ser reescrita na forma

$$x_n = x_0 + v_0t_n - \frac{g}{2}t_n^2 - \left( \frac{g}{2}t_n \right) \tau. \quad (4.7)$$

Observe que se  $\tau = 0$ , a equação (4.7) assume uma forma parecida com a (2.14). A cada instante  $t_n$ , um corpo em queda livre terá uma velocidade  $v_n$  e estará na posição  $x_n$ . A equação (4.7) não é a única solução discreta possível para o problema da queda livre. Outras soluções discretas podem ser obtidas. Estas soluções dependem de como é realizada a discretização da velocidade e da aceleração. Observe que se isolarmos  $t_n$  na



**Figura 25.** – Solução discreta do problema de movimento de um corpo em queda livre.

equação (4.2), com  $a = -g$ , e substituirmos na (4.7), obtemos

$$\begin{aligned} x_n &= x_0 + v_0 \left( \frac{v_0 - v_n}{g} \right) - \frac{g}{2} \left( \frac{v_0 - v_n}{g} \right)^2 - \frac{g}{2} \left( \frac{v_0 - v_n}{g} \right) \tau, \\ x_n &= x_0 + \frac{v_0^2 - v_0 v_n}{g} - \frac{v_0^2 - 2v_0 v_n + v_n^2}{2g} - \frac{1}{2} (v_0 - v_n) \tau, \\ x_n &= x_0 + \frac{v_0^2}{2g} - \frac{v_n^2}{2g} - \frac{1}{2} (v_0 - v_n) \tau. \end{aligned}$$

Multiplicando os dois lados por  $mg$ , temos

$$mgx_n = mgx_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv_n^2 - \frac{1}{2}mg(v_0 - v_n)\tau,$$

e, portanto,

$$mgx_n + \frac{1}{2}mv_n^2 = mgx_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mg(v_0 - v_n)\tau. \quad (4.8)$$

A equação (4.8) mostra que a energia mecânica de um corpo em queda livre não é conservada a cada passo. Entretanto, se  $\tau \rightarrow 0$ , a equação (4.8) torna-se a expressão matemática da conservação da energia mecânica, muito conhecida e aplicada em problemas de movimento pelos alunos do Ensino Médio.

Agora resolvemos o mesmo problema com outra discretização. Vamos usar a equação (3.14):

$$\frac{v_{n+1} + v_n}{2} = \frac{x_{n+1} - x_n}{t_{n+1} - t_n}.$$

Para o cálculo das velocidades o resultado é o mesmo: equação (4.2). Para o cálculo das posições, agora considerando a equação (3.14), temos

$$\frac{v_{n+1} + v_n}{2} = \frac{x_{n+1} - x_n}{t_{n+1} - t_n}$$

e, assim,

$$\frac{v_0 - (n+1)g\tau + v_0 - ng\tau}{2} = \frac{x_{n+1} - x_n}{\tau},$$

$$x_{n+1} = x_n + v_0\tau - \left(\frac{2n+1}{2}\right)g\tau^2.$$

Para valores diferentes de  $n$ , temos

$$\begin{array}{ll} n = 0 & x_1 = x_0 + v_0\tau - \frac{1}{2}g\tau^2, \\ n = 1 & x_2 = x_1 + v_0\tau - \frac{3}{2}g\tau^2, \\ n = 2 & x_3 = x_2 + v_0\tau - \frac{5}{2}g\tau^2, \\ \vdots & \vdots \\ n = n-1 & x_n = x_{n-1} + v_0\tau - \left(n - \frac{1}{2}\right)g\tau^2. \end{array}$$

Somando as expressões acima, obtemos

$$x_n = x_0 + nv_0\tau + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \frac{7}{2} + \cdots + n - \frac{1}{2}\right)g\tau^2.$$

A soma entre parênteses é a soma de uma PA, cujo primeiro termo é  $1/2$  e a razão é  $1$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \frac{7}{2} + \cdots + n - \frac{1}{2} &= \left(\frac{1}{2} + n - \frac{1}{2}\right) \frac{n}{2} \\ &= \frac{n^2}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, podemos escrever

$$x_n = x_0 + nv_0\tau - \left(\frac{n^2}{2}\right)g\tau^2$$

ou, ainda, que

$$x_n = x_0 + v_0t_n - \frac{g}{2}t_n^2. \quad (4.9)$$

Observe que a mudança na discretização da velocidade permitiu uma nova solução discreta.

Combinando as equações (4.2) e (4.9), obtemos

$$\begin{aligned} x_n &= x_0 + v_0 \left(\frac{v_0 - v_n}{g}\right) - \frac{g}{2} \left(\frac{v_0 - v_n}{g}\right)^2, \\ x_n &= x_0 + \frac{v_0^2 - v_0v_n}{g} - \frac{v_0^2 - 2v_0v_n + v_n^2}{2g}, \\ x_n &= x_0 + \frac{v_0^2}{2g} - \frac{v_n^2}{2g}, \\ mgx_n &= mgx_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv_n^2. \end{aligned}$$

Esta última equação pode ser reescrita na forma

$$mgx_n + \frac{1}{2}mv_n^2 = mgx_0 + \frac{1}{2}mv_0^2. \quad (4.10)$$

Portanto, com a escolha da equação (3.14), a energia mecânica é conservada a cada passo!

### 4.3 Movimento retilíneo com atrito

Em nosso cotidiano não é comum observarmos corpos que se movimentam livremente, ou seja, corpos que se movimentam no vácuo. Portanto, consideramos importante estudar movimentos de corpos em meios resistivos, como o ar. Um exemplo deste tipo de movimento, que consideramos possível ser estudado no Ensino Médio, é a queda de uma corpo que sofre a ação de forças resistivas proporcionais a velocidade (ou ao quadrado da velocidade) do corpo. Estas forças são exercidas pelo meio sobre o corpo que está em movimento. Consideremos o movimento de queda de um corpo de massa  $m$  em relação ao ar em repouso. Aplicando a segunda lei de Newton na forma da equação (3.9), temos

$$\left(\sum F\right)_n = ma_n$$

e, assim,

$$m \left( \frac{v_{n+1} - v_n}{t_{n+1} - t_n} \right) = -mg - bv_n.$$

Deste modo,

$$v_{n+1} = \left( 1 - \frac{b}{m}\tau \right) v_n - g\tau, \quad (4.11)$$

onde  $b$  é uma constante positiva e seu produto com a velocidade do corpo é a força resistiva que o meio exerce sobre o corpo. Para simplificar os cálculos consideremos  $\alpha = b/m$ . Substituindo  $n$  por  $n - 1$  na equação (4.11) obtemos

$$v_n = (1 - \alpha\tau)v_{n-1} - g\tau. \quad (4.12)$$

Subtraindo a equação (4.12) da equação (4.11), temos

$$v_{n+1} - v_n = (v_n - v_{n-1})(1 - \alpha\tau).$$

Calculando as diferenças entre as velocidades consecutivas para valores diferentes de  $n$ , obtemos

$$\begin{array}{ll} n = 1 & v_2 - v_1 = (v_1 - v_0)(1 - \alpha\tau) = (v_1 - v_0)(1 - \alpha\tau)^1, \\ n = 2 & v_3 - v_2 = (v_2 - v_1)(1 - \alpha\tau) = (v_1 - v_0)(1 - \alpha\tau)^2, \\ n = 3 & v_4 - v_3 = (v_3 - v_2)(1 - \alpha\tau) = (v_1 - v_0)(1 - \alpha\tau)^3, \\ & \vdots \\ n = n - 1 & v_n - v_{n-1} = (v_{n-1} - v_{n-2})(1 - \alpha\tau) = (v_1 - v_0)(1 - \alpha\tau)^{n-1}. \end{array}$$

Deste modo, podemos escrever que

$$v_n = v_{n-1} + (v_1 - v_0)(1 - \alpha\tau)^{n-1}.$$

Usando o resultado acima podemos calcular os valores das velocidades para valores diferentes de  $n$ :

$$\begin{array}{ll} n = 1 & v_1 = v_0 + (v_1 - v_0)(1 - \alpha\tau)^0, \\ n = 2 & v_2 = v_1 + (v_1 - v_0)(1 - \alpha\tau)^1, \\ n = 3 & v_3 = v_2 + (v_1 - v_0)(1 - \alpha\tau)^2, \\ \vdots & \vdots \\ n = n - 1 & v_n = v_{n-1} + (v_1 - v_0)(1 - \alpha\tau)^{n-1}. \end{array}$$

Somando as expressões acima obtemos a equação que nos permite calcular a velocidade para qualquer valor de  $n$ :

$$v_n = v_0 + (v_1 - v_0) \left[ 1 + (1 - \alpha\tau) + (1 - \alpha\tau)^2 + (1 - \alpha\tau)^3 + \dots + (1 - \alpha\tau)^{n-1} \right]. \quad (4.13)$$

A soma entre colchetes é a soma dos termos de uma progressão geométrica (PG), cujo primeiro termo é 1 e a razão é  $q = (1 - \alpha\tau)$ . A equação que permite calcular a soma dos  $n$  termos de uma progressão geométrica é

$$S_n = \frac{A_1(q^n - 1)}{q - 1}, \quad (4.14)$$

onde  $A_1$  é o primeiro termo da PG e  $q$  é a razão entre os termos  $A_n$  e  $A_{n-1}$ , ou seja,  $q = A_n/A_{n-1}$ . Esses conceitos fazem parte do conteúdo de matemática ensinado no nível médio. Portanto, podemos escrever

$$1 + (1 - \alpha\tau) + (1 - \alpha\tau)^2 + (1 - \alpha\tau)^3 + \dots + (1 - \alpha\tau)^{n-1} = \left[ \frac{(1 - \alpha\tau)^n - 1}{1 - \alpha\tau - 1} \right].$$

Deste modo,

$$v_n = v_0 + (v_1 - v_0) \left[ \frac{(1 - \alpha\tau)^n - 1}{1 - \alpha\tau - 1} \right],$$

ou, ainda, que

$$v_n = v_0 - (v_1 - v_0) \left[ \frac{(1 - \alpha\tau)^n - 1}{\alpha\tau} \right]. \quad (4.15)$$

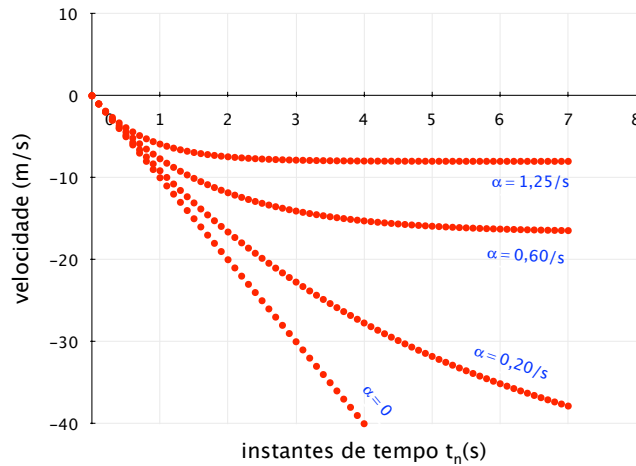
De acordo com a equação (4.12), o termo  $v_1 - v_0$  vale

$$v_1 - v_0 = -g\tau - \alpha\tau v_0.$$

Substituindo este resultado na equação (4.15), temos

$$v_n = v_0 + (g\tau + \alpha\tau v_0) \left[ \frac{(1 - \alpha\tau)^n - 1}{\alpha\tau} \right]. \quad (4.16)$$

A equação (4.16) nos permite construir os gráficos das velocidades de uma partícula considerando valores diferentes para  $\alpha$ .



**Figura 26.** – Velocidades discretas de corpos em queda. Observe que é possível perceber e estimar os valores das velocidades terminais em cada situação.

Observe que quando consideramos a ação do ar, a velocidade da partícula em queda tende para um valor constante. Isto pode ser notado na figura 26. Esta velocidade é chamada de velocidade terminal. A velocidade terminal depende da forma da partícula e de sua velocidade inicial.

Para calcular as posições de uma partícula em queda que sofre a resistência do ar, podemos escrever a equação (3.7) substituindo  $n$  por  $n - 1$ . Desta forma obtemos

$$v_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}. \quad (4.17)$$

Usando as equações (4.16) e (4.17), obtemos

$$x_n = x_{n-1} + \left\{ v_0 + (g\tau + \alpha\tau v_0) \left[ \frac{(1 - \alpha\tau)^n - 1}{\alpha\tau} \right] \right\} \tau,$$

ou, ainda, que

$$x_n = x_{n-1} + v_0\tau + (g\tau + \alpha\tau v_0) \left[ \frac{(1 - \alpha\tau)^n - 1}{\alpha\tau} \right] \tau.$$

Para diferentes valores de  $n$ , temos

$$\begin{aligned} n = 1 & \quad x_1 = x_0 + v_0\tau + (g\tau + \alpha\tau v_0) \left[ \frac{(1 - \alpha\tau)^1 - 1}{\alpha\tau} \right] \tau, \\ n = 2 & \quad x_2 = x_1 + v_0\tau + (g\tau + \alpha\tau v_0) \left[ \frac{(1 - \alpha\tau)^2 - 1}{\alpha\tau} \right] \tau, \\ n = 3 & \quad x_3 = x_2 + v_0\tau + (g\tau + \alpha\tau v_0) \left[ \frac{(1 - \alpha\tau)^3 - 1}{\alpha\tau} \right] \tau, \\ & \quad \vdots \\ n = n - 1 & \quad x_{n-1} = x_{n-2} + v_0\tau + (g\tau + \alpha\tau v_0) \left[ \frac{(1 - \alpha\tau)^{n-1} - 1}{\alpha\tau} \right] \tau. \end{aligned}$$

A soma entre colchetes

$$(1 - \alpha\tau)^1 + (1 - \alpha\tau)^2 + \cdots + (1 - \alpha\tau)^n$$

é a soma de uma PG cujo primeiro termo e a razão são iguais a  $(1 - \alpha\tau)$ . Portanto, de acordo com a equação (4.14), podemos escrever

$$x_n = x_0 + nv_0\tau + \frac{(g\tau + \alpha\tau v_0)}{\alpha} \left\{ \left[ \frac{(1 - \alpha\tau)^n - 1}{(1 - \alpha\tau) - 1} \right] - n \right\},$$

ou

$$x_n = x_0 + nv_0\tau - \frac{(g\tau + \alpha\tau v_0)}{\alpha} \left\{ (1 - \alpha\tau) \left[ \frac{(1 - \alpha\tau)^n - 1}{\alpha\tau} \right] + n \right\},$$

ou, ainda,

$$x_n = x_0 + nv_0\tau - \frac{(g + \alpha v_0)}{\alpha^2} \{ (1 - \alpha\tau)[(1 - \alpha\tau)^n - 1] + n\alpha\tau \}, \quad (4.18)$$

que é uma solução discreta exata do problema de queda de um corpo que sofre a ação resistiva do ar. O termo  $(1 - \alpha\tau)^n$  é um binômio de Newton da forma

$$(c + h)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} c^{n-k} h^k,$$

onde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{n!(n-k)!}$$

é chamado de coeficiente binomial. Portanto, podemos escrever

$$\begin{aligned} (1 - \alpha\tau)^n &= 1 - n\alpha\tau \\ &+ \frac{n(n-1)}{2!}(-\alpha\tau)^2 \\ &- \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\alpha^3\tau^3 + \cdots + 1^0(-\alpha\tau)^n, \end{aligned} \quad (4.19)$$

que é uma aplicação da expansão binomial em um problema de Mecânica. Para simplificar não escreveremos as parcelas da soma acima entre  $n(n-1)(-\alpha\tau)^2/2!$  e  $(-\alpha\tau)^n$ . Então, podemos reescrever a equação (4.18) e obtermos

$$\begin{aligned} x_n &= x_0 + nv_0\tau \\ &- \frac{(g + \alpha v_0)}{\alpha^2} \times \\ &\left\{ (1 - \alpha\tau) \left[ 1 - n\alpha\tau + \frac{n(n-1)}{2}(-\alpha\tau)^2 + \cdots + (-\alpha\tau)^n - 1 \right] + n\alpha\tau \right\} \end{aligned}$$

ou, ainda,

$$\begin{aligned} x_n &= x_0 + nv_0\tau \\ &- \frac{(g + \alpha v_0)}{\alpha^2} \times \\ &\left[ \frac{n(n-1)}{2}(-\alpha\tau)^2 + \cdots + (-\alpha\tau)^n + n\alpha^2\tau^2 - \frac{n(n-1)}{2}(\alpha\tau)^3 + (-\alpha\tau)^{n+1} \right]. \end{aligned}$$



Multiplicando todas as parcelas entre colchetes na expressão acima por  $\alpha^{-2}$ , obtemos

$$x_n = x_0 + nv_0\tau - (g + \alpha v_0) \left[ \frac{n(n-1)}{2} \tau^2 + n\tau^2 \right],$$

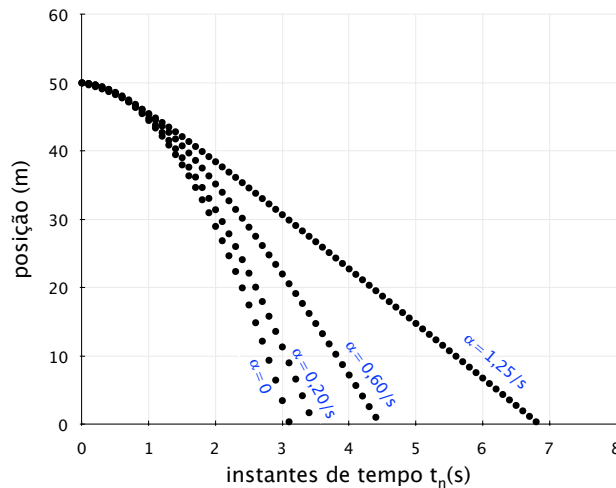
onde os termos entre colchetes que foram omitidos estão multiplicados por alguma potência de  $\alpha$ . Se  $\alpha = 0$ , ou seja, se desprezamos a resistência do ar, podemos reescrever o resultado acima e obtermos

$$x_n = x_0 + nv_0\tau - g \left[ \frac{n(n-1)}{2} \tau^2 + n\tau^2 \right],$$

ou, ainda, que

$$x_n = x_0 + nv_0\tau - \frac{n(n+1)}{2} g\tau^2,$$

Assim podemos perceber que a equação (4.6) é um caso particular da equação (4.18) quando a resistência do ar é desprezada, ou seja, quando  $\alpha = 0$ . Usando a equação (4.18) e considerando valores diferentes para  $\alpha$ , podemos construir os gráficos da figura 27.



**Figura 27.** – Solução dos problemas de movimento de um corpo em queda considerando o seu atrito.

Na figura 27 estão representados os gráficos  $x(t_n)$  vs.  $t_n$  de corpos que caem a partir de uma mesma altura ( $x = 50$  m) e chegam ao solo ( $x = 0$ ) em instantes diferentes. Observe que os corpos cujos gráficos estão representados nas cores preta e verde atingem a velocidade terminal antes de chegar ao solo.

Como na seção anterior, podemos encontrar outra solução para o problema de queda de um corpo que sofre a ação do ar. Consideremos as equações (3.14) e (4.16):

$$\frac{v_{n+1} + v_n}{2} = \left( \frac{x_{n+1} - x_n}{t_{n+1} - t_n} \right)$$

e

$$v_n = v_0 + (g\tau + \alpha\tau v_0) \left[ \frac{(1 - \alpha\tau)^n - 1}{\alpha\tau} \right].$$

De acordo com estas equações, podemos escrever

$$v_{n+1} + v_n = v_0 + (g\tau + \alpha\tau v_0) \left[ \frac{(1 - \alpha\tau)^{n+1} - 1}{\alpha\tau} \right] \\ + v_0 + (g\tau + \alpha\tau v_0) \left[ \frac{(1 - \alpha\tau)^n - 1}{\alpha\tau} \right]$$

e, então, temos que

$$2 \left( \frac{x_{n+1} - x_n}{t_{n+1} - t_n} \right) = 2v_0 + (g\tau + \alpha\tau v_0) \left[ \frac{(1 - \alpha\tau)^{n+1} - 1}{\alpha\tau} + \frac{(1 - \alpha\tau)^n - 1}{\alpha\tau} \right].$$

Deste modo, podemos escrever que

$$x_{n+1} - x_n = v_0\tau + \frac{\tau}{2}(g\tau + \alpha\tau v_0) \left[ \frac{(1 - \alpha\tau)^{n+1} - 1}{\alpha\tau} + \frac{(1 - \alpha\tau)^n - 1}{\alpha\tau} \right],$$

e, rearranjando os termos, obtemos

$$x_{n+1} = x_n + v_0\tau + \frac{(g\tau + \alpha\tau v_0)}{2\alpha} \left[ (1 - \alpha\tau)^{n+1} + (1 - \alpha\tau)^n - 2 \right].$$

Temos então que

$$x_{n+1} = x_n + v_0\tau + \frac{(g\tau + \alpha\tau v_0)}{2\alpha} \left[ (1 - \alpha\tau)^n(1 - \alpha\tau) + (1 - \alpha\tau)^n - 2 \right],$$

ou

$$x_{n+1} = x_n + v_0\tau + \frac{(g\tau + \alpha\tau v_0)}{2\alpha} \left[ 2(1 - \alpha\tau)^n - \alpha\tau(1 - \alpha\tau)^n - 2 \right].$$

Finalmente,

$$x_{n+1} = x_n + v_0\tau + \frac{(g\tau + \alpha\tau v_0)}{\alpha} \left[ (1 - \alpha\tau)^n \left( 1 - \frac{\alpha\tau}{2} \right) - 1 \right].$$

Fazendo a substituição  $\beta = (1 - \alpha\tau/2)$ , temos

$$x_{n+1} = x_n + v_0\tau + \frac{(g\tau + \alpha\tau v_0)}{\alpha} \left[ \beta(1 - \alpha\tau)^n - 1 \right].$$

Para valores diferentes de  $n$ , temos

$$\begin{aligned} n = 0 & \quad x_1 = x_0 + v_0\tau + \frac{(g\tau + \alpha\tau v_0)}{\alpha} \left[ \beta(1 - \alpha\tau)^0 - 1 \right], \\ n = 1 & \quad x_2 = x_1 + v_0\tau + \frac{(g\tau + \alpha\tau v_0)}{\alpha} \left[ \beta(1 - \alpha\tau)^1 - 1 \right], \\ n = 2 & \quad x_3 = x_2 + v_0\tau + \frac{(g\tau + \alpha\tau v_0)}{\alpha} \left[ \beta(1 - \alpha\tau)^2 - 1 \right], \\ & \quad \vdots \\ n = n - 1 & \quad x_n = x_{n-1} + v_0\tau + \frac{(g\tau + \alpha\tau v_0)}{\alpha} \left[ \beta(1 - \alpha\tau)^{n-1} - 1 \right]. \end{aligned}$$

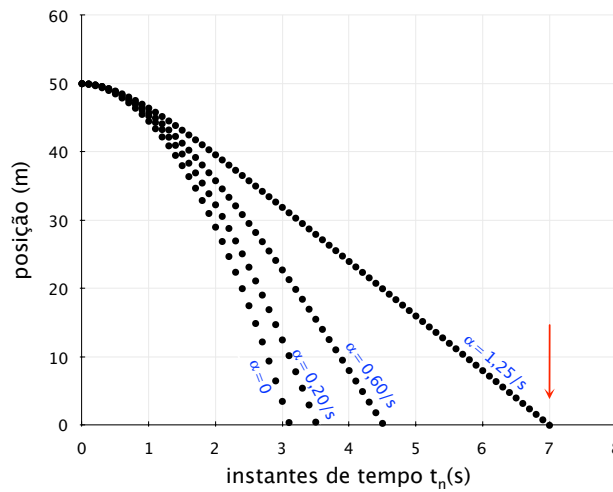
Somando todas as  $n$  expressões, temos

$$x_n = x_0 + nv_0\tau + \frac{(g\tau + \alpha\tau v_0)}{\alpha} \left\{ \beta \left[ 1 + (1 - \alpha\tau)^1 + \dots + (1 - \alpha\tau)^{n-1} \right] - n \right\},$$

ou

$$x_n = x_0 + nv_0\tau - \frac{(g + \alpha v_0)}{\alpha^2} \left\{ \beta \left[ (1 - \alpha\tau)^n - 1 \right] + n\alpha\tau \right\}. \quad (4.20)$$

Usando a equação (4.20) podemos construir os gráficos dos movimentos considerando valores diferentes de  $\alpha$ , assim como está representado na figura 28.



**Figura 28.** – Solução discreta dos problemas de movimento de um corpo em queda considerando (4.16) e (4.20).

Observe que as figuras 27 e 28 não são idênticas. Entretanto, devido ao pequeno valor do passo, as diferenças são pequenas. Ms, com um olhar atento, podemos perceber que a escolha da equação (3.14) produziu uma nova solução. Observe as indicações no gráfico da figura 28. Isto se deve ao fato de termos considerado um passo pequeno:  $\tau = 0.01 \text{ s}$ . Nesta situação, considerando um passo pequeno, a diferença nos valores obtidos com as equações (4.18) e (4.20) são muito pequenas.

A expansão do binômio de Newton  $(1 - \alpha\tau)^n$  nos permite escrever

$$x_n = x_0 + nv_0\tau - \frac{(g + \alpha v_0)}{\alpha^2} \left\{ \beta \left[ -n\alpha\tau + \frac{n(n-1)}{2!}(-\alpha\tau)^2 + \dots + 1^0(-\alpha\tau)^n \right] + n\alpha\tau \right\}$$

ou

$$x_n = x_0 + nv_0\tau - \frac{(g + \alpha v_0)}{\alpha^2} \left\{ \left( 1 - \frac{\alpha\tau}{2} \right) \left[ -n\alpha\tau + \frac{n(n-1)}{2!}(-\alpha\tau)^2 + \dots + 1^0(-\alpha\tau)^n \right] + n\alpha\tau \right\}.$$

Omitindo os termos com  $\alpha^n (n \geq 3)$ , temos

$$x_n = x_0 + nv_0\tau - \frac{(g + \alpha v_0)}{\alpha^2} \left\{ \left[ -n\alpha\tau + \frac{n(n-1)}{2!}(-\alpha\tau)^2 + \frac{n\alpha^2\tau^2}{2} \right] + n\alpha\tau \right\},$$

ou

$$x_n = x_0 + nv_0\tau - \frac{(g + \alpha v_0)}{\alpha^2} \left( \frac{n\alpha^2\tau^2}{2} + \frac{n^2\alpha^2\tau^2}{2} - \frac{n\alpha^2\tau^2}{2} \right),$$

ou, ainda,

$$x_n = x_0 + nv_0\tau - (g + \alpha v_0) \left( \frac{n^2\tau^2}{2} \right).$$

Portanto,

$$x_n = x_0 + v_0t_n - \frac{1}{2}gt_n^2 + \frac{1}{2}\alpha v_0t_n^2.$$

Se  $\alpha = 0$ , reobtemos a equação (4.9):

$$x_n = x_0 + v_0t_n - \frac{1}{2}gt_n^2.$$

Nosso objetivo com essa discussão é mostrar que é possível encontrar mais de uma solução discreta exata para o mesmo problema de movimento. Neste momento, estamos interessados em soluções discretas que nos permitam escrever uma equação que represente adequadamente o balanço de energia a cada passo. Observe que, se considerarmos as equações (4.11) e (4.17), temos

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{v_n} = \frac{v_{n+1} - v_n}{-g - \alpha v_n},$$

ou

$$-gx_n + gx_{n-1} - \alpha v_n x_n + \alpha v_n x_{n-1} = v_n v_{n+1} - v_n^2.$$

Multiplicando a expressão acima por  $m$ , temos

$$mgx_{n-1} + mv_n^2 - bv_n x_n + bv_n x_{n-1} = mv_n v_{n+1} + mgx_n + bv_n(x_n - x_{n-1}).$$

A expressão acima não nos dá informações adequadas sobre o balanço de energia. Entretanto, se considerarmos as equações (4.11) e (3.14), temos

$$2 \left( \frac{x_{n+1} - x_n}{v_{n+1} + v_n} \right) = - \left( \frac{v_{n+1} - v_n}{g + \alpha v_n} \right).$$

Arrumando os termos e multiplicando o resultado por  $m/2$ , temos

$$-mgx_{n+1} + mgx_n - bv_n x_{n+1} + bv_n x_n = \frac{1}{2}m(v_{n+1} + v_n)(v_{n+1} - v_n),$$

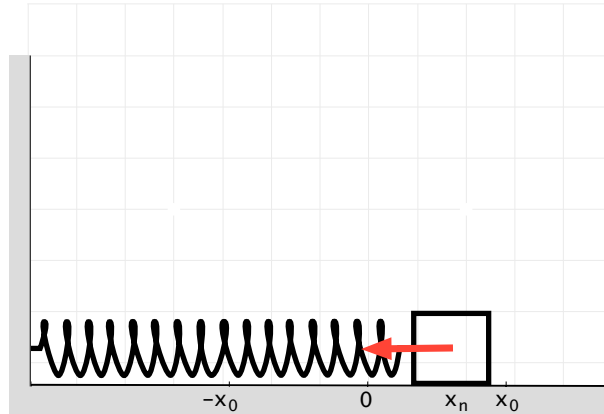
$$\frac{1}{2}mv_n^2 + mgx_n = \frac{1}{2}mv_{n+1}^2 + mgx_{n+1} - bv_n(x_{n+1} - x_n). \quad (4.21)$$

A expressão (4.21) nos informa que a energia mecânica não se conserva a cada passo. O termo  $-bv_n(x_{n+1} - x_n)$  representa a quantidade de energia dissipada a cada passo, ou seja, o trabalho realizado pela força  $-bv_n$  durante o deslocamento  $x_{n+1} - x_n$ . A equação (4.21) nos dá o balanço de energia a cada passo.

Consideramos importante a discussão acerca do movimento de queda considerando-se a resistência do ar porque esta situação está presente no cotidiano dos alunos.

## 4.4 Oscilador harmônico

Nesta seção aplicaremos as equações da mecânica discreta ao sistema massa-mola. Observe a figura 29 abaixo.



**Figura 29.** – O sistema massa-mola: um oscilador harmônico em uma dimensão.

A força da mola sobre a massa é

$$F_n = -kx_n, \quad (4.22)$$

onde  $k$  é a constante da mola. Considerando que a força da mola (4.22) seja a única força aplicada na massa e usando a segunda lei de Newton, obtemos

$$a_n = -\frac{k}{m}x_n, \quad (4.23)$$

onde  $m$  é a massa do corpo. Definindo a constante

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad (4.24)$$

podemos escrever as equações discretizadas do movimento, de acordo com as equações (3.10) e (3.8):

$$x_{n+1} = x_n + v_n\tau \quad (4.25)$$

e

$$v_{n+1} = v_n - \omega^2 x_n \tau. \quad (4.26)$$

Multiplicando a equação (4.25) por  $i\omega$ , obtemos

$$i\omega x_{n+1} = i\omega x_n + i\omega v_n \tau. \quad (4.27)$$

É acessível aos alunos do Ensino Médio, por fazer parte do conteúdo ensinado, as notações e operações envolvendo números complexos. A relação  $i^2 = -1$  nos permite escrever  $-\omega^2 = (-1)\omega^2 = i^2\omega \cdot \omega$ . Somando e subtraindo as equações (4.26) e (4.27) obtemos

$$v_{n+1} + i\omega x_{n+1} = i\omega x_n + i\omega v_n\tau + v_n + i^2\omega \cdot \omega x_n\tau,$$

ou

$$v_{n+1} + i\omega x_{n+1} = v_n + i\omega x_n + i\omega\tau(v_n + i\omega x_n). \quad (4.28)$$

Também temos que

$$v_{n+1} - i\omega x_{n+1} = v_n + i^2\omega \cdot \omega x_n\tau - i\omega x_n - i\omega v_n\tau,$$

ou, ainda,

$$v_{n+1} - i\omega x_{n+1} = v_n - i\omega x_n - i\omega\tau(v_n - i\omega x_n). \quad (4.29)$$

Fatorando as equações (4.28) e (4.29), vem

$$v_{n+1} + i\omega x_{n+1} = (1 + i\omega\tau)(v_n + i\omega x_n), \quad (4.30)$$

$$v_{n+1} - i\omega x_{n+1} = (1 - i\omega\tau)(v_n - i\omega x_n). \quad (4.31)$$

Fazendo  $n = 1, 2, 3, \dots, n - 1$ , temos

$$\begin{aligned} n = 0 & & v_1 + i\omega x_1 &= (1 + i\omega\tau)(v_0 + i\omega x_0), \\ n = 1 & & v_2 + i\omega x_2 &= (1 + i\omega\tau)(v_1 + i\omega x_1) = (1 + i\omega\tau)^2(v_0 + i\omega x_0), \\ n = 2 & & v_3 + i\omega x_3 &= (1 + i\omega\tau)(v_2 + i\omega x_2) = (1 + i\omega\tau)^3(v_0 + i\omega x_0), \\ & \vdots & & \\ n = n - 1 & & v_n + i\omega x_n &= (1 + i\omega\tau)^n(v_0 + i\omega x_0). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Com o mesmo procedimento acima aplicado a equação (4.31), obtemos

$$v_n - i\omega x_n = (1 - i\omega\tau)^n(v_0 - i\omega x_0). \quad (4.33)$$

Das equações (B.3) e (4.33), obtemos

$$v_n = \frac{(1 + i\omega\tau)^n(v_0 + i\omega x_0) + (1 - i\omega\tau)^n(v_0 - i\omega x_0)}{2} \quad (4.34)$$

e

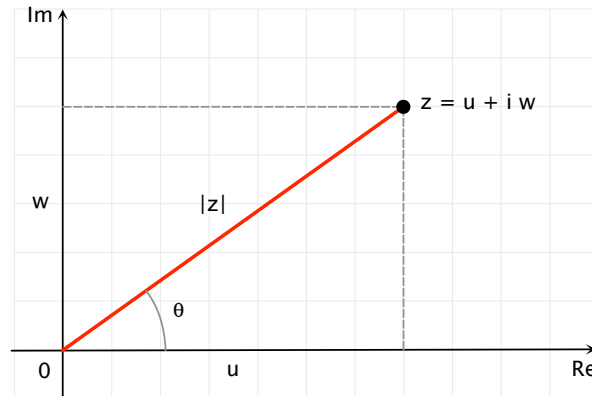
$$x_n = \frac{(1 + i\omega\tau)^n(v_0 + i\omega x_0) - (1 - i\omega\tau)^n(v_0 - i\omega x_0)}{i2\omega}, \quad (4.35)$$

que constituem uma solução discreta exata do problema de movimento do sistema massa-mola. Se trabalharmos nas equações (4.34) e (4.35) aplicando algumas propriedades dos números complexos, que são estudadas no Ensino Médio, obteremos equações apenas com termos reais.

Um número complexo pode ser escrito como

$$z = u + iw, \quad (4.36)$$

onde  $u$  e  $w$  são números reais e  $i = \sqrt{-1}$ . O número complexo  $z$  pode ser representado em um plano conforme mostrado na figura 30.



**Figura 30.** – Representação gráfica de um número complexo.

Da figura 30, podemos perceber que o módulo de  $z$  é

$$|z| = \sqrt{u^2 + w^2} \quad (4.37)$$

e que o ângulo  $\theta$  é dado por

$$\theta = \arctan\left(\frac{w}{u}\right). \quad (4.38)$$

Podemos também representar um número complexo em coordenadas polares. Desta forma, obtemos:

$$z = |z| (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta). \quad (4.39)$$

De acordo com a equação (4.39), é possível demonstrar que

$$z^n = |z|^n (\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)) \quad (4.40)$$

e

$$\bar{z}^n = |z|^n (\cos(n\theta) - i \operatorname{sen}(n\theta)), \quad (4.41)$$

onde  $\bar{z}$  é o complexo conjugado de  $z$ . As equações (4.39), (4.40) e (4.41) estão demonstradas no Apêndice B deste trabalho. Assim, reescrevendo as equações (4.34) e (4.35) e aplicando as equações (4.40) e (4.41) aos números complexos  $(1 + i\omega\tau)^n$  e seu conjugado  $(1 - i\omega\tau)^n$  obtemos

$$v_n = \frac{(1 + i\omega\tau)^n (v_0 + i\omega x_0) + (1 - i\omega\tau)^n (v_0 - i\omega x_0)}{2}.$$

Deste modo, temos que

$$v_n = \frac{v_0}{2} [(1 + i\omega\tau)^n + (1 - i\omega\tau)^n] + i\omega \frac{x_0}{2} [(1 + i\omega\tau)^n - (1 - i\omega\tau)^n]$$

e, assim, temos que

$$v_n = \left[ \left( \sqrt{1 + (\omega\tau)^2} \right)^n \cos(n\theta) \right] v_0 - \left[ \left( \sqrt{1 + (\omega\tau)^2} \right)^n \sin(n\theta) \right] \omega x_0.$$

Portanto,

$$v_n = \left( \sqrt{1 + (\omega\tau)^2} \right)^n [v_0 \cos(n\theta) - \omega x_0 \sin(n\theta)]. \quad (4.42)$$

temos ainda que

$$x_n = \frac{(1 + i\omega\tau)^n (v_0 + i\omega x_0) - (1 - i\omega\tau)^n (v_0 - i\omega x_0)}{i2\omega}$$

ou

$$x_n = \frac{v_0}{i2\omega} [(1 + i\omega\tau)^n - (1 - i\omega\tau)^n] + \frac{x_0}{2} [(1 + i\omega\tau)^n + (1 - i\omega\tau)^n],$$

$$x_n = \left( \sqrt{1 + (\omega\tau)^2} \right)^n \left[ \frac{v_0}{\omega} \sin(n\theta) + x_0 \cos(n\theta) \right]. \quad (4.43)$$

Os argumentos das funções seno e cosseno das equações (4.42) e (4.43) podem ser reescritos considerando a relação  $\theta_n = n\theta$ , onde  $\theta$  é um ângulo inicial cujo valor é determinado pela escolha do passo  $\tau$ , ou seja, seu valor pode ser tão pequeno quanto quisermos. Assim como  $\tau$  corresponde a uma variação de tempo entre  $t_{n+1}$  e  $t_n$ , o ângulo  $\theta$  corresponde a uma variação angular entre  $\theta_{n+1}$  e  $\theta_n$ . Então, vamos definir a função frequência angular discreta como a razão entre uma variação angular discreta  $\theta = \theta_{n+1} - \theta_n$ , que representaremos por  $\theta_d$ , e um intervalo de tempo  $\tau$ . Assim temos:

$$\omega_d = \frac{\theta_d}{\tau}. \quad (4.44)$$

Vamos nos limitar aos problemas em que  $\omega_d$  tem valor constante. Assim podemos escrever

$$n\theta_d = \omega_d n\tau,$$

$$n\theta_d = \omega_d t_n.$$

Então, considerando a definição (4.44), podemos reescrever as equações (4.42) e (4.43):

$$v_n = \left[ \sqrt{1 + (\omega\tau)^2} \right]^n [v_0 \cos(\omega_d t_n) - \omega x_0 \sin(\omega_d t_n)] \quad (4.45)$$

e

$$x_n = \left[ \sqrt{1 + (\omega\tau)^2} \right]^n \left[ \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega_d t_n) + x_0 \cos(\omega_d t_n) \right]. \quad (4.46)$$

Observe que  $\omega \neq \omega_d$ . Aplicando a equação (4.38) ao complexo  $(1 + i\omega\tau)^n$ , temos

$$\tan \theta_d = \tan(\omega_d \tau)$$



$$\omega_d = \frac{1}{\tau} \arctan(\omega\tau). \quad (4.47)$$

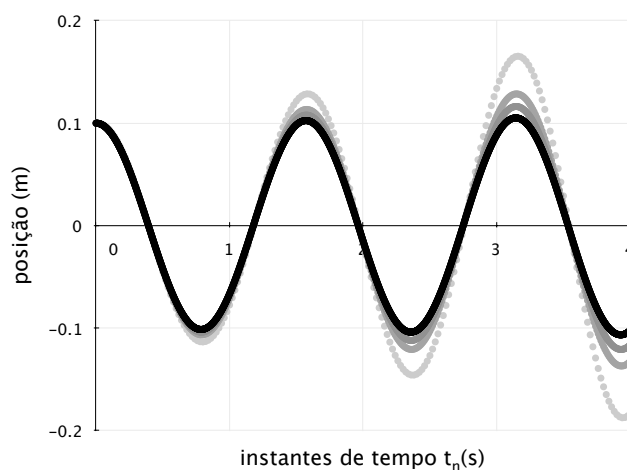
Gostaríamos de chamar a atenção para o fato de ser possível fazer uma argumentação lógica a respeito das relações (4.47): quando o argumento de uma função seno ou tangente é pequeno, podemos considerar a aproximação de pequenos ângulos  $\text{sen}(\theta) \cong \text{tg}(\theta) \cong \theta$ . Desta forma, podemos escrever

$$\tan(\omega_d\tau) = \frac{\omega\tau}{1}$$

ou

$$\omega_d = \omega \quad (\tau \rightarrow 0), \quad (4.48)$$

que nos permite concluir que a função frequência angular discreta tende para  $\omega$  quando consideramos passos cada vez menores. Note que estamos propondo uma argumentação que possa ser feita em uma turma de Ensino Médio. Entretanto, demonstraremos rigorosamente no Apêndice B a relação (4.47) e o caso limite (4.48). Com as equações (4.45) e (4.46), podemos construir os gráficos do movimento. Se considerarmos passos diferentes, ou seja, valores diferentes para  $\tau$ , na equação (4.46), podemos observar variações nas amplitudes e, portanto, concluir que a energia mecânica do sistema, que depende da amplitude do movimento, não está sendo conservada. Entretanto, à medida que diminuimos o valor do passo, o gráfico do movimento nos mostra que a amplitude não varia a cada ciclo e, portanto, podemos concluir que para valores de  $\tau$  muito pequenos, em um dado intervalo de tempo  $\Delta t$ , a energia é conservada, quando estudamos o problema com a equação (4.46). Consideramos para a obtenção dos gráficos da figura 31:  $\omega = 4.0 \text{ s}^{-1}$ ,  $v_0 = 0$  e  $x_0 = 0.1 \text{ m}$ .



**Figura 31.** – Solução discreta do problema de movimento de um oscilador harmônico. Observe, através dos gráficos, que a energia não é conservada.

Assim, como fizemos nas seções anteriores, se multiplicarmos as equações (4.25) e (4.26) concluiremos que o resultado não nos dará informações sobre a conservação da

energia mecânica do sistema. Entretanto, se considerarmos outra discretização para a velocidade e para a aceleração obteremos uma equação que representará adequadamente o que de fato acontece, ou seja, a equação da conservação da energia mecânica. Vamos considerar as equações (3.14) e (3.16). Assim, podemos escrever a equação (3.14)

$$\frac{v_{n+1} + v_n}{2} = \frac{x_{n+1} - x_n}{\tau}$$

na forma

$$x_{n+1} = x_n + \left( \frac{v_{n+1} + v_n}{2} \right) \tau, \quad (4.49)$$

e a equação (3.16)

$$\frac{a_{n+1} + a_n}{2} = \frac{v_{n+1} - v_n}{\tau}$$

na forma

$$v_{n+1} = v_n - \omega^2 \left( \frac{x_{n+1} + x_n}{2} \right) \tau. \quad (4.50)$$

As equações (4.49) e (4.50) correspondem a outra solução discreta para este problema. Multiplicando a equação (4.49) por  $i\omega$ , temos

$$i\omega x_{n+1} = i\omega x_n + i\omega \tau \left( \frac{v_{n+1} + v_n}{2} \right). \quad (4.51)$$

Reescrevendo a equação (4.50), obtemos

$$v_{n+1} = v_n + i\omega i\omega \tau \left( \frac{x_{n+1} + x_n}{2} \right).$$

Subtraindo e somando as equações (4.50) e (4.51), obtemos

$$v_{n+1} - i\omega x_{n+1} = v_n + i\omega i\omega \tau \left( \frac{x_{n+1} + x_n}{2} \right) - i\omega x_n - i\omega \tau \left( \frac{v_{n+1} + v_n}{2} \right),$$

ou

$$\left( 1 + \frac{i\omega \tau}{2} \right) (v_{n+1} - i\omega x_{n+1}) = \left( 1 - \frac{i\omega \tau}{2} \right) (v_n - i\omega x_n),$$

ou, ainda, que

$$v_{n+1} - i\omega x_{n+1} = \left( \frac{1 - \frac{i\omega \tau}{2}}{1 + \frac{i\omega \tau}{2}} \right) (v_n - i\omega x_n). \quad (4.52)$$

Permita-nos escrever

$$\lambda = \left( \frac{1 - \frac{i\omega \tau}{2}}{1 + \frac{i\omega \tau}{2}} \right). \quad (4.53)$$

Assim podemos escrever

$$\begin{array}{ll} n = 0 & v_1 + i\omega x_1 = \lambda (v_0 - i\omega x_0), \\ n = 1 & v_2 + i\omega x_2 = \lambda (v_1 - i\omega x_1) = \lambda^2 (v_0 - i\omega x_0), \\ n = 2 & v_3 + i\omega x_3 = \lambda (v_2 - i\omega x_2) = \lambda^3 (v_0 - i\omega x_0), \\ & \vdots \\ n = n - 1 & v_n + i\omega x_n = \lambda (v_{n-1} - i\omega x_{n-1}) = \lambda^n (v_0 - i\omega x_0). \end{array}$$

Deste modo,

$$v_n - i\omega x_n = \lambda^n (v_0 - i\omega x_0); \quad (4.54)$$

e, assim,

$$v_{n+1} + i\omega x_{n+1} = v_n + i\omega i\omega\tau \left( \frac{x_{n+1} + x_n}{2} \right) + i\omega x_n + i\omega\tau \left( \frac{v_{n+1} + v_n}{2} \right).$$

Rearranjando as parcelas,

$$\left( 1 - \frac{i\omega\tau}{2} \right) (v_{n+1} + i\omega x_{n+1}) = \left( 1 + \frac{i\omega\tau}{2} \right) (v_n + i\omega x_n),$$

e, deste modo,

$$v_{n+1} + i\omega x_{n+1} = \left( \frac{1 + i\omega\tau/2}{1 - i\omega\tau/2} \right) (v_n + i\omega x_n). \quad (4.55)$$

Na equação (4.56), temos

$$\lambda^{-1} = \left( \frac{1 + i\omega\tau/2}{1 - i\omega\tau/2} \right).$$

Para valores de  $n$ , obtemos

$$v_n + i\omega x_n = \lambda^{-n} (v_0 + i\omega x_0)$$

ou

$$v_n + i\omega x_n = \frac{1}{\lambda^n} (v_0 + i\omega x_0). \quad (4.56)$$

Somando e subtraindo as equações (4.54) e (4.56), temos

$$v_n = \frac{\lambda^n}{2} (v_0 - i\omega x_0) + \frac{1}{2\lambda^n} (v_0 + i\omega x_0) \quad (4.57)$$

e

$$x_n = \frac{1}{i2\omega\lambda^n} (v_0 + i\omega x_0) - \frac{\lambda^n}{i2\omega} (v_0 - i\omega x_0). \quad (4.58)$$

Analogamente ao que foi feito com as equações (4.34) e (4.35), podemos reescrever as equações (4.57) e (4.58). Considerando a equação (4.40), é fácil verificar que

$$\frac{1}{z^n} = \frac{1}{r^n} [\cos(n\theta) - i \operatorname{sen}(n\theta)].$$

Além disso, observe que  $|\lambda| = 1$  e que a parte complexa de  $\lambda$  é negativa. Então, temos

$$\lambda^n = \cos(n\theta) - i \operatorname{sen}(n\theta)$$

ou

$$\frac{1}{\lambda^n} = \cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta). \quad (4.59)$$

Usando as relações (4.59), podemos reescrever as equações (4.57) e (4.58):

$$v_n = \frac{v_0}{2} \left( \lambda^n + \frac{1}{\lambda^n} \right) + \frac{i\omega x_0}{2} \left( \frac{1}{\lambda^n} - \lambda^n \right)$$

ou

$$v_n = v_0 \cos(\omega_d t_n) - \omega x_0 \sin(\omega_d t_n) \quad (4.60)$$

e

$$x_n = \frac{v_0}{i2\omega} \left( \frac{1}{\lambda^n} - \lambda^n \right) + \frac{x_0}{2} \left( \frac{1}{\lambda^n} + \lambda^n \right)$$

ou

$$x_n = x_0 \cos(\omega_d t_n) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega_d t_n). \quad (4.61)$$

Neste caso, para estabelecer a relação entre  $\omega_d$  e  $\omega$ , temos

$$\lambda = \left( \frac{1 - i\omega\tau/2}{1 + i\omega\tau/2} \right) = \left( \frac{4 - \omega^2\tau^2}{4 + \omega^2\tau^2} \right) - i \left( \frac{4\omega\tau}{4 + \omega^2\tau^2} \right)$$

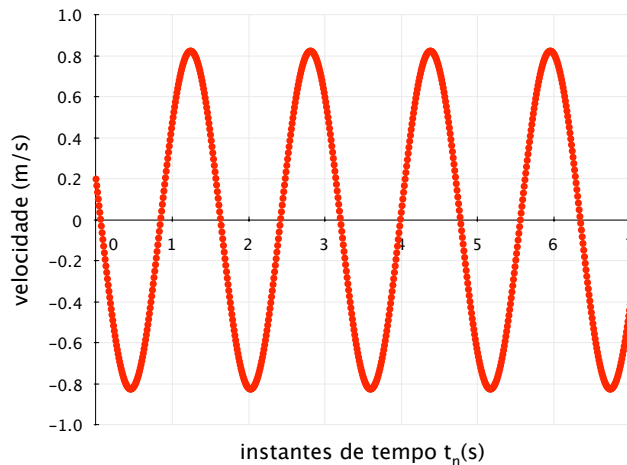
e

$$\tan(\theta_d) = \tan(\omega_d\tau) = \left( \frac{4\omega\tau}{4 + \omega^2\tau^2} \right) \left( \frac{4 + \omega^2\tau^2}{4 - \omega^2\tau^2} \right) \quad (4.62)$$

ou

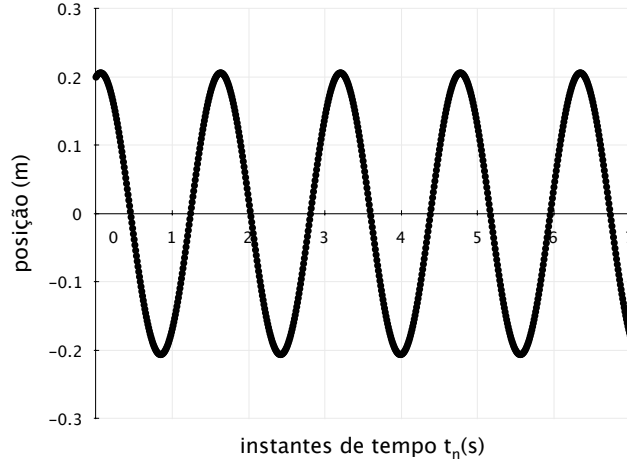
$$\omega_d = \frac{1}{\tau} \arctan \left( \frac{\omega\tau}{1 - \omega^2\tau^2/4} \right). \quad (4.63)$$

As equações (4.60) e (4.61) constituem outra solução do mesmo problema desta seção. Estas diferem das equações (4.45) e (4.46) devido a discretização adotada. As equações (4.60) e (4.61) nos interessa pelo fato de corresponderem à solução em que a conservação da energia é verificada. Os gráficos das posições e velocidades em função do tempo considerando  $\omega = 4.0 \text{ s}^{-1}$ ,  $v_0 = 0.2 \text{ m/s}$  e  $x = 0.10 \text{ m}$ , serão:



**Figura 32.** – Velocidades discretas do oscilador harmônico.

Note que com a equação (4.61) não necessitamos considerar passos muito pequenos para que a amplitude não mude de valor a cada ciclo. Aliás, para qualquer valor de  $\tau$  a amplitude será a mesma. Note também que as equações (4.45) e (4.60), para as velocidades, e as equações (4.46) e (4.61), para as posições, diferem entre si apenas pelo



**Figura 33.** – Solução discreta do problema do movimento de um oscilador harmônico. Observe que neste caso a energia é conservada.

termo  $\left[\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}\right]^n$ . Esta diferença tende a desaparecer à medida que consideramos passos cada vez menores. Discutiremos este aspecto no Apêndice B deste trabalho.

É possível chegarmos às equações (4.60) e (4.61) sem recorrer às propriedades dos números complexos. Considere as equações (4.49) e (4.50):

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\tau}{2} (v_{n+1} + v_n)$$

e

$$v_{n+1} = v_n - \frac{\omega^2\tau}{2} (x_{n+1} + x_n).$$

A equação (4.49) pode ser reescrita como

$$v_{n+1} = -v_n + \frac{2}{\tau} (x_{n+1} + x_n), \quad (4.64)$$

e a equação (4.50) como

$$x_{n+1} = -x_n - \frac{2}{\omega^2\tau} (v_{n+1} - v_n). \quad (4.65)$$

Assim, temos que

$$v_{n+1} = \left(\frac{4 - \omega^2\tau^2}{4 + \omega^2\tau^2}\right) v_n - \left(\frac{4\omega\tau}{4 + \omega^2\tau^2}\right) \omega x_n. \quad (4.66)$$

Substituindo esta última equação na equação (4.50), obtemos

$$\omega x_{n+1} = \frac{4\omega\tau}{4 + \omega^2\tau^2} v_n + \frac{4 - \omega^2\tau^2}{4 + \omega^2\tau^2} \omega x_n. \quad (4.67)$$

Elevando ao quadrado as equações (4.66) e (4.67), temos que

$$v_{n+1}^2 + \omega^2 x_{n+1}^2 = \left[ \left(\frac{4 - \omega^2\tau^2}{4 + \omega^2\tau^2}\right)^2 + \left(\frac{4\omega\tau}{4 + \omega^2\tau^2}\right)^2 \right] (v_n^2 + \omega^2 x_n^2). \quad (4.68)$$

A soma entre colchetes na equação acima é igual a unidade:

$$\left(\frac{4 - \omega^2\tau^2}{4 + \omega^2\tau^2}\right)^2 + \left(\frac{4\omega\tau}{4 + \omega^2\tau^2}\right)^2 = 1. \quad (4.69)$$

Assim, obtemos a seguinte relação:

$$v_{n+1}^2 + \omega^2 x_{n+1}^2 = v_n^2 + \omega^2 x_n^2. \quad (4.70)$$

Esta última expressão é válida para qualquer valor de  $n$ . Deste modo, podemos escrever

$$v_n^2 + \omega^2 x_n^2 = \omega^2 A^2, \quad (4.71)$$

onde  $A$  é uma constante com dimensão de comprimento e seu valor é determinado por:

$$A = \left(\frac{v_0^2}{\omega^2} + x_0^2\right)^{1/2}. \quad (4.72)$$

Da equação (4.71) podemos escrever a seguinte relação:

$$\frac{v_n^2}{\omega^2 A^2} + \frac{x_n^2}{A^2} = 1. \quad (4.73)$$

A partir das relações (4.69) e (4.73), é possível estabelecer um conjunto de equações como se segue:

$$\cos(\delta\theta) = \frac{4 - \omega^2\tau^2}{4 + \omega^2\tau^2}, \quad (4.74)$$

$$\text{sen}(\delta\theta) = \frac{4\omega\tau}{4 + \omega^2\tau^2}, \quad (4.75)$$

$$\tan(\delta\theta) = \frac{4\omega\tau}{4 - \omega^2\tau^2}, \quad (4.76)$$

$$\cos\theta_n = \frac{v_n}{\omega A}, \quad (4.77)$$

e

$$\text{sen}\theta_n = \frac{x_n}{A}. \quad (4.78)$$

Com estas últimas equações, as relações (4.66) e (4.67) podem ser reescritas como:

$$\cos(\theta_{n+1}) = \cos(\delta\theta)\cos(\theta_n) - \text{sen}(\delta\theta)\text{sen}(\theta_n) \quad (4.79)$$

e

$$\text{sen}(\theta_{n+1}) = \text{sen}(\delta\theta)\cos(\theta_n) + \cos(\delta\theta)\text{sen}(\theta_n). \quad (4.80)$$



A relação entre a frequência angular discreta  $\omega_d$  das equações (4.83) e (4.84) e a frequência angular  $\omega = (k/m)^{1/2}$  é dada pela equação (4.63). As relações (4.83) e (4.84) são equivalentes às equações (4.60) e (4.61), respectivamente. Entretanto, apesar de uma álgebra densa, porém acessível aos alunos do ensino médio, as equações (4.83) e (4.84) foram obtidas aplicando a segunda lei de Newton e dispensando algumas propriedades dos números complexos empregadas nos processos de solução anteriores.



## 5 Mais aplicações da Física Discreta

Nesta seção resolvemos outros problemas de dinâmica. Para isso, aplicamos a equação da segunda lei de Newton discretizada e as equações (3.7), (3.8) e (3.14). Não nos preocuparemos com o estabelecimento de um critério para a escolha da discretização e com a obtenção de uma solução da qual façam parte as condições iniciais. Usamos apenas as recorrências obtidas aplicando-se a segunda lei de Newton e construímos os gráficos utilizando o programa Excel.

### 5.1 Movimento com atrito proporcional ao quadrado da velocidade

Nesta parte do trabalho, consideramos uma força de arrasto proporcional ao quadrado da velocidade

$$\vec{F}_{a(n)} = -bv_n^2\hat{\varepsilon}, \quad (5.1)$$

onde  $\hat{\varepsilon}$  é um vetor unitário que sempre tem a mesma direção e o mesmo sentido do vetor velocidade do corpo em movimento que sofre a ação da força de arrasto. Assim como fizemos nas seções anteriores, omitimos a notação vetorial, pois estamos tratando de um problema unidimensional. Assim, aplicando a segunda lei de Newton (3.9), temos

$$\left(\sum F\right)_n = ma_n$$

ou

$$m \left( \frac{v_{n+1} - v_n}{t_{n+1} - t_n} \right) = -mg - bv_n^2.$$

Deste modo,

$$v_{n+1} = v_n - \frac{b}{m}v_n^2\tau - g\tau,$$

ou, ainda,

$$v_{n+1} = v_n - \alpha v_n^2\tau - g\tau. \quad (5.2)$$

Para as posições, temos

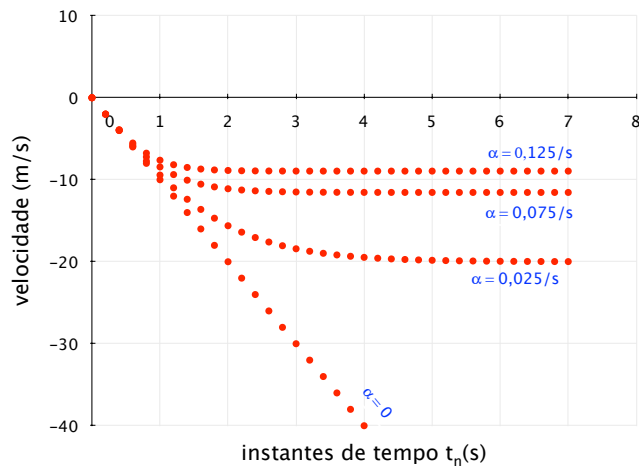
$$x_{n+1} = x_n + v_{n+1}\tau,$$

e, deste modo,

$$x_{n+1} = x_n + v_n\tau - \alpha v_n^2\tau^2 - g\tau^2. \quad (5.3)$$

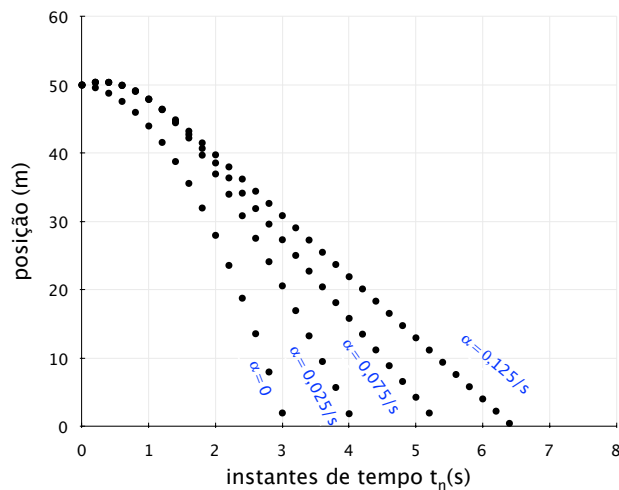
Usando as equações (5.2) e (5.3) ou a programação disponível no apêndice A podemos construir os gráficos  $v_n(t_n)$  vs.  $t_n$  e  $x(t_n)$  vs.  $t_n$  considerando valores diferentes de  $\alpha$ .

Consideramos que com a aplicação da Física discreta em problemas como este as discussões acerca de aspectos do movimento como, por exemplo, a existência de uma velocidade terminal, que tem valores diferentes para coeficientes de atrito ( $b$  presente na (5.2)) diferentes, são mais ilustrativas e oferecem aos alunos mais ferramentas para um



**Figura 34.** – Velocidades discretas de um corpo em queda submetido a uma força de arrasto proporcional ao quadrado da velocidade.

bom entendimento do conteúdo estudado. Além disso, a queda de corpos que observamos em nosso cotidiano ocorre com a presença da ação do ar. Portanto, se desejamos contextualizar os problemas estudados na Mecânica do Ensino Médio, precisamos mudar nossas abordagens e aqui está uma alternativa para que isso aconteça. Com a equação (5.1), podemos construir os gráficos representados na figura 35.



**Figura 35.** – Soluções de problemas de movimento de corpos em queda submetidos a uma força de arrasto proporcional ao quadrado da velocidade.

## 5.2 Movimento de projéteis

Na ausência de gravidade, você poderia atirar uma pedra para o céu com um certo ângulo e ela seguiria uma trajetória retilínea. Por causa da gravidade, entretanto, a tra-

jetória se curva. Uma pedra arremessada, uma bala de canhão disparada, uma bola de futebol chutada ou qualquer objeto lançado por algum meio e que segue em movimento por sua própria inércia é chamado de projétil. Aparentemente, a trajetória de um projétil é muito complicada. Entretanto, essa trajetória é surpreendentemente simples quando observamos separadamente as componentes horizontal e vertical da velocidade. Na ausência de resistência aerodinâmica, a trajetória curvilínea de um projétil é uma combinação de um movimento horizontal, com velocidade constante, com um movimento vertical uniformemente acelerado (retardado). Os movimentos verticais, neste caso, são idênticos aos movimentos de subida e de queda livres do corpo.

Consideremos o movimento de um projétil. Se considerarmos desprezível a ação do ar, a única força que age no projétil é a força peso  $\vec{P} = m\vec{g}$ . A força peso tem módulo  $mg$ , direção do eixo  $y$  e sentido igual ao sentido negativo do eixo  $y$ . Portanto, ao aplicando a segunda lei de Newton (3.9) no problema, obtemos

$$\sum F_{x(n)} = ma_{x(n)} = m \left( \frac{v_{x(n+1)} - v_{x(n)}}{t_{n+1} - t_n} \right) = 0,$$

e, portanto, temos que

$$v_{x(n+1)} = v_{x(n)} = v_x = \text{constante.}$$

Assim, podemos escrever

$$x_{n+1} = x_n + v_x \tau. \quad (5.4)$$

A equação (5.4) nos permite calcular os valores das abscissas do projétil. Para o cálculo dos valores das ordenadas, temos

$$\sum F_{y(n)} = -mg = m \left( \frac{v_{y(n+1)} - v_{y(n)}}{t_{n+1} - t_n} \right),$$

com

$$v_{y(n+1)} = v_{y(n)} - g(t_{n+1} - t_n),$$

temos então que

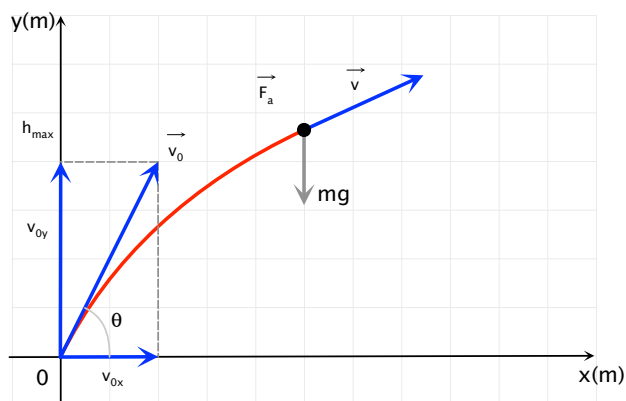
$$\frac{y_{n+1} - y_n}{t_{n+1} - t_n} = v_{y(n)} - g(t_{n+1} - t_n),$$

ou, ainda,

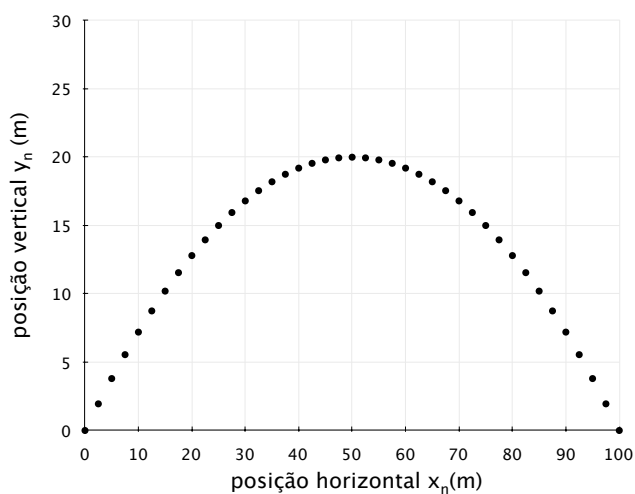
$$y_{n+1} = y_n + v_{y(n)}\tau - g\tau^2. \quad (5.5)$$

As equações (5.4) e (5.5) nos permitem calcular os valores numéricos dos pares ordenados que, quando escritos no plano  $x$  vs.  $y$  nos fornece a trajetória do projétil. Observe a figura 37.

Consideremos o vetor velocidade inicial  $\vec{v}_0 = (25.0 \text{ m/s})\hat{x} + (20.0 \text{ m/s})\hat{y}$ . Seu módulo é  $|\vec{v}_0| = 32.0 \text{ m/s}$  e sua direção forma um ângulo  $\theta = 39^\circ$  com a reta das abscissas. A partir desses valores e considerando um passo de  $0.01 \text{ s}$ , podemos construir a trajetória representada na figura 37.



**Figura 36.** – Representação da trajetória de um projétil lançado com velocidade  $v_0$ .



**Figura 37.** – Trajetória discreta de um projétil.

Agora, para o mesmo problema, vamos considerar a ação do ar. A força de arrasto (5.1) tem a mesma direção e sentido contrário do vetor velocidade do projétil. Decompondo o vetor força de arrasto em componentes ortogonais, podemos escrever

$$\vec{F}_{a(n)} = \vec{F}_{ax(n)} + \vec{F}_{ay(n)}.$$

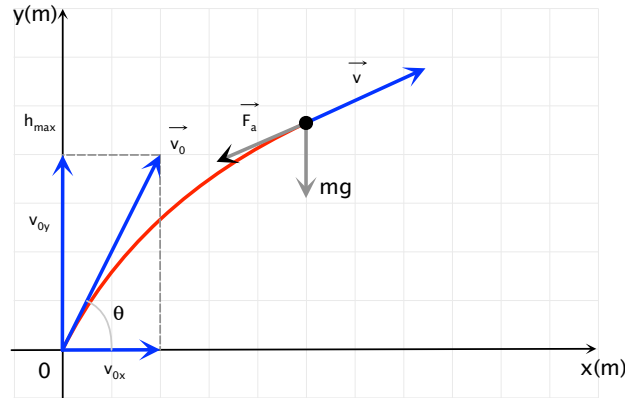
Observe a figura 38.

Observe que  $v_n^2 = v_{x(n)}^2 + v_{y(n)}^2$ . As componentes do vetor força de arrasto são

$$F_{ax(n)} = F_{a(n)} \cos \theta_n = b(v_{x(n)}^2 + v_{y(n)}^2) \cos \theta_n$$

e

$$F_{ay(n)} = F_{a(n)} \sin \theta_n = b(v_{x(n)}^2 + v_{y(n)}^2) \sin \theta_n.$$



**Figura 38.** – Representação da trajetória de um projétil lançado com velocidade  $v_0$ . Neste problema a força de arrasto está sendo considerada.

Além das relações acima, podemos escrever

$$\cos \theta_n = \frac{v_{x(n)}}{\sqrt{v_{x(n)}^2 + v_{y(n)}^2}}$$

e

$$\sin \theta_n = \frac{v_{y(n)}}{\sqrt{v_{x(n)}^2 + v_{y(n)}^2}},$$

e, portanto, obtemos

$$F_{ax(n)} = b(v_{x(n)}^2 + v_{y(n)}^2)^{\frac{1}{2}} v_{x(n)}$$

e

$$F_{ay(n)} = b(v_{x(n)}^2 + v_{y(n)}^2)^{\frac{1}{2}} v_{y(n)}.$$

Aplicando a segunda lei de Newton no problema, obtemos

$$\begin{aligned} \sum F_{x(n)} &= ma_{x(n)} \\ &= m \left( \frac{v_{x(n+1)} - v_{x(n)}}{t_{n+1} - t_n} \right) \\ &= -b(v_{x(n)}^2 + v_{y(n)}^2)^{\frac{1}{2}} v_{x(n)}, \end{aligned}$$

e, assim,

$$v_{x(n+1)} = v_{x(n)} - \alpha(v_{x(n)}^2 + v_{y(n)}^2)^{\frac{1}{2}} v_{x(n)} \tau.$$

Substituindo a velocidade pelos deslocamentos, obtemos

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{t_{n+1} - t_n} = \frac{1}{2} \left[ v_{x(n)} - \alpha(v_{x(n)}^2 + v_{y(n)}^2)^{\frac{1}{2}} v_{x(n)} \tau + v_{x(n)} \right],$$

e, deste modo,

$$x_{n+1} = x_n + v_{x(n)} \tau - \frac{\alpha}{2} (v_{x(n)}^2 + v_{y(n)}^2)^{\frac{1}{2}} v_{x(n)} \tau^2. \quad (5.6)$$

Para o cálculo das abscissas e ordenadas, temos

$$\begin{aligned} \sum F_{y(n)} &= -mg - b(v_{x(n)}^2 + v_{y(n)}^2)^{\frac{1}{2}}v_{y(n)} \\ &= m \left( \frac{v_{y(n+1)} - v_{y(n)}}{t_{n+1} - t_n} \right), \end{aligned}$$

e, assim,

$$v_{y(n+1)} = v_{y(n)} - g\tau - \alpha(v_{x(n)}^2 + v_{y(n)}^2)^{\frac{1}{2}}v_{y(n)}\tau.$$

Substituindo a velocidade pelos deslocamentos, obtemos

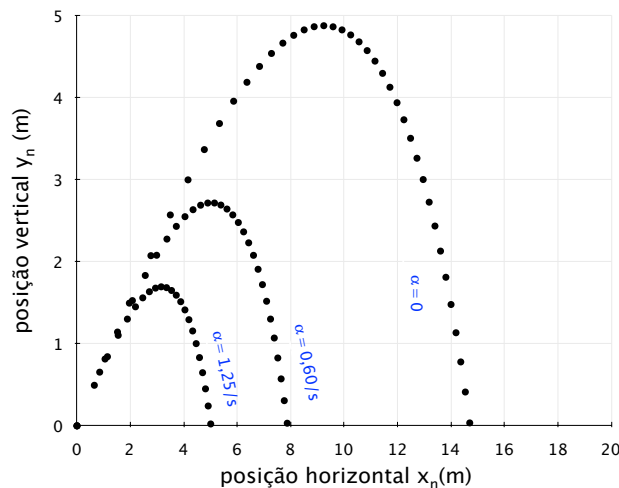
$$\frac{y_{n+1} - y_n}{t_{n+1} - t_n} = \frac{1}{2} \left[ v_{y(n)} - g\tau - \alpha(v_{x(n)}^2 + v_{y(n)}^2)^{\frac{1}{2}}v_{y(n)}\tau + v_{y(n)} \right],$$

e, assim,

$$y_{n+1} = y_n + v_{y(n)}\tau - \frac{g}{2}\tau^2 - \frac{\alpha}{2}(v_{x(n)}^2 + v_{y(n)}^2)^{\frac{1}{2}}v_{y(n)}\tau^2. \quad (5.7)$$

Observe que as equações (5.4) e (5.5) são casos particulares das equações (5.6) e (5.7), respectivamente, e surgem quando desprezamos os efeitos resistivos causados pelo meio onde ocorre o movimento, ou seja, quando  $b \approx 0$ . Além disso, no caso de considerarmos a resistência do ar, os valores das abscissas e ordenadas dependem da massa do projétil.

Considerando o mesmo passo, a mesma velocidade inicial e o mesmo ângulo da situação anterior, podemos calcular as abscissas e ordenadas das trajetórias de um projétil de massa  $m = 450$  g, considerando valores de  $\alpha$  diferentes. Observe a figura 39.



**Figura 39.** – Trajetórias de um projétil considerando-se a ação do ar com intensidades diferentes.

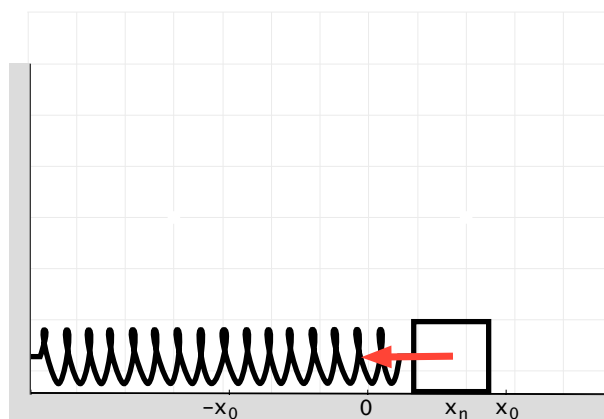
Note que com um procedimento analítico relativamente simples podemos discutir com os alunos no Ensino Médio os efeitos causados pela ação do ar. Os valores utilizados para a elaboração das trajetórias representadas na figura 39 são valores típicos de uma situação real: uma bola (projétil) de futebol lançada por um chute (considerando que a bola não

tem movimento de rotação). Uma bola de futebol oficial tem massa aproximada de 450 g e um chute típico em uma partida de futebol costuma lançar a bola com velocidade inicial de 32.0 m/s. Os valores do coeficiente de resistividade e do ângulo também são boas aproximações de uma situação real.

Observando as trajetórias nos dois gráficos é fácil ver a diferença entre os alcances e as alturas que são atingidos pelo projétil. Os estudantes poderão comparar os valores das abcissas e ordenadas construindo tabelas com os resultados numéricos obtidos a partir da aplicação das equações (5.4), (5.5), (5.6) e (5.7). Com o uso do Excel, os valores do coeficiente de resistividade do ar pode ser alterado e novos gráficos e tabelas podem ser construídos, aumentando o conjunto de dados que devem ser comparados. Com isso, o professor e os alunos poderão discutir a dinâmica do movimento dos projéteis. Acreditamos que este processo constitui um estudo de Mecânica que vai além da simples memorização de fórmulas.

### 5.3 Oscilador harmônico com atrito e em duas dimensões

Nesta seção, resolvemos os problemas de movimento de osciladores harmônicos abordando problemas trabalhados no Ensino Médio. Consideremos um corpo preso a extremidade de uma mola e que é deslocado da sua posição de equilíbrio  $x = 0$ , conforme figura 40:



**Figura 40.** – O sistema massa-mola: um oscilador em uma dimensão.

Desprezemos inicialmente todas as forças de atrito e a massa da mola. Aplicando a segunda lei de Newton (3.9), temos

$$ma_n = -kx_n,$$

$$m \left( \frac{v_{n+1} - v_n}{t_{n+1} - t_n} \right) = -kx_n,$$

$$v_{n+1} - v_n = -\frac{k}{m}x_n(t_{n+1} - t_n),$$

$$v_{n+1} = v_n - \frac{k}{m}x_n\tau, \quad (5.8)$$

que nos permite calcular as velocidades do corpo em diferentes momentos de sua trajetória. Para obtermos uma expressão que nos permita calcular as posições do corpo em diferentes instantes de tempo, devemos aplicar a equação (3.7). Então, temos

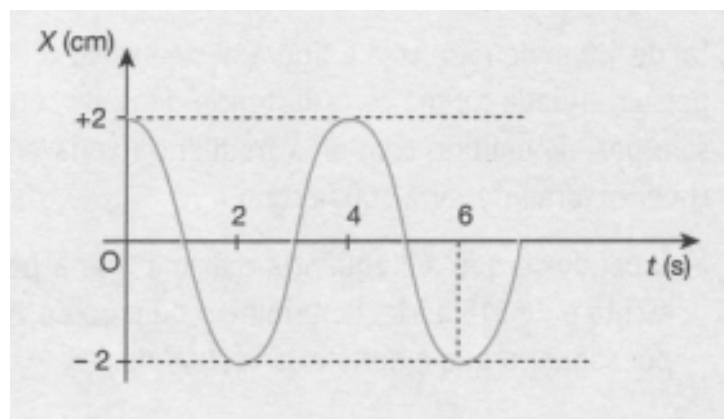
$$\frac{x_{n+1} - x_n}{t_{n+1} - t_n} = v_n - \frac{k}{m}x_n(t_{n+1} - t_n),$$

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{k}{m}x_n(t_{n+1} - t_n)^2 + v_n(t_{n+1} - t_n),$$

$$x_{n+1} = x_n + v_n\tau - \frac{k}{m}x_n\tau^2. \quad (5.9)$$

Deve ser observado que este processo de solução de problemas de movimento é exatamente o oposto da forma como os osciladores harmônicos são estudados no Ensino Médio. Muitos livros trazem para os alunos exercícios nos quais os gráficos estão prontos e deles os alunos têm que tirar informações para solucionar os exercícios. Nossa proposta é que o aluno resolva o problema, aplicando a segunda lei de Newton, e construa a solução gráfica do problema. A Física Discreta permite que isso seja um processo possível.

Durante pesquisas em livros de diferentes autores, deparei-me com o seguinte exercício proposto por Máximo e Alvarenga (2005b, p. 302) que gostaria de trabalhar nesta seção. O enunciado do exercício é: “A figura deste problema mostra o gráfico  $X(t)$  vs.  $t$  para um corpo em MHS. Escreva (com valores numéricos) a equação que fornece a posição em função do tempo para este movimento”.



**Figura 41.** – Representação gráfica da solução do problema de movimento de um oscilador harmônico simples. Esta figura é uma réplica da figura de um exercício proposto por Máximo e Alvarenga (2005b, p. 302).

Observe que a solução do problema de movimento já é dada ao aluno. Nos estudos deste tipo de movimento é informado ao aluno que a solução deste tipo de problema é da



forma

$$x(t) = A \cos(\omega t), \quad (5.10)$$

onde  $A$  e  $\omega$  são, respectivamente, a amplitude e a frequência angular do movimento do corpo. A amplitude corresponde ao valor máximo da posição, na qual a velocidade é igual a zero. E a frequência angular é dada por

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (5.11)$$

onde  $T$  é o período do movimento, que corresponde ao tempo que o corpo gasta para dar uma oscilação completa. Portanto, o aluno resolve o exercício tirando do gráfico do movimento os valores da amplitude e do período e usando as expressões (5.10) e (5.11):

$$\begin{aligned} x(t) &= 2 \cos\left(\frac{2\pi}{4}t\right) \\ &= 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Gostaríamos de fazer uma pergunta: o que o aluno aprende com a solução de um exercício como este?

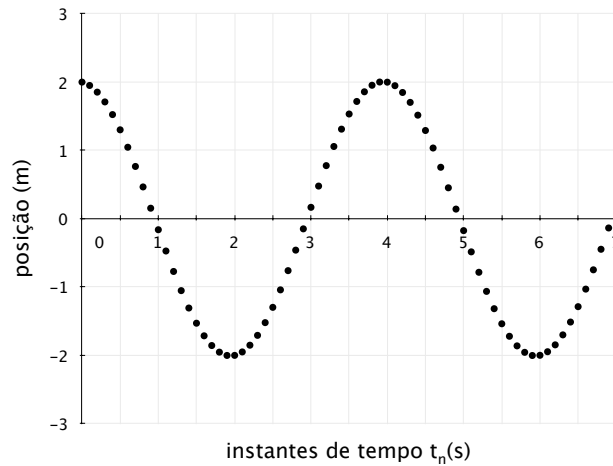
Agora, permita-nos abordar o mesmo problema aplicando a Física Discreta. O sistema massa-mola da figura no início da seção reproduz um problema análogo, considerando  $x_0 = 2.0$  cm. A massa está submetida a uma força elástica exercida pela mola de constante elástica  $k = 9.8$  N/m e executa um movimento harmônico simples de amplitude  $A = 2.0$  cm e período

$$\begin{aligned} T &= 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \\ &= 2\pi \frac{\sqrt{4.0 \text{ kg}}}{\sqrt{9.8 \text{ N/m}}} \\ &= 4.0 \text{ s}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

A aplicação da segunda lei de Newton no problema resultou na expressão (5.9), que nos permite construir o gráfico da posição em função do tempo do movimento do corpo.

Observe que obtivemos a mesma solução que está representada na figura 41 do exercício. Os alunos podem construir o gráfico como representado na figura 42, escolhendo um passo de 0.01 s. Gostaríamos de lembrar novamente que todos estes procedimentos podem, também, ser realizados com calculadoras. Sabemos que estes cálculos são mais trabalhosos com o uso de calculadoras, mas podemos diminuir o número de pontos a serem marcados em um papel milimetrado e assim viabilizar os cálculos. Assim estaremos proporcionando ao aluno a oportunidade de desenvolver sua autonomia, o que nos aproxima dos objetivos almejados pelas recomendações do PCNEM.

Agora, comparemos alguns valores numéricos obtidos com a aplicação das equações (5.10) e (5.9). Para isto, consideremos o valor do passo igual a 0.01 s. A Tabela 1 mostra os valores encontrados.



**Figura 42.** – Solução do problema do movimento de um oscilador harmônico com os mesmos parâmetros do exercício observado no livro.

**Tabela 1.** – Tabela com valores das posições de um oscilador considerando as equações (5.9) e (5.10).

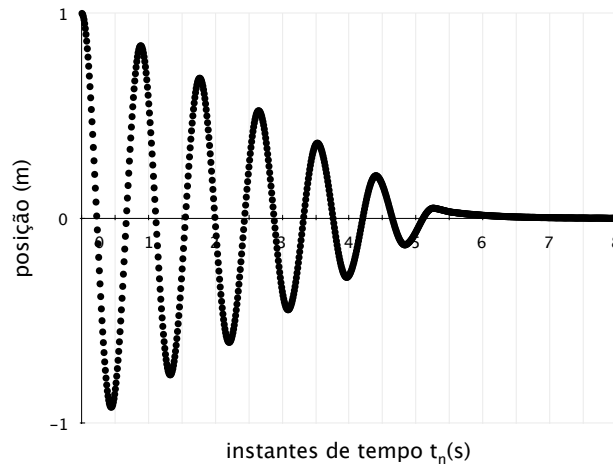
$n$	instantes de tempo $t$ (s)	$x_n$ (m)	$x$ (m)
9	0,1	1,973	1,975
49	0,5	1,404	1,414
89	0,9	0,299	0,313
129	1,3	-0,920	-0,908
169	1,7	-1,788	-1,782
209	2,1	-1,973	-1,975
249	2,5	-1,406	-1,414
289	2,9	-0,302	-0,313
329	3,3	0,918	0,908
369	3,7	1,787	1,782
409	4,1	1,974	1,975
449	4,5	1,408	1,414
489	4,9	0,305	0,313
529	5,3	-0,915	-0,907
569	5,7	-1,785	-1,782
609	6,1	-1,974	-1,975
649	6,5	-1,410	-1,414
689	6,9	-0,308	-0,313

Vamos considerar uma força de atrito sobre o sistema massa-mola, exercida pela superfície sobre o corpo. O módulo dessa força é o resultado do produto entre o módulo da força de reação normal  $|\vec{N}| = mg$ , exercida pela superfície sobre o corpo, e o coeficiente de atrito cinético  $\mu_c$ . Aplicando a segunda lei de Newton no problema, obtemos

$$m \left( \frac{v_{n+1} - v_n}{t_{n+1} - t_n} \right) = -kx_n - \mu_c N,$$

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} &= v_n - \frac{k}{m}x_n\tau - \frac{\mu_c N}{m}\tau \\
 \frac{x_{n+1} - x_n}{\tau} &= v_n - \frac{k}{m}x_n\tau - \frac{\mu_c N}{m}\tau, \\
 x_{n+1} &= x_n + v_n\tau - \frac{k}{m}x_n\tau^2 - \mu_c g\tau^2.
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Na equação (5.14), a parcela  $\mu_c g\tau^2$  terá valor positivo quando o oscilador tiver velocidade negativa; e valor negativo quando a velocidade for positiva. A figura 43 é o gráfico  $x_n(t_n)$  vs.  $t_n$  do movimento do corpo preso a mola. Nesta situação consideramos que a mola tem constante elástica  $k = 150 \text{ N/m}$ , a massa é igual a  $m = 3.0 \text{ kg}$  e que o coeficiente de atrito cinético é  $\mu_c = 0,2$ . Os valores iniciais das posição e velocidade são  $x_0 = 1.0 \text{ m}$  e  $v_0 = 0$ .



**Figura 43.** – Solução discreta do problema de movimento de um oscilador harmônico submetido ao atrito cinético.

Outro exemplo, no caso de um oscilador harmônico, é considerar a força de resistência que um líquido exerce sobre um corpo. Consideremos o sistema massa-mola da figura 44.

A força resistiva exercida pelo líquido sobre o corpo será proporcional a velocidade do corpo. Como se trata de um problema unidimensional, omitimos a notação vetorial. Portanto, podemos aplicar a segunda lei de Newton no problema e obtermos

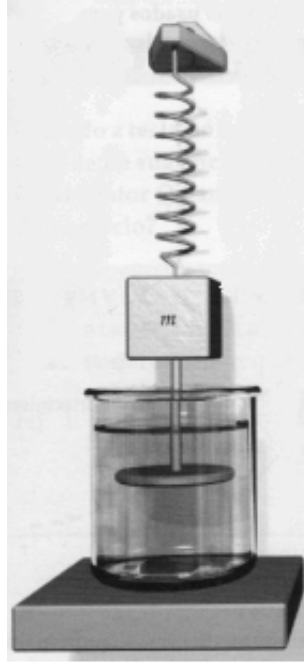
$$m \left( \frac{v_{n+1} - v_n}{t_{n+1} - t_n} \right) = -kx_n - bv_n.$$

Resolvendo esta equação para a velocidade  $v_{n+1}$  temos

$$v_{n+1} = v_n - \frac{k}{m}x_n(t_{n+1} - t_n) - \frac{bv_n}{m}(t_{n+1} - t_n).$$

Reescrevendo a velocidade  $v_{n+1}$  em função das posições  $x_{n+1}$  e  $x_n$  temos, ainda, que

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{t_{n+1} - t_n} = v_n - \frac{k}{m}x_n(t_{n+1} - t_n) - \frac{bv_n}{m}(t_{n+1} - t_n).$$



**Figura 44.** – Sistema massa-mola submetido a ações externas: oscilador harmônico com atrito (TIPLER, 2003).

Deste modo, a posição  $x_{n+1}$  é dada por

$$x_{n+1} = x_n + v_n \tau - \frac{k}{m} x_n \tau^2 - \frac{bv_n}{m} \tau^2. \quad (5.15)$$

A equação (5.15) nos permite calcular a posição em função do tempo e construirmos o gráfico que representa a solução do problema. Consideremos que a mola que suspende o corpo, de massa  $m = 2.0 \text{ kg}$ , tem constante elástica  $k = 100 \text{ N/m}$  e que o coeficiente de resistividade seja  $b = 2.0 \text{ Ns/m}$ . Então, os valores numéricos e a solução gráfica do problema estão apresentados na Tabela 2 e na Figura 45, respectivamente.

Um oscilador harmônico pode executar um movimento bidimensional. Neste caso e em outros casos de movimentos bidimensionais, necessitamos de duas coordenadas para descrevermos o movimento. Além disso, no estudo de movimentos bidimensionais, as grandezas físicas devem ser tratadas em sua forma vetorial. Portanto, a equação (3.7) deve assumir a forma

$$\vec{v}_{n+1} = \frac{\vec{r}_{n+1} - \vec{r}_n}{t_{n+1} - t_n}, \quad (5.16)$$

onde  $\vec{r}$  é o vetor posição da partícula. Neste caso, a equação (3.8) assume a forma

$$\vec{a}_n = \frac{\vec{v}_{n+1} - \vec{v}_n}{t_{n+1} - t_n}. \quad (5.17)$$

Agora vamos estudar um movimento bidimensional especial. Consideremos o oscilador harmônico na figura 46.

O estado inicial do oscilador da figura 46 pode causar, num primeiro momento, a impressão de que é difícil descrever o movimento posterior do oscilador. De fato, a solução

**Tabela 2.** – Tabela com valores discretos das posições do oscilador da figura 44.

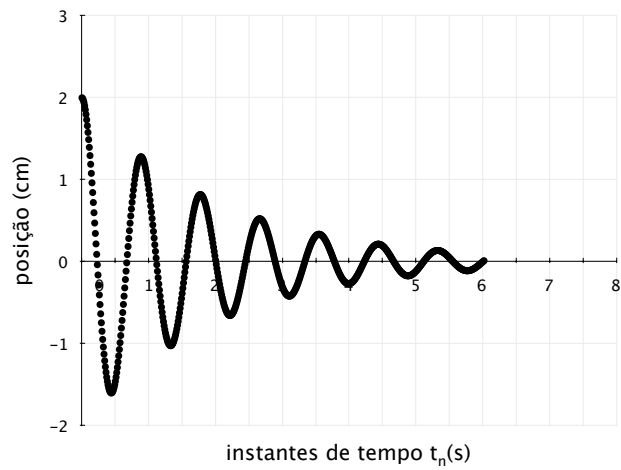
$n$	$t(\text{s})$	$x_n(\text{cm})$	$n$	$t(\text{s})$	$x_n(\text{cm})$
9	0,1	5,220	309	3,1	0,118
19	0,2	7,547	319	3,2	-1,012
29	0,3	6,191	329	3,3	-1,569
39	0,4	2,125	339	3,4	-1,354
49	0,5	-2,527	349	3,5	-0,538
59	0,6	-5,575	359	3,6	0,446
69	0,7	-5,775	369	3,7	1,132
79	0,8	-3,308	379	3,8	1,233
89	0,9	0,441	389	3,9	0,759
99	1,0	3,628	399	4,0	-0,018
109	1,1	4,847	409	4,1	-0,712
119	1,2	3,727	419	4,2	-1,014
129	1,3	1,004	429	4,3	-0,821
139	1,4	-1,918	439	4,4	-0,271
149	1,5	-3,682	449	4,5	0,351
159	1,6	-3,588	459	4,6	0,753
169	1,7	-1,858	469	4,7	0,771
179	1,8	0,559	479	4,8	0,433
180	1,8	0,792	489	4,9	-0,070
189	1,9	2,488	499	5,0	-0,494
199	2,0	3,092	509	5,1	-0,650
209	2,1	2,220	519	5,2	-0,494
219	2,2	0,414	528	5,2	-0,167
229	2,3	-1,410	529	5,3	-0,126
239	2,4	-2,413	539	5,4	0,265
249	2,5	-2,213	549	5,5	0,496
259	2,6	-1,018	559	5,6	0,478
269	2,7	0,530	569	5,7	0,242
279	2,8	1,687	579	5,8	-0,082
289	2,9	1,959	589	5,9	-0,338
299	3,0	1,307	599	6,0	-0,414

deste tipo de problema é difícil. Entretanto, vamos resolvê-lo e mostrar que com a Física discreta é possível o estudo deste tipo de problema no Ensino Médio e até mesmo no Ensino Superior. Aplicando a segunda lei de Newton, obtemos

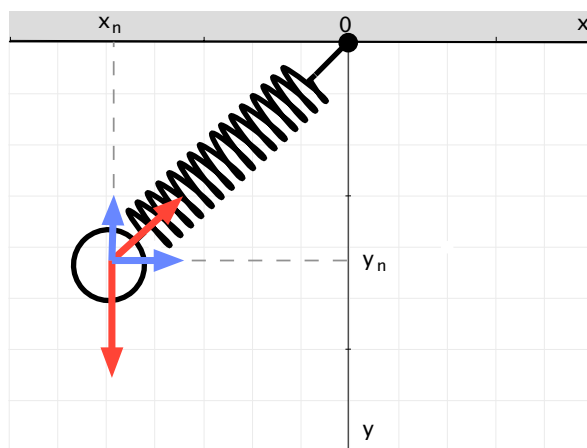
$$\sum \vec{F}_n = m\vec{a}_n,$$

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_n &= \vec{F}_{e(n)} + \vec{P} \\ &= m\vec{a}_n, \end{aligned}$$

onde  $\vec{F}_{e(n)} = -k(l_n - l_0)\hat{l} = -k(\sqrt{x_n^2 + y_n^2} - l_0)\hat{l}$  é a força elástica exercida pela mola sobre o corpo de massa  $m$ . A força elástica é proporcional a distensão da mola. Os termos  $l_0$  e  $\hat{l}$  representam o comprimento da mola relaxada e o vetor unitário na direção da distensão da mola, respectivamente. Quando a mola é distendida, seu comprimento é  $l_n = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$ . Decompondo a força elástica em componentes ortogonais, temos



**Figura 45.** – Representação gráfica da solução discreta do problema de movimento de um oscilador submetido à ação de uma força resistiva.



**Figura 46.** – Oscilador em duas dimensões.

$$\begin{aligned} F_{ex(n)} &= F_{e(n)} \operatorname{sen} \theta_n, \\ F_{ey(n)} &= F_{e(n)} \operatorname{cos} \theta_n. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Podemos observar na figura 46 que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \theta_n &= \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}}, \\ \operatorname{cos} \theta_n &= \frac{y_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}}. \end{aligned}$$

Substituindo essas relações nas equações (5.18), obtemos

$$F_{ex(n)} = -k \left( \sqrt{x_n^2 + y_n^2} - l_0 \right) \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}},$$

$$F_{ey(n)} = -k \left( \sqrt{x_n^2 + y_n^2} - l_0 \right) \frac{y_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}}.$$

As componentes ortogonais da força peso do oscilador, desprezando a massa da mola, são

$$P_x = 0,$$

$$P_y = -mg.$$

Aplicando a segunda lei de Newton no problema, temos para a direção  $x$

$$\begin{aligned} \sum F_{x(n)} &= ma_{x(n)} \\ &= -k \left( x_n - l_0 \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} \right), \end{aligned}$$

e, portanto,

$$a_{x(n)} = \frac{k}{m} \left( l_0 \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} - x_n \right). \quad (5.19)$$

Para a direção  $y$  temos que

$$\begin{aligned} \sum F_{y(n)} &= ma_{y(n)} \\ &= -mg - k \left( \sqrt{x_n^2 + y_n^2} - l_0 \right) \frac{y_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}}, \end{aligned}$$

e, deste modo,

$$a_{y(n)} = \frac{k}{m} \left( l_0 \frac{y_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} - y_n \right) - g. \quad (5.20)$$

Para as velocidades, temos

$$v_{x(n+1)} = v_{x(n)} + \frac{k}{m} \left( l_0 \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} - x_n \right) \tau \quad (5.21)$$

e

$$v_{y(n+1)} = v_{y(n)} + \left[ \frac{k}{m} \left( l_0 \frac{y_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} - y_n \right) - g \right] \tau. \quad (5.22)$$

Para as abscissas, temos

$$x_{n+1} = x_n + v_{x(n+1)} \tau \quad (5.23)$$

e, portanto,

$$x_{n+1} = x_n + v_{x(n)} \tau + \frac{k}{m} \left( l_0 \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} - x_n \right) \tau^2. \quad (5.24)$$

Para as ordenadas, temos

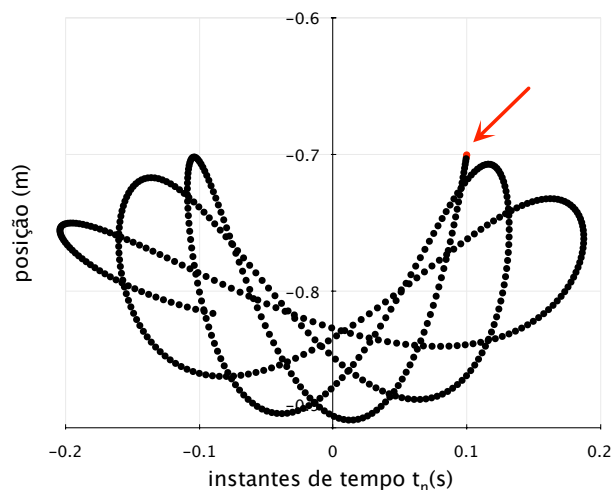
$$y_{n+1} = y_n + v_{y(n+1)}\tau \quad (5.25)$$

e, deste modo,

$$y_{n+1} = y_n + v_{y(n)}\tau + \left[ \frac{k}{m} \left( l_0 \frac{y_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} - y_n \right) - g \right] \tau^2. \quad (5.26)$$

As expressões (5.24) e (5.26) constituem a solução discreta do problema de movimento do oscilador em duas dimensões da figura 46. Podemos, a partir dessas equações, estudar a trajetória do oscilador.

Consideremos os seguintes valores numéricos:  $k = 25.0 \text{ N/m}$ ,  $m = 50.0 \text{ g}$ ,  $l_0 = 0.60 \text{ m}$ ,  $x_0 = 10.0 \text{ cm}$ ,  $y_0 = -70.0 \text{ cm}$ ,  $v_{x0} = v_{y0} = 0$  e  $\tau = 0.01 \text{ s}$ . Com esses valores e aplicando as equações (5.24) e (5.26) obtemos o gráfico do movimento representado na figura 47.

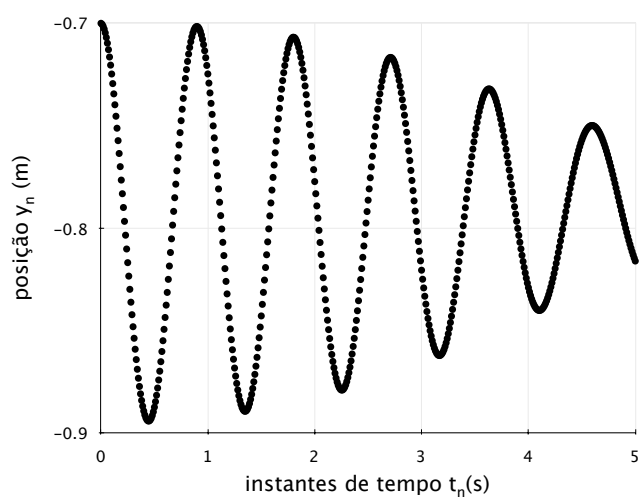


**Figura 47.** – Solução discreta do problema de movimento de um oscilador harmônico em duas dimensões. A posição inicial está indicada pela seta.

Além de resolvermos problemas difíceis com aplicações de equações relativamente simples, podemos ainda estimular os alunos a analisarem relações matemáticas e preverem alguns resultados. Por exemplo, ao observar as equações (5.24) e (5.26) os alunos devem perceber que se  $x_0 = 0$ ,  $v_{x0} = 0$  e  $y_0 \neq (mg - l_0)/k$ , o oscilador representado na figura 46 oscilará na direção vertical, com amplitude constante.

Nesta seção tentamos demonstrar que é possível abordarmos problemas de movimento, estudados no Ensino Médio, de maneira diferente, lançando mão da Física Discreta. Além disso, buscamos mostrar que a Física Discreta nos permite estudar problemas que não são discutidos nas salas de aula do Ensino Médio.





**Figura 48.** – Gráfico da oscilação vertical do oscilador da figura 46. Consideramos os valores numéricos  $k = 25.0 \text{ N/m}$ ,  $m = 50.0 \text{ g}$ ,  $l_0 = 0.60 \text{ m}$ ,  $x_0 = 0.1 \text{ cm}$ ,  $y_0 = -0.7 \text{ cm}$ ,  $v_{x0} = v_{0y} = 0$  e  $\tau = 0.01 \text{ s}$ .

## 6 Considerações finais

O ensino de Física é um desafio constante. Isso se justifica pelo fato de a Física ser construída com conceitos e princípios que, obrigatoriamente, devem descrever de maneira consistente os fenômenos que ocorrem na natureza. E se a natureza destes fenômenos é complexa, os conceitos e princípios físicos também são complexos. Diante desta relação entre o conceito e o fenômeno, então, o quê dizer sobre o ensino e a compreensão da Física.

A Mecânica, provavelmente, é o campo da Física que primeiro foi contemplado com a atenção humana. Se isso for verdade, não seria de se estranhar, pois a Mecânica é a área onde se estuda o movimento dos corpos. Que fenômeno na natureza seria primeiro observado por um ser curioso, se não o movimento de um corpo?

A complexidade dos fenômenos mecânicos justifica estarmos até hoje, após anos, discutindo quais métodos de estudo e, conseqüentemente, de ensino são mais adequados para uma compreensão mais eficiente e satisfatória dos conteúdos estudados. Esta discussão é uma tarefa árdua e é de responsabilidade daqueles que escolheram trabalhar com a pesquisa e o ensino de Física.

Nossa proposta ao longo deste trabalho é fazer com que o estudo da Mecânica seja uma atividade interativa, cujos elementos desta interação sejam o aluno e o problema estudado. O aluno está interagindo com o problema estudado quando tenta resolvê-lo, fazendo uso de alguma ferramenta. No caso presente, a solução deve ser conquistada pelo estudante com a aplicação da segunda lei de Newton que, segundo nossa abordagem, deve ter a forma discreta.

Entendemos que com o produto que esta dissertação disponibiliza aos professores e alunos as atividades em sala durante as aulas de Mecânica podem assumir a forma de um estudo interativo e dinâmico, demandando do aluno, sob a orientação do professor, uma postura participativa. Assim, o estudo da Mecânica deixa de ter como objetivo a memorização de fórmulas e gráficos e passa a constituir-se de uma atividade onde o estudante passa a ser o responsável pelas construções das soluções dos problemas e de suas representações gráficas. Com isso, o professor poderá propor atividades para sua turma e orientar no uso das ferramentas contidas neste trabalho com o objetivo de resolver problemas de Mecânica, aumentando a independência dos seus alunos, bem como possibilitando a eles a oportunidade do treinamento para lidar com expressões algébricas e construção e interpretação de gráficos.

É necessária a percepção de que o estudo da Mecânica, bem como as demais áreas da Física e do conhecimento, deve trazer para o estudante algum significado, que pode ser traduzido como algo que tenha aplicação ou semelhança direta em seu cotidiano. Isso se alcança por meio da contextualização dos conteúdos estudados.

Mas se o professor não dispõe de meios ou métodos que lhe permitam realizar ativi-

dades que busquem contextualizar os conteúdos estudados, a tarefa de ensinar torna-se mais difícil. Entendemos que com a Física Discreta o professor poderá estudar qualquer tipo de problema de movimento e, assim, aproximar os temas estudados da realidade dos alunos.

Concordamos que poder estudar com detalhes problemas de movimento de corpos, sejam estes em uma, duas ou três dimensões, estejam estes sujeitos ou não a ação de meios resistivos, com uma álgebra descomplicada e acessível aos alunos, torna a missão de ensinar uma tarefa menos complexa e estressante. Além disso, esta possibilidade envolve os alunos nas tarefas em sala e permite que eles mesmos construam seus próprios conhecimentos. Esperamos ter alcançado o objetivo de mostrar que é possível resolver vários problemas de movimento, obtendo soluções e construindo gráficos, com uma matemática simples que julgamos acessível aos nossos colegas professores e aos estudantes.

## Referências

- BRASIL. *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional*. Brasília: Senado Federal, 1996. Lei no 9.394, de 20 de dezembro de 1996. 2
- BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio*. Brasília: SEMTEC/MEC, 2000. 2
- BRASIL. *PCN+Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais; Ciências da natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002. 2
- D'INNOCENZO, A.; RENNA, L.; ROTELLI, P. Some studies in discrete mechanics. *Eur. J. Phys.*, v. 8, n. 4, p. 245, 1987. 26
- MÁXIMO, A.; ALVARENGA, B. *Curso de Física — v. 1*. São Paulo: Editora Scipione, 2005. 5, 6
- MÁXIMO, A.; ALVARENGA, B. *Curso de Física — v. 2*. São Paulo: Editora Scipione, 2005. 67
- MAXWELL, J. C. *Matter and Motion*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 22
- NEWTON, I. *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*. 3. ed. Lisboa: Fundação Kalouste Gubenkian, 2010. 19
- TIPLER, P. A. *Física para cientistas e engenheiros: Mecânica, Oscilações e Ondas, Termodinâmica*. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003. 71

# A Programação

Este Apêndice é o produto desta dissertação. Nele procuramos desenvolver um manual com o qual os alunos e professores poderão construir todos os gráficos apresentados neste trabalho. Como usamos o Excel para construir os gráficos, este guia está baseado no uso deste programa, mas vale ressaltar que qualquer planilha eletrônica pode ser utilizada para estas tarefas.

Apresentamos as equações discretas e os procedimentos para escrevê-las no Excel. Em seguida estarão as figuras com a face da folha, ou planilha, que resultam do uso deste programa. As planilhas empregadas neste Guia se encontram disponíveis no CD que o acompanha.

O leitor deve estar atento para o fato de que o nosso trabalho procura mostrar que é possível estudar um conjunto de problemas de dinâmica sem a preocupação com as regras de cálculo desconhecidas pelos alunos. Procuramos demonstrar isso ao longo do trabalho. Assim, como o objetivo primeiro é mostrar que é possível esse estudo, não nos dedicamos em explorar os tipos de abordagens que os professores podem fazer em suas salas de aula. Nossa preocupação é disponibilizar o material para estes profissionais, a quem julgamos caber a avaliação de sua aplicabilidade, levando-se em conta a realidade de sua escola, bem como a análise dos resultados no processo de ensino e aprendizagem que surjam de sua aplicação.

## A.1 Movimento retilíneo uniforme

Das equações

$$v_{n+1} = \frac{(x_{n+1} - x_n)}{\tau} \quad (\text{A.1})$$

temos como resultado, para o movimento retilíneo uniforme, as equações

$$a_{n+1} = \frac{(v_{n+1} - v_n)}{\tau}, \quad (\text{A.2})$$

e

$$a_{n+1} = a_n = 0. \quad (\text{A.3})$$

Assim a solução será

$$x_{n+1} = x_n + v_n \tau. \quad (\text{A.4})$$

Sempre que desejarmos usar o Excel, ou qualquer planilha eletrônica, devemos ter em mente que o que vamos fazer é construir tabelas. O número de colunas e linhas que cada tabela terá depende de cada problema. Nesta parte da dissertação procuramos estabelecer um padrão que consiste em construir as tabelas com três colunas e com um número de linhas que dependerá de cada problema. Na primeira coluna estão os valores

dos instantes de tempo. Na segunda os valores das velocidades e na terceira os valores das posições. Quando tratamos de problemas bidimensionais surgem tabelas em que as segunda e terceira colunas serão reservadas para os valores das componentes do vetor posição.

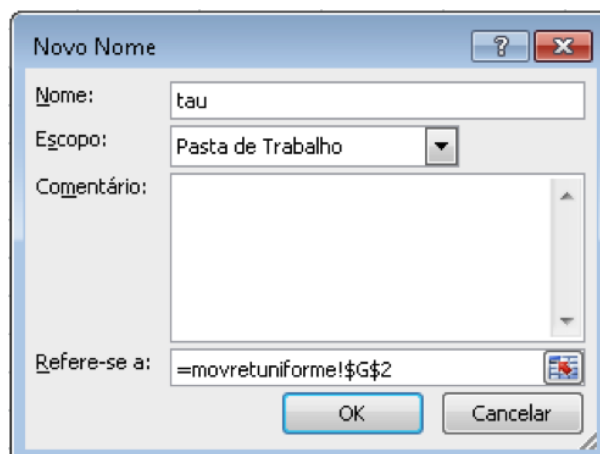
Ainda sobre o padrão que estabelecemos, escolhemos a coluna B para os instantes de tempo, a coluna C para as velocidades e a coluna D para as posições. Assim, na célula B2 escrevemos a letra  $\tau$ , na célula C2 escrevemos  $v(\tau)$  e na célula D2 escrevemos  $x(\tau)$ . Nestas células constam os títulos de cada coluna. Usamos as colunas que vão de F à K, nas linhas 2, 3 e 4, para escrever os parâmetros envolvidos no estudo do problema. Estes parâmetros, uma vez definidos, podem ser alterados mudando os valores numéricos da célula correspondente a eles e, automaticamente, os valores das tabelas e os gráficos também serão alterados. Escolhemos este padrão apenas por questões de estética das figuras que apresentamos. As regras e procedimentos com o Excel independem das escolhas que podem ser feitas.

Nas células B3, C3 e D3 escrevemos os valores iniciais. Escolhemos o instante inicial igual à zero em todos os problemas. Portanto, deve-se selecionar a célula B3 e:

1. Escrever =0;
2. Apertar a tecla “enter”.

Em seguida faça:

1. Selecione a célula F2 e escreva  $\tau$ =;
2. Selecione a célula G2 e escreva 0,1;
3. Clique no comando **Fórmulas** e depois em **Definir nomes**;
4. Aparecerá uma janela como na figura 49.
5. Clique em **OK** e o parâmetro  $\tau$  estará definido. Este procedimento deve ser associado à expressão “defina o parâmetro” e deve ser repetido sempre que for necessário definir um parâmetro;
6. Selecione B4 e escreva: =B3+ $\tau$ ;
7. Aperte a tecla “enter”;
8. Selecione novamente B4 e posicione o cursor no canto inferior direito da célula, onde aparecesse um ponto e onde o cursor assumirá a forma de uma cruz;
9. Clique no botão direito do mouse e, com o botão pressionado, arraste o cursor ao longo da coluna até a linha 43. Este procedimento deverá ser associado à expressão “preencha a coluna” e repetido quando se desejar preencher uma coluna;



**Figura 49.** – Janela do Excel onde se define um parâmetro. A palavra *tau* é o nome do parâmetro que estará definido na planilha *movretuniforme*, e seu valor será o escrito na célula *G2*.

10. Assim como foi definido o parâmetro *tau*, defina o parâmetro  $v_0$  (velocidade inicial) com a representação *v0* em *F3* e seu valor em *G3*;
11. Em *C3* escreva: `=v0`;
12. Selecione *C3* e, assim como na coluna do tempo, preencha a coluna com o valor de  $v_0$  até a linha 43;
13. Defina o parâmetro  $x_0$ : a representação *x0* em *F4* e seu valor em *G4*;
14. Em *D3* escreva: `=x0`;
15. Em *D4* escreva: `=D3+C3*tau`;
16. Clique em “enter”, selecione *D4* e preencha a coluna até a linha 43;
17. Defina o parâmetro  $m$  (massa da partícula em movimento): a representação *m* em *H2* e seu valor em *I2*;
18. Selecione as colunas do tempo e da velocidade e crie o gráfico velocidade  $v(t)$  vs. tempo: clique em *Inserir* e depois na primeira opção de plotagem do comando *Dispersão*;
19. Selecione as colunas do tempo e da posição e crie o gráfico posição  $x(t)$  vs. tempo.

Com os procedimentos acima e com os valores iniciais de  $v_0 = 3.0 \text{ m/s}$  e  $x_0 = 0 \text{ m}$  obtemos o resultado apresentado na figura 50.

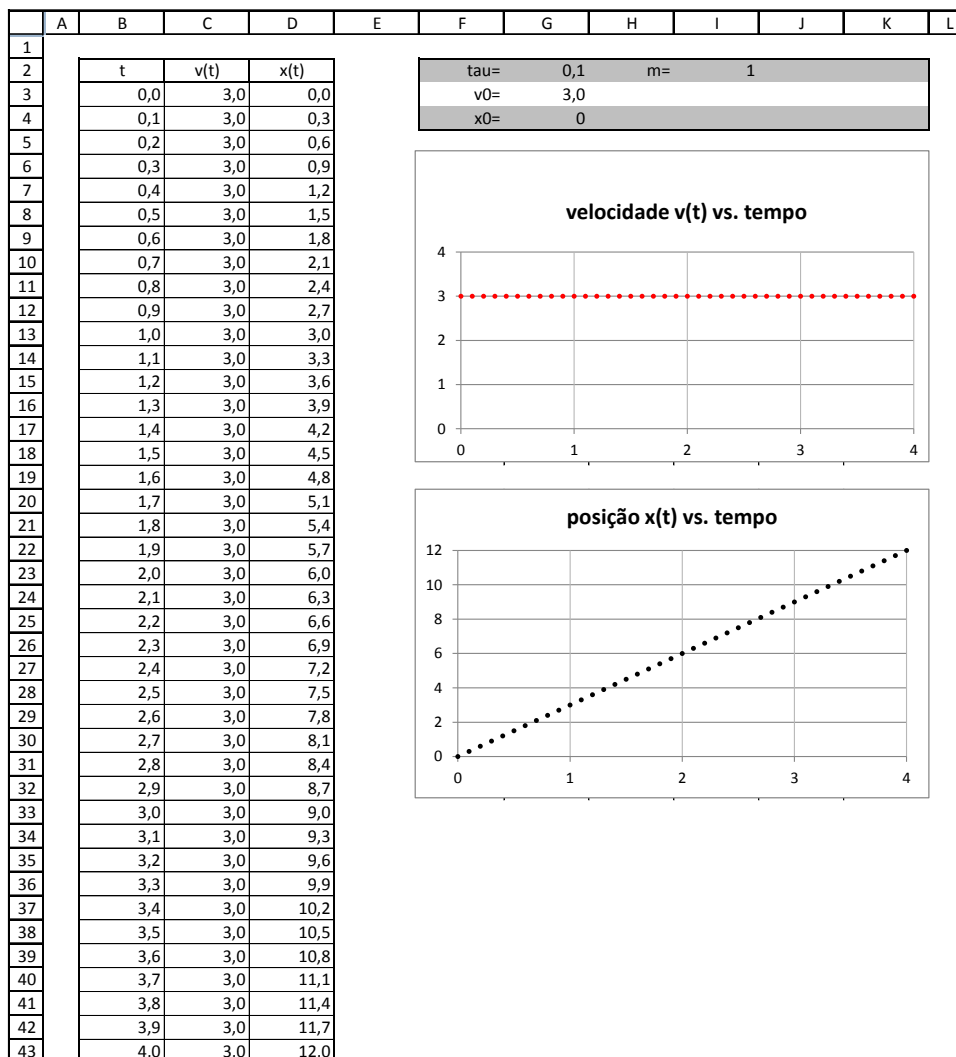


Figura 50. – Planilha Excel para um movimento retilíneo uniforme.



## A.2 Movimento de queda livre

Das equações

$$v_{n+1} = \frac{(x_{n+1} - x_n)}{\tau} \quad (\text{A.5})$$

e

$$a_{n+1} = \frac{(v_{n+1} - v_n)}{\tau}, \quad (\text{A.6})$$

temos como resultado, para o movimento de queda livre de um corpo, as equações

$$a_{n+1} = a_n = -g = \text{constante}. \quad (\text{A.7})$$

e

$$v_n = v_0 - g t_n. \quad (\text{A.8})$$

Assim, a solução será

$$x_n = x_0 + v_0 t_n - \left[ \frac{(1+n)n}{2} \right] g t^2 \quad (\text{A.9})$$

Não esqueça que  $t_n = n\tau$ , que pode ser reescrita como  $n = t_n/\tau$ . No Excel, faça:

1. Defina  $\tau$ ,  $v_0$ ,  $x_0$  e  $m$ , nas mesmas células em que foram definidas na Seção anterior;
2. Defina  $g$ : a representação **g** em H3 e seu valor em I3. Consideramos  $g = -10 \text{ m/s}^2$ ;
3. Construa a coluna dos instantes de tempo até a linha 34, com **tau=0,1**;
4. Em C3 escreva: **=v0**;
5. Em C4 escreva: **=v0+g\*tau**. Clique em “enter”, selecione C4 e preencha a coluna até a linha 34;
6. Em D4 escreva;

$$\text{=x0+v0*B4+(1/2)*g*(B4^2)+(1/2)*g*B4*tau.}$$

Clique em “enter”, selecione D4 e preencha a coluna até a linha 34;

7. Construa os gráficos: velocidade  $v(t)$  vs. tempo e posição  $x(t)$  vs. tempo.

A figura 51 mostra o resultado obtido, considerando-se  $v_0 = 0$  e  $x_0 = 50 \text{ m}$ .

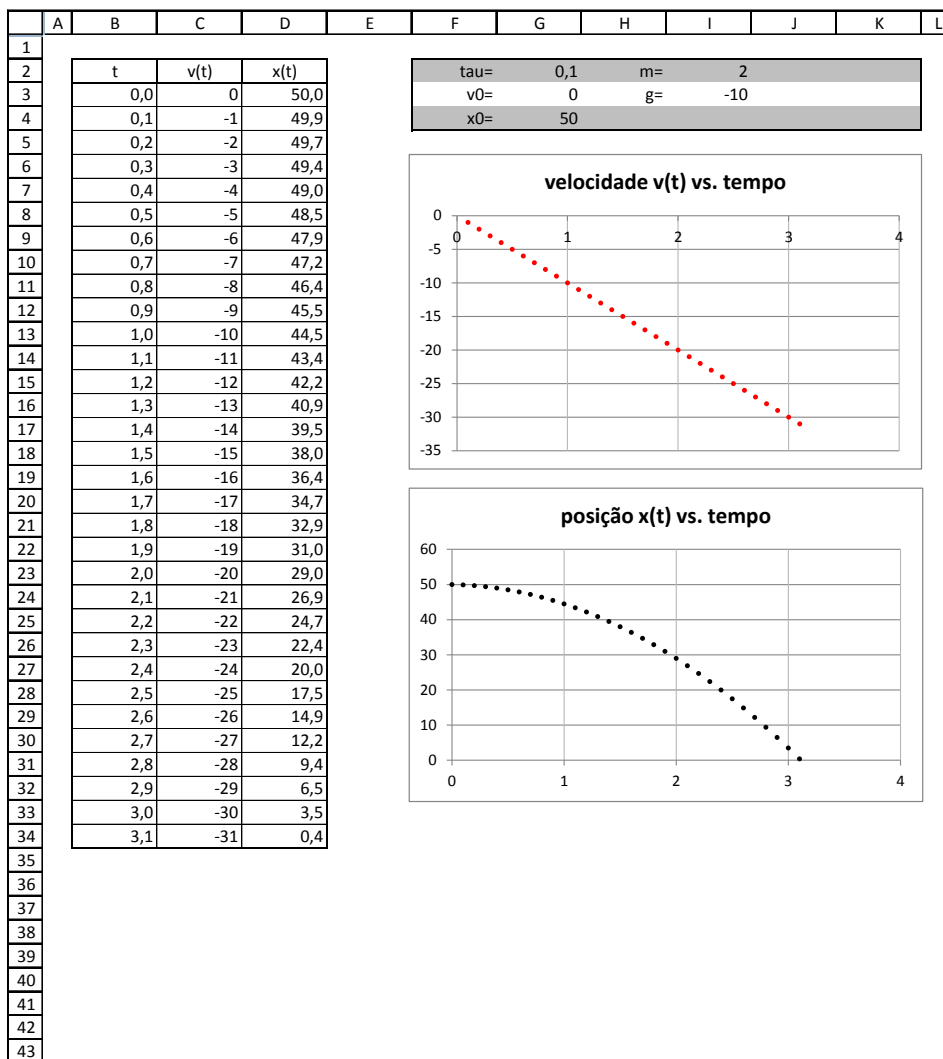


Figura 51. – Planilha Excel para a queda livre de uma massa. Os valores foram obtidos considerando-se as soluções discretas que não estão de acordo com a conservação da energia

Considerando outra discretização para a velocidade, como a equação

$$\frac{(v_{n+1} + v_n)}{2} = \frac{(x_{n+1} - x_n)}{\tau} \quad (\text{A.10})$$

a solução será

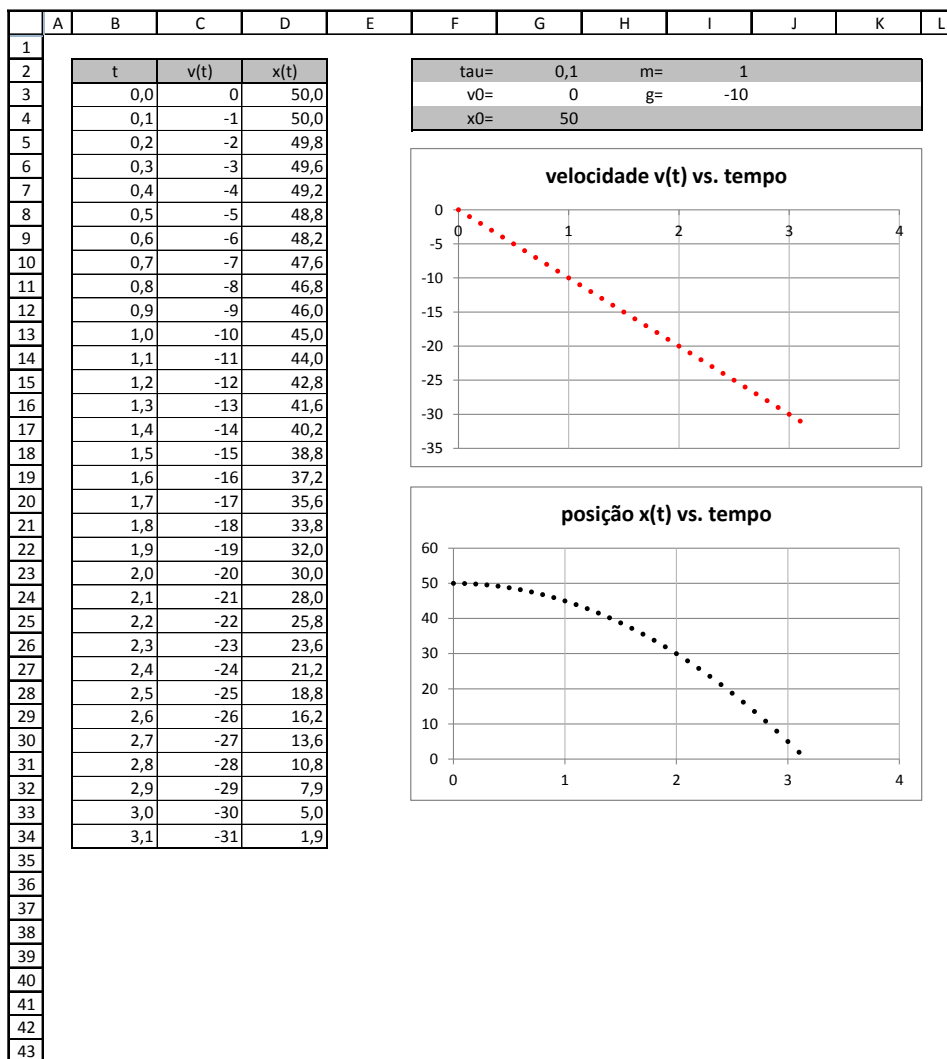
$$x_n = x_0 + v_0 t_n - \frac{g}{2} t_n^2. \quad (\text{A.11})$$

No Excel, faça:

1. Repita todos os procedimentos acima, alterando apenas o que se recomenda escrever na célula D4. Agora, nesta célula deve-se escrever:

$$=x0+v0*B4+(1/2)*g*(B4^2).$$

Assim, o resultado será o apresentado na figura 52 para os mesmos valores iniciais anteriores.



**Figura 52.** – Planilha Excel para a queda livre de uma massa. Os valores foram obtidos considerando-se as soluções discretas que estão de acordo com a conservação da energia.

### A.3 Queda com atrito

Esta Seção está dividida em duas subseções. Nas duas subseções resolvemos o problema de movimento da queda de um corpo que sofre a ação do ar. Porém, na primeira subseção consideramos a solução discreta do problema que foi obtida considerando-se a discretização da velocidade em que não se adota o critério da conservação da energia. Já na segunda subseção consideramos a solução discreta obtida com o estabelecimento do critério de conservação da energia para a discretização da velocidade. Lembre-se que neste problema a discretização da aceleração pode ser a mesma nas duas situações.

#### A.3.1 Equações discretas sem o critério de conservação

Considerando as equações

$$v_{n+1} = \frac{(x_{n+1} - x_n)}{\tau} \quad (\text{A.12})$$

e

$$a_n = \frac{(v_{n+1} - v_n)}{\tau}, \quad (\text{A.13})$$

e aplicando a segunda lei de Newton,

$$\left(\sum F\right)_n ma_n = -mg - bv_n, \quad (\text{A.14})$$

temos como resultado, para o movimento de queda com atrito de um corpo, as equações

$$v_n = v_0 + (g\tau + \alpha\tau v_0) \left[ \frac{(1 - \alpha\tau)^n - 1}{\alpha\tau} \right] \quad (\text{A.15})$$

e

$$x_n = x_0 + v_0 \cdot t_n - \frac{g + \alpha v_0}{\alpha^2} \{ (1 - \alpha\tau) [(1 - \alpha\tau)^n - 1] + \alpha t_n \}, \quad (\text{A.16})$$

onde  $\alpha = b/m$ . No Excel faça:

1. Defina:  $\tau$ ,  $v_0$ ,  $x_0$ ,  $m$  e  $g$  nas mesmas células em que foram definidas nas Seções anteriores;
2. Construa a coluna dos instantes de tempo até a linha 73, com `tau=0,1`;
3. Em C2 escreva: `v(t)`;
4. Em C3 escreva: `=v0`;
5. Em C4 escreva: `=v0+g*B4`;
6. Clique em “enter”, selecione C4 e preencha a coluna até a linha 73;
7. Em D2 escreva: `x(t)`;

8. Em D3 escreva:  $=x0$ ;
9. Em D4 escreva:  $=x0+v0*B4+(((B4^2*g)/2)+((g*B4*tau)/2))$ ;
10. Clique em “enter”, selecione D4 e preencha a coluna até a linha 73;
11. Construa os gráficos: velocidade  $v(t)$  vs. tempo e posição  $x(t)$  vs. tempo;
12. A figura 53 mostra o resultado obtido, para  $v0 = 0$ ,  $x0 = 50$  m e  $\alpha = 0$ .

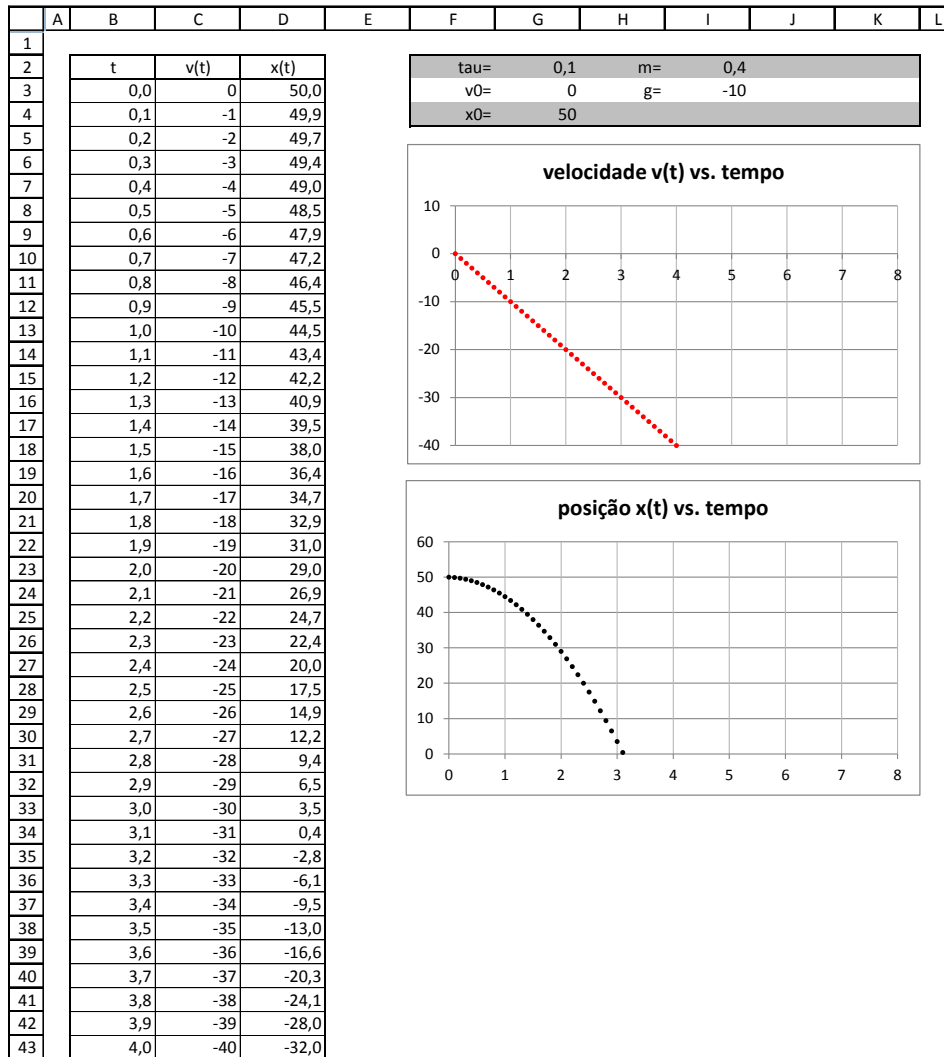
Dentro de uma planilha do Excel nós podemos construir várias folhas que farão parte do mesmo documento. Com este recurso resolvemos construir quatro folhas. Na primeira folha estudamos o movimento de um corpo no qual consideramos a ação do ar desprezível. Nas três folhas seguintes consideramos valores diferentes do parâmetro  $\alpha$ , que está associado à intensidade da resistência do ar.

No Excel, faça:

1. Repita os procedimentos acima, de 2 a 8, com exceção do item 5. Na célula C4 escreva:
 
$$=v0-((g*tau+alfa1*tau*v0)*((1-alfa1*tau)^(B4/tau)-1)/(alfa1*tau));$$
2. Clique em “enter”, selecione C4 e preencha a coluna até a linha 73;
3. Defina  $\alpha1$ : a representação  $\alpha1$  em H4 e seu valor em I4;
4. Em D4 escreva:
 
$$=x0+v0*B4 + ((g+alfa1*v0)/(alfa1^2))*$$

$$(((1-alfa1*tau)*((1-alfa1*tau)^(B4/tau)-1)+alfa1*B4));$$
5. Clique em “enter”, selecione D4 e preencha a coluna até a linha 73;
6. Construa os gráficos: velocidade  $v'(t)$  vs. tempo e posição  $x'(t)$  vs. tempo;

Consideramos  $v0 = 0$ ,  $x0 = 50$  m e  $\alpha1 = 0,2$  e obtivemos os resultados mostrados na figura 54. Construimos mais duas folhas repetindo estes últimos procedimentos e considerando  $\alpha2 = 0,6$  e  $\alpha3 = 1,25$ , definidos nas suas respectivas folhas assim como foi definido  $\alpha1$ . A figura 55 mostra os resultados para  $\alpha2 = 0,6$  e a figura 56 para  $\alpha3 = 1,25$ . Ao realizar estes últimos procedimentos considerando  $\alpha2$  e  $\alpha3$ , deve-se escrever as equações dos itens 1 e 4 substituindo  $\alpha1$  por  $\alpha2$  ou  $\alpha3$ , dependendo da folha em que se está concentrando atenção. Além disso, para evitar possíveis confusões, pode-se diferenciar os títulos das colunas dos valores das velocidades e das posições, bem como os títulos dos gráficos. Na folha de trabalho em que se considera  $\alpha1$ , por exemplo, escrevemos em C2 a representação  $v'(t)$  e em D2 a representação  $x'(t)$ . Na folha com  $\alpha2$ , escrevemos  $v''(t)$  e  $x''(t)$ . E na folha do  $\alpha3$ , escrevemos  $v'''(t)$  e  $x'''(t)$ .



**Figura 53.** – Planilha Excel para a queda livre de uma massa. Os valores foram obtidos considerando-se as soluções discretas que não estão de acordo com a conservação da energia.

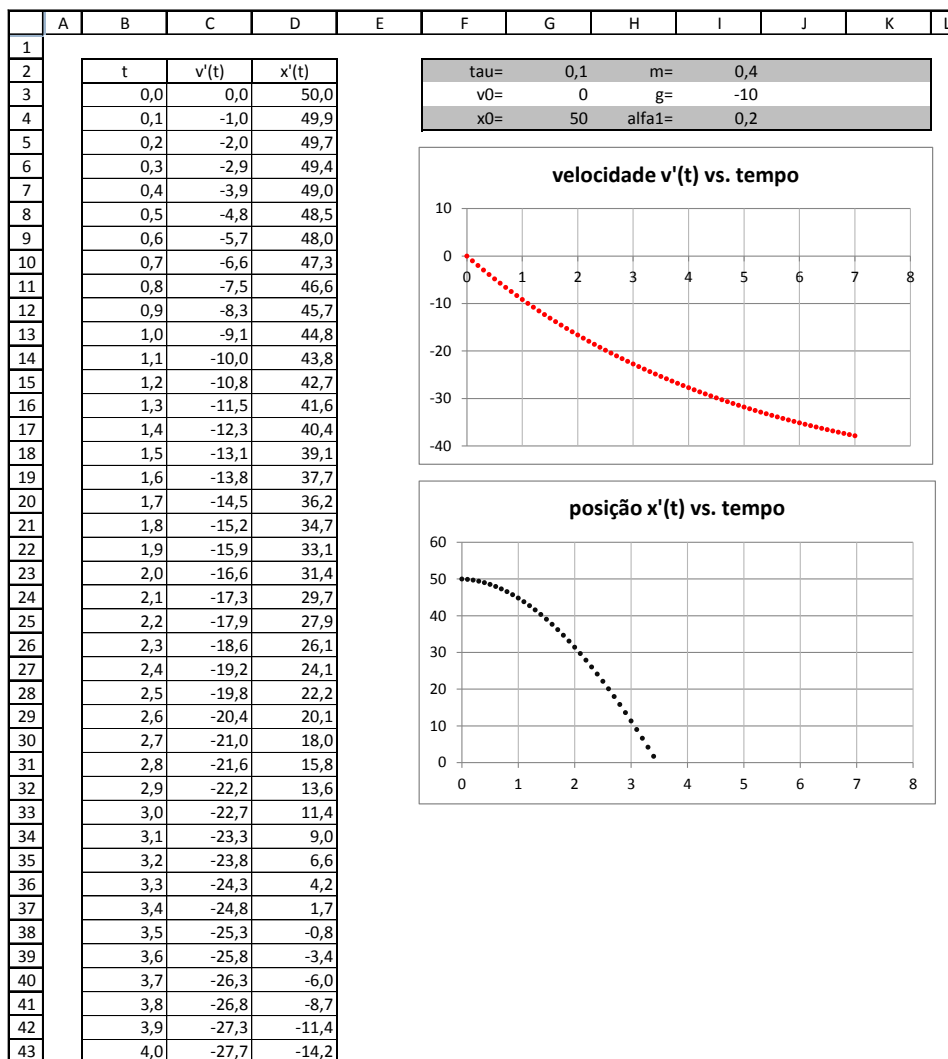
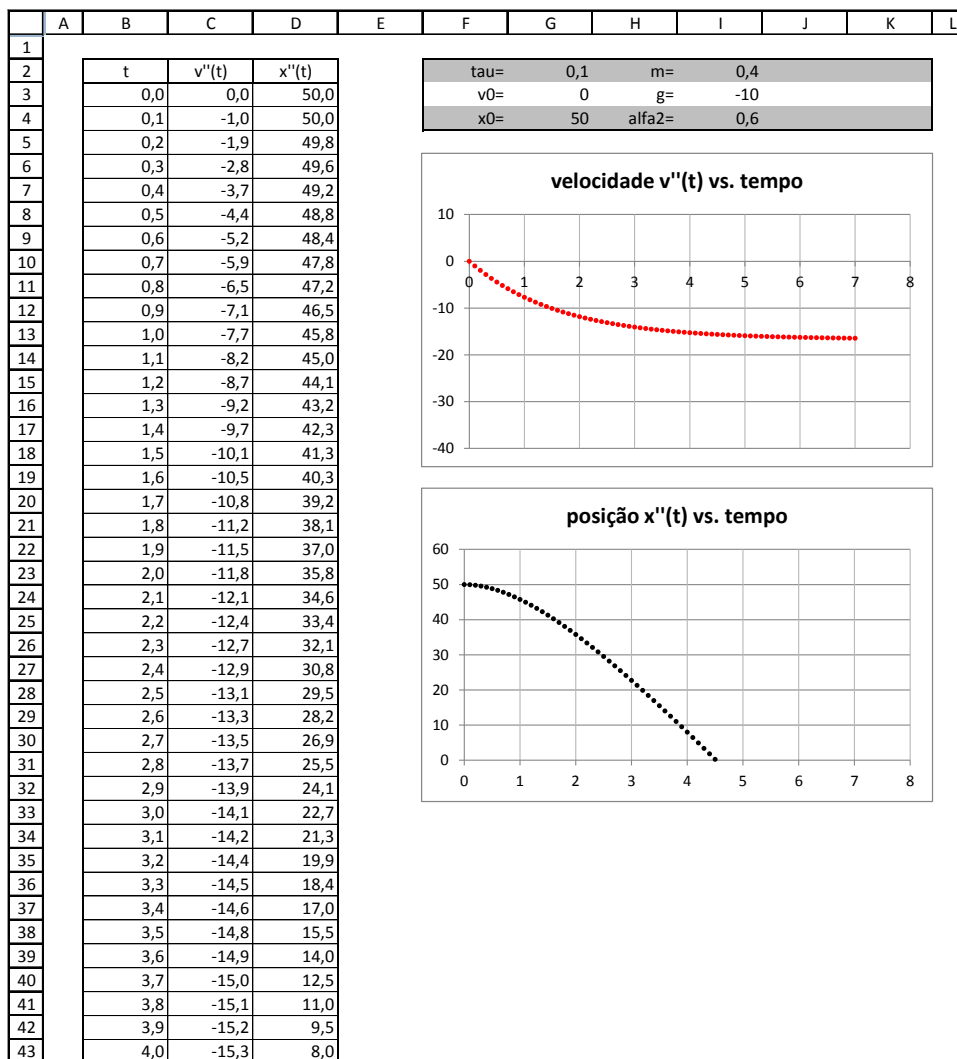


Figura 54. – Planilha Excel para o movimento de queda de uma massa. Os valores foram obtidos considerando-se as soluções discretas que não estão de acordo com a conservação da energia e  $\alpha_1 = 0,2$ .





**Figura 55.** – Planilha Excel para o movimento de queda de uma massa. Os valores foram obtidos considerando-se as soluções discretas que não estão de acordo com a conservação da energia e  $\alpha_2 = 0,6$ .

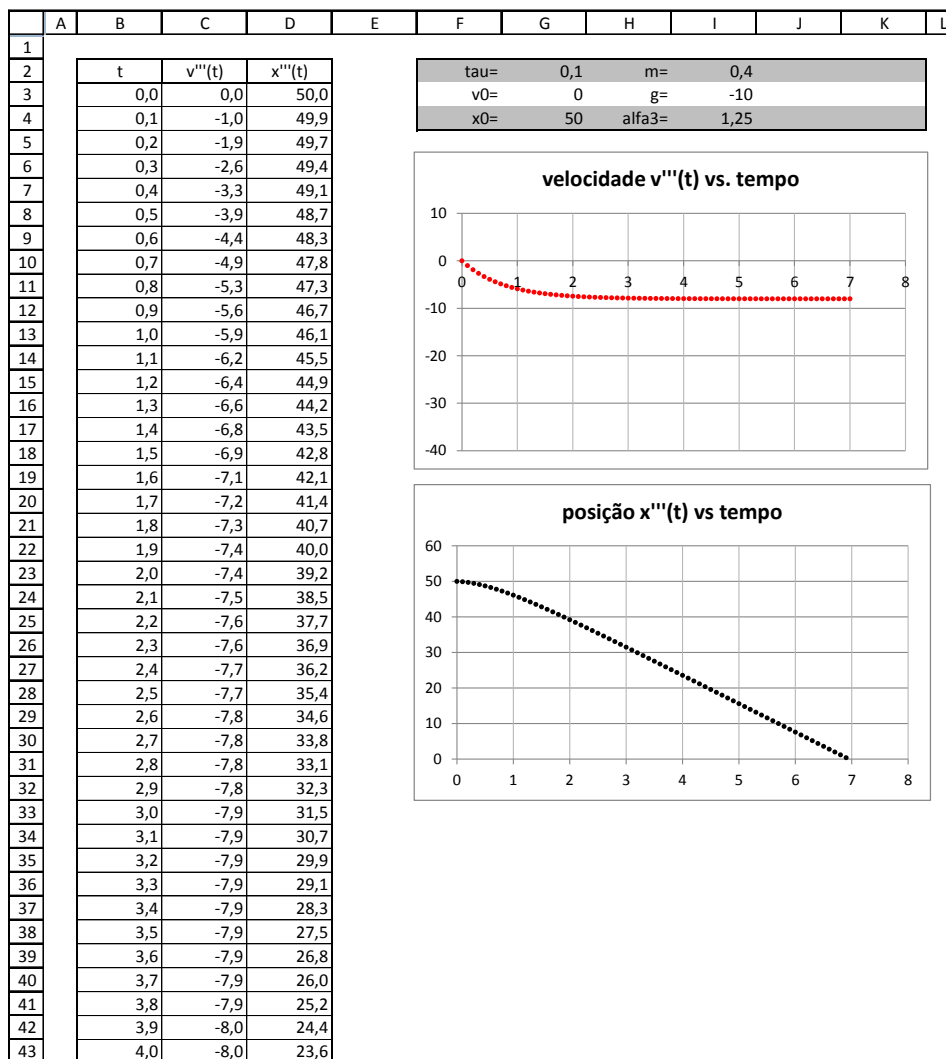


Figura 56. – Planilha Excel para o movimento de queda de uma massa. Os valores foram obtidos considerando-se as soluções discretas que não estão de acordo com a conservação da energia e  $\alpha_3 = 1,25$ .

### A.3.2 Equações discretas com critério de conservação

Considerando as equações

$$\frac{v_{n+1} + v_n}{2} = \frac{x_{n+1} - x_n}{\tau} \quad (\text{A.17})$$

e

$$a_n = \frac{v_{n+1} - v_n}{\tau}, \quad (\text{A.18})$$

e aplicando a segunda lei de Newton,

$$\left(\sum F\right)_n = ma_n = -mg - bv_n, \quad (\text{A.19})$$

temos como resultado, para o movimento de queda com atrito de um corpo, as equações

$$v_n = v_0 + (g\tau + \alpha\tau v_0) \left[ \frac{(1 - \alpha\tau)^n - 1}{\alpha\tau} \right] \quad (\text{A.20})$$

e

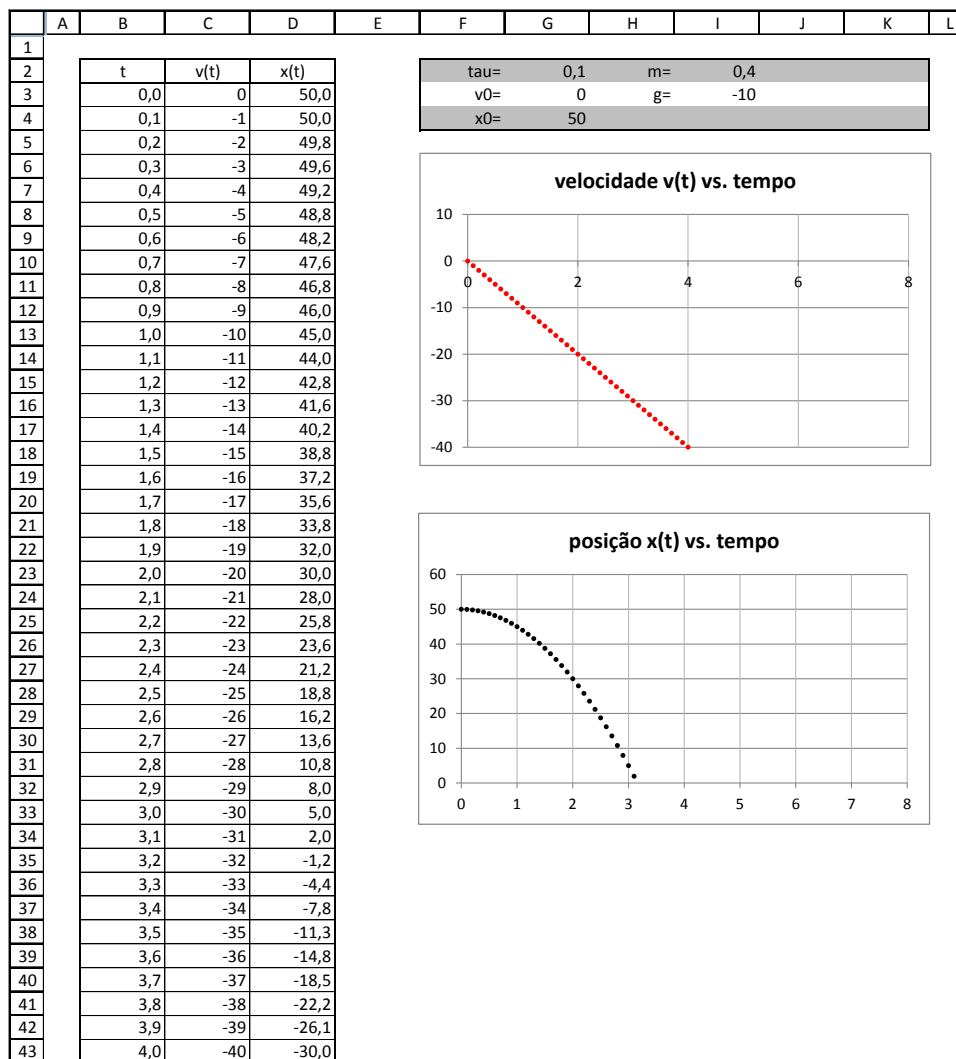
$$x_n = x_0 + v_0 t_n - \frac{g + \alpha v_0}{\alpha^2} \{\beta [(1 - \alpha\tau)^n - 1] + \alpha t_n\}, \quad (\text{A.21})$$

onde  $\alpha = b/m$  e  $\beta = 1 - \alpha\tau/2$ . No Excel faça:

1. Defina  $\tau$ ,  $v_0$ ,  $x_0$ ,  $m$  e  $g$  nas mesmas células em que foram definidas nas Seções anteriores;
2. Construa a coluna dos instantes de tempo até a linha 73, com `tau=0,1`;
3. Em C2 escreva: `v(t)`;
4. Em C3 escreva: `=v0`;
5. Em C4 escreva: `=v0+g*B4`;
6. Clique em “enter”, selecione C4 e preencha a coluna até a linha 73;
7. Em D2 escreva: `x(t)`;
8. Em D3 escreva: `=x0`;
9. Em D4 escreva: `=D3+C3*tau+(g/2)*tau^2`;
10. Clique em “enter”, selecione D4 e preencha a coluna até a linha 73;
11. Construa os gráficos: velocidade  $v(t)$  vs. tempo e posição  $x(t)$  vs. tempo.

A figura 57 mostra o resultado obtido, com as mesmos valores iniciais da subseção anterior.

Como na subseção anterior, resolvemos construir novamente quatro folhas. Na primeira folha estudamos o movimento de queda de um corpo no qual consideramos a ação do ar desprezível. Nas três folhas seguintes consideramos valores diferentes do parâmetro alfa. No Excel, faça:



**Figura 57.** – Planilha Excel para a queda livre de uma massa. Os valores foram obtidos considerando-se as soluções discretas que estão de acordo com a conservação da energia.

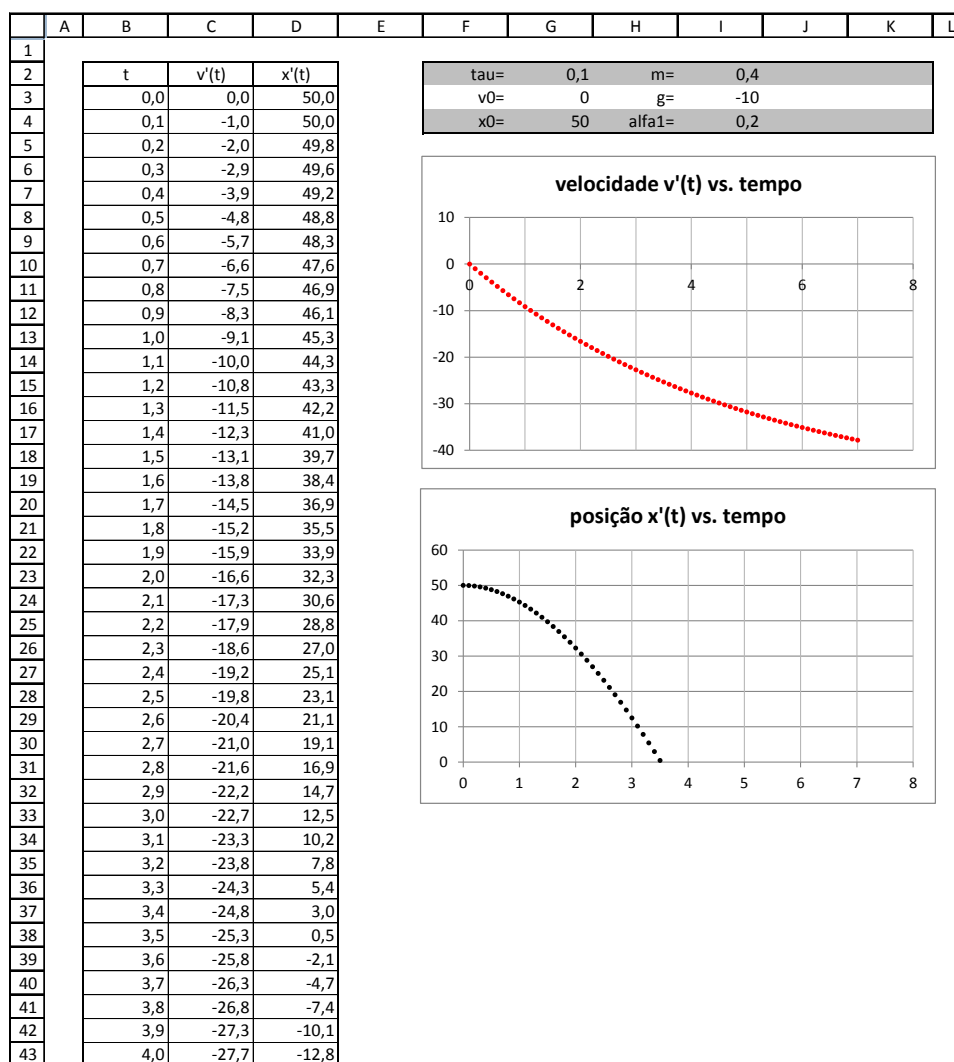
1. Repita os procedimentos acima, de 1 a 8, com exceção do item 5. Na célula C4 escreva:  

$$=v0-((g*\tau+alfa1*\tau*v0)*((1-alfa1*\tau)^(B4/\tau)-1)/(alfa1*\tau));$$
2. Clique em “enter”, selecione C4 e preencha a coluna até a linha 73;
3. Defina alfa1: a representação alfa1 em H4 e seu valor em I4;
4. Em D4 escreva:  

$$=x0+v0*B4+((g+alfa1*v0)/(alfa1^2))*((1-(alfa1*\tau/2))$$

$$((1-alfa1*\tau)^(B4/\tau)-1)+alfa1*B4);$$
5. Clique em “enter”, selecione D4 e preencha a coluna até a linha 73;
6. Construa os gráficos: velocidade  $v'(t)$  vs. tempo e posição  $x'(t)$  vs. tempo.

A figura 58 mostra o resultado obtido para  $\text{alfa1} = 0,2$ . Construimos mais duas folhas repetindo estes últimos procedimentos e considerando  $\text{alfa2} = 0,6$  e  $\text{alfa3} = 1,25$ , definidos nas suas respectivas folhas assim como foi definido  $\text{alfa1}$ . A figura 59 mostra os resultados para  $\text{alfa2}=0,6$  e a figura 60 para  $\text{alfa3} = 1,25$ . Ao realizar os procedimentos acima considerando  $\text{alfa2}$  e  $\text{alfa3}$ , deve-se escrever as equações dos itens 1 e 4 substituindo  $\text{alfa1}$  por  $\text{alfa2}$  ou  $\text{alfa3}$ , dependendo da folha em que se está concentrando atenção. Novamente, para evitar possíveis confusões, sugerimos diferenciar os títulos das colunas dos valores das velocidades e das posições. Na folha de trabalho em que se considera  $\text{alfa1}$ , por exemplo, escrevemos em C2 a representação  $v'(t)$  e em D2 a representação  $x'(t)$ . Na folha com  $\text{alfa2}$ , escrevemos  $v''(t)$  e  $x''(t)$ . E na folha do  $\text{alfa3}$ , escrevemos  $v'''(t)$  e  $x'''(t)$ .



**Figura 58.** – Planilha Excel para o movimento de queda de uma massa. Os valores foram obtidos considerando-se as soluções discretas que estão de acordo com a conservação da energia e  $\alpha = 0,2$ .

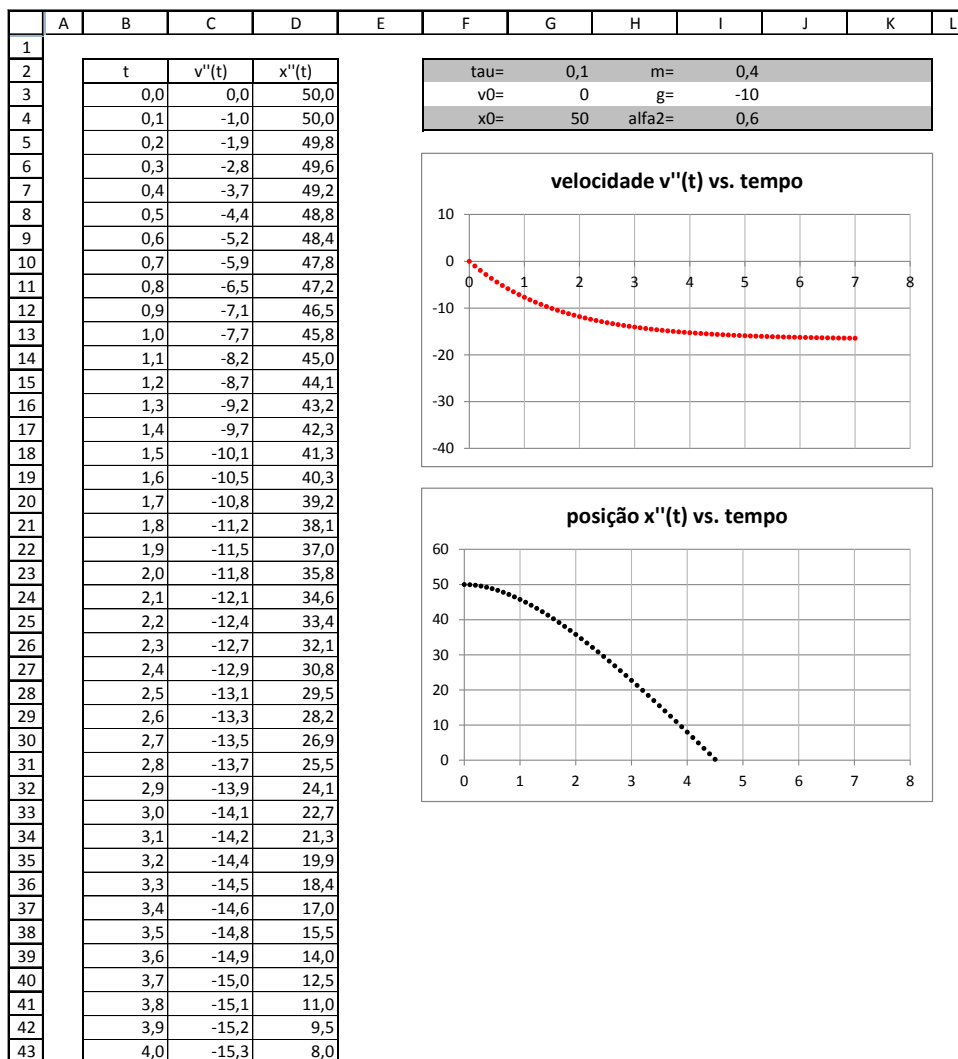


Figura 59. – Planilha Excel para o movimento de queda de uma massa. Os valores foram obtidos considerando-se as soluções discretas que estão de acordo com a conservação da energia e  $\alpha_2 = 0,6$ .

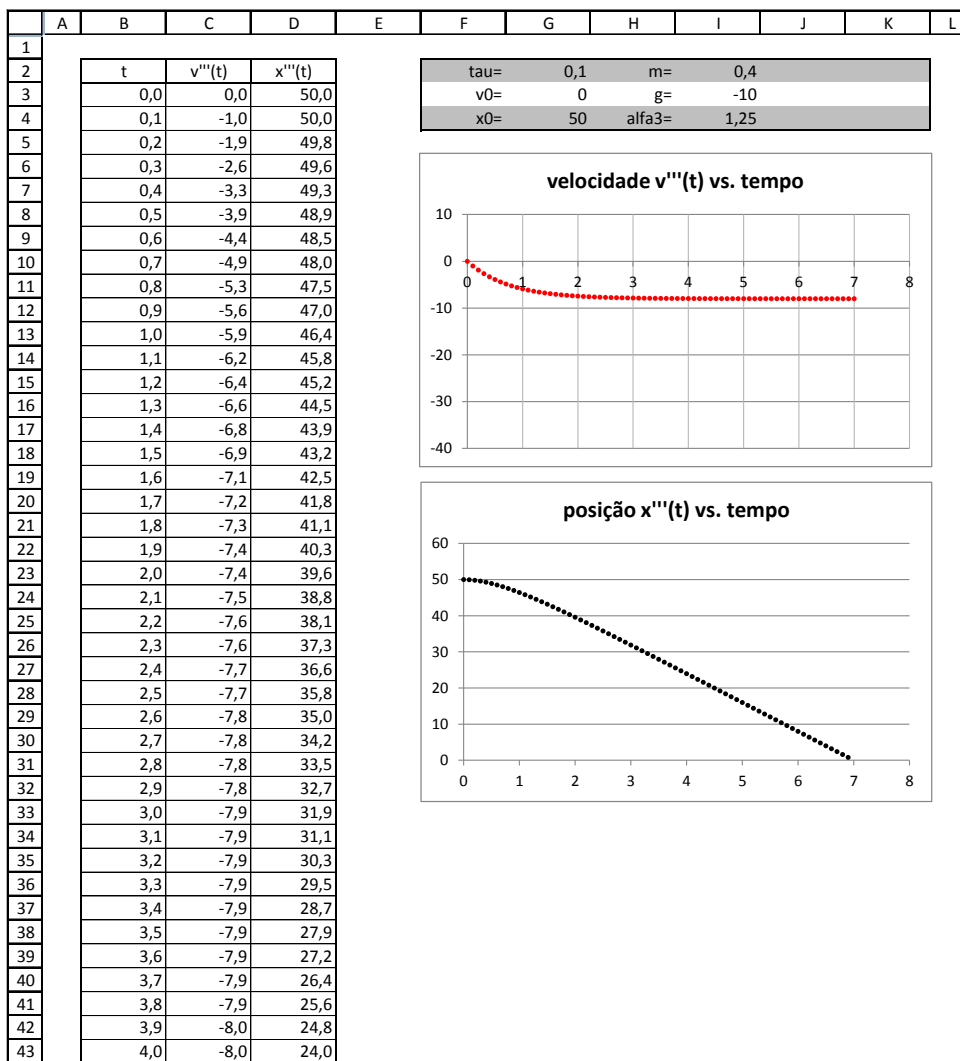


Figura 60. – Planilha Excel para o movimento de queda de uma massa. Os valores foram obtidos considerando-se as soluções discretas que não estão de acordo com a conservação da energia e  $\alpha_3 = 1,25$ .



## A.4 Oscilador harmônico

Esta Seção está dividida em duas subseções. Nas duas subseções resolvemos o problema de movimento do oscilador harmônico simples. Porém, na primeira subseção consideramos a solução discreta do problema que foi obtida considerando-se a discretizações da velocidade e da aceleração em que não adotamos o critério da conservação da energia. Nesta subseção construímos quatro folhas de trabalho que se diferenciam apenas pelo valor do passo adotado. O objetivo é mostrar que, dependendo do problema, a escolha do passo é um fator importante para o estudo do problema. Já na segunda subseção consideramos a solução discreta obtida com o estabelecimento do critério de conservação da energia para as discretizações da velocidade e da aceleração.

### A.4.1 Equações discretas sem critério de conservação

Neste problema, a força elástica é dada por

$$F_n = kx_n. \quad (\text{A.22})$$

Considerando as equações

$$v_{n+1} = \frac{(x_{n+1} - x_n)}{\tau} \quad (\text{A.23})$$

e

$$a_n = \frac{(v_{n+1} - v_n)}{\tau}, \quad (\text{A.24})$$

e definindo a frequência angular como

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \quad (\text{A.25})$$

obtemos como solução as equações

$$v_n = \sqrt{1 + (\omega\tau)^2} [v_0 \cos(\omega_d t_n) - \omega x_0 \sin(\omega_d t_n)] \quad (\text{A.26})$$

e

$$x_n = \sqrt{1 + (\omega\tau)^2} \left[ x_0 \cos(\omega_d t_n) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega_d t_n) \right] \quad (\text{A.27})$$

onde

$$\omega_d = \frac{1}{\tau} \operatorname{atan}(\omega\tau) \quad (\text{A.28})$$

No Excel faça:

1. Defina  $\tau$ ,  $v_0$ ,  $x_0$ ,  $m$  e  $g$  nas mesmas células em que foram definidas na Seção anterior. Defina  $\tau$ : a representação **tauI** em **F2** e seu valor em **G2**;
2. Defina a frequência angular  $\omega$ : a representação **omega** em **H4** e seu valor em **I4**;
3. Em **I4** escreva:  $=(k/m)^{(1/2)}$ ;

4. Defina a constante elástica da mola: a representação  $k$  em J2 e seu valor em K2;
5. Defina o período: a representação período em J3 e seu valor em K3;
6. Em K3 escreva:

$$=2*PI()*((m/k)^(1/2));$$

7. Construa a coluna do tempo até a linha 203, com  $\tau=0,02$ ;
8. Em C2 escreva:  $v(t)$ ;
9. Em C3 escreva:  $=v0$ ;
10. Em C4 escreva:

$$=((1+((\omega*\tau)^2))^(1/2))^(B4/\tau)*(v0*\text{COS}((B4/\tau)*\text{ATAN}(\omega*\tau))-\omega*x0*\text{SEN}((B4/\tau)*\text{ATAN}(\omega*\tau)))).$$

Clique em “enter”, selecione C4 e preencha a coluna até a linha 203;

11. Em D2 escreva:  $x(t)$ ;
12. Em D3 escreva:  $=x0$ ;
13. Em D4 escreva;

$$=((((1+(\omega*\tau)^2)^(1/2))^(B4/\tau))*(x0*\text{COS}((B4/\tau)*\text{ATAN}(\omega*\tau)))+(v0/\omega)*\text{SEN}((B4/\tau)*\text{ATAN}(\omega*\tau)))).$$

Clique em “enter”, selecione D4 e preencha a coluna até a linha 203;

14. Construa os gráficos: velocidade  $v(t)$  vs. tempo e posição  $x(t)$  vs. tempo.

A figura 61 mostra o resultado obtido.

Novamente resolvemos construir quatro folhas e realizamos os mesmos procedimentos acima discriminados mudando o valor do passo. Assim, obtemos uma folha de trabalho para  $\tau = 0,02$ , cujos procedimentos estão acima listados, para  $\tau_{II} = 0,01$ , para  $\tau_{III} = 0,006$  e para  $\tau_{IV} = 0,001$ . Com esta estratégia de trabalho podemos ter numa mesma planilha as quatro folhas cujos resultados estão apresentados nas figuras desta subseção. A figura 62 mostra os resultados para  $\tau_{II} = 0,01$ , a figura 63 para  $\tau_{III} = 0,006$  e a figura 64 para  $\tau_{IV} = 0,001$ . O objetivo desta organização das folhas de trabalho é facilitar a comparação dos gráficos quando se altera o valor do passo.

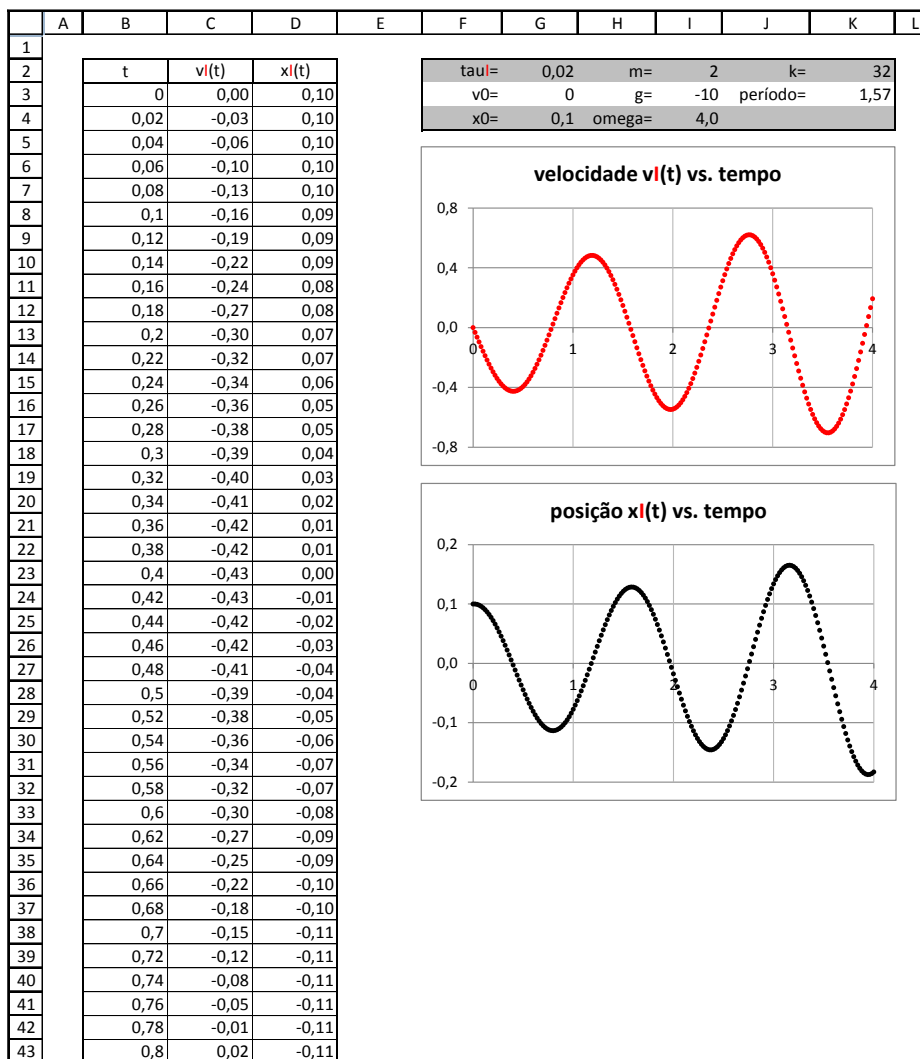
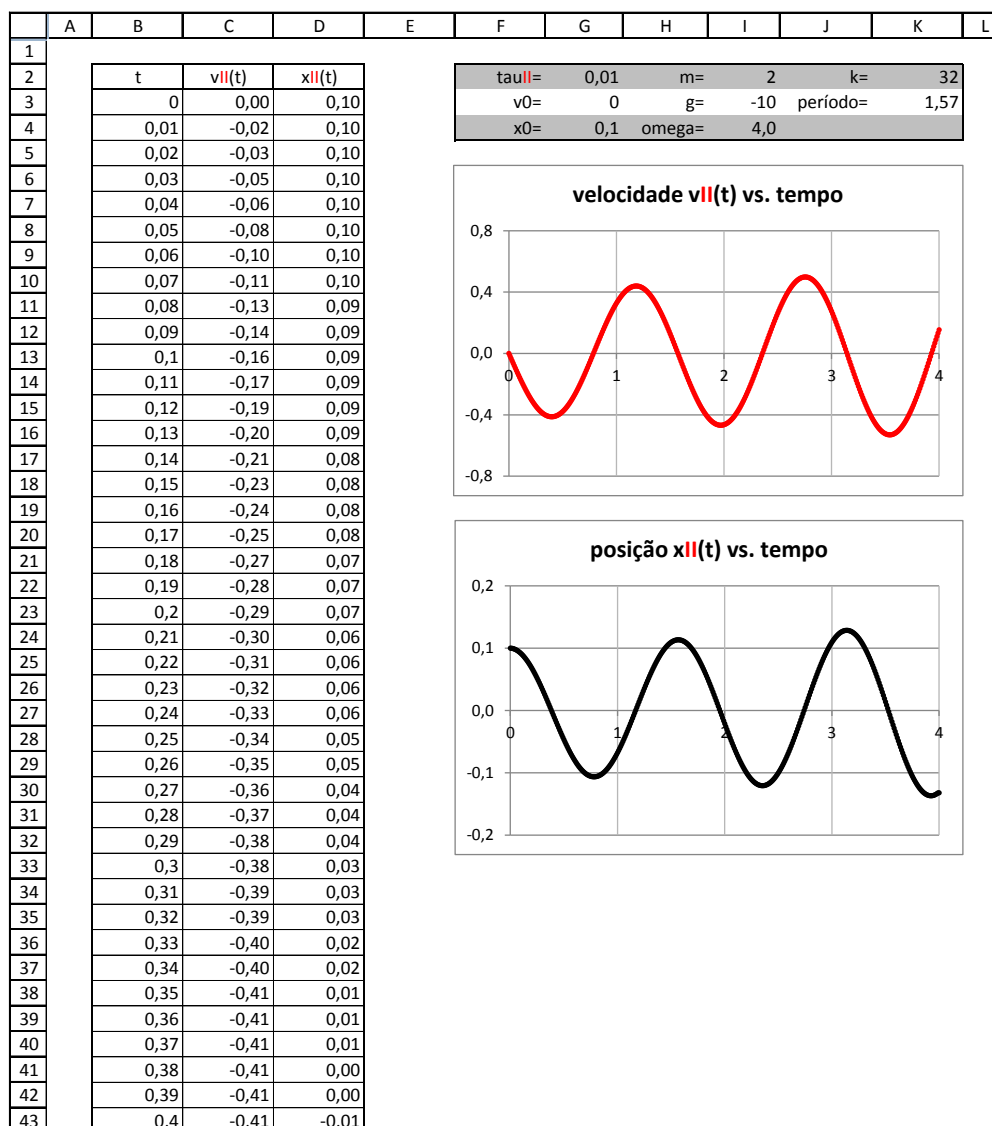
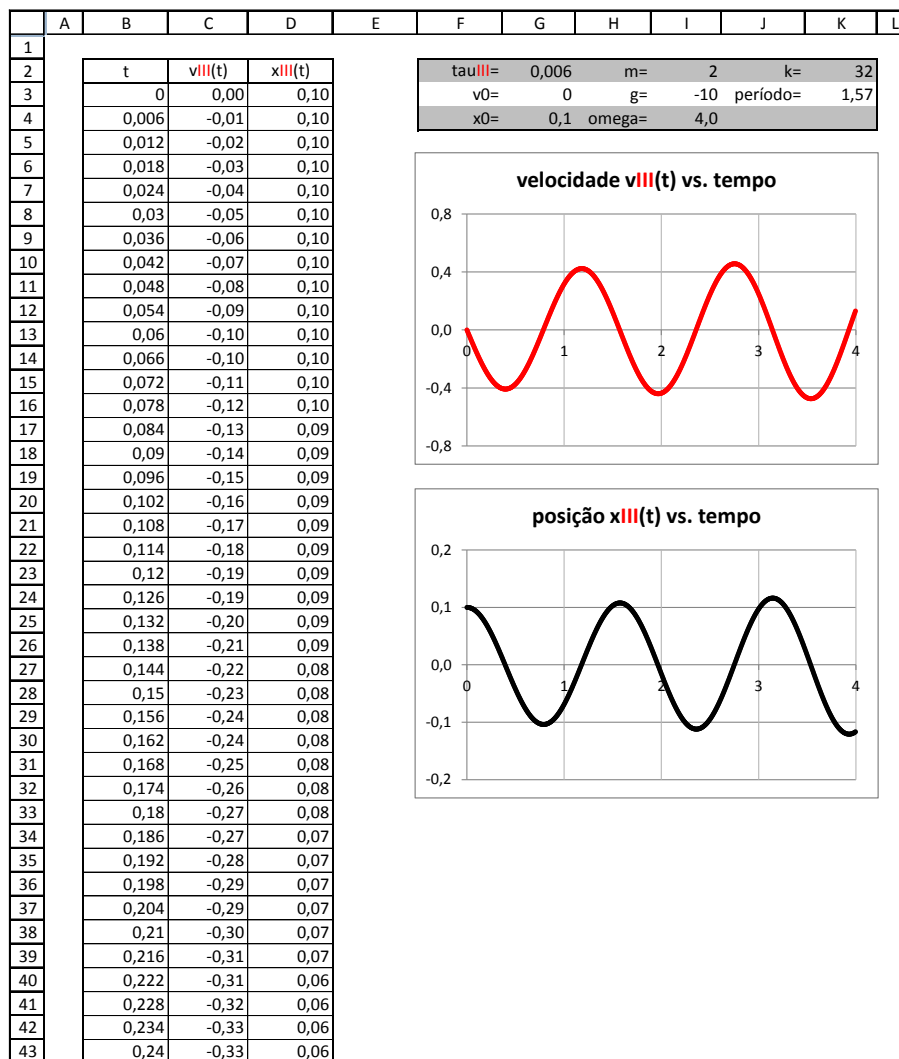


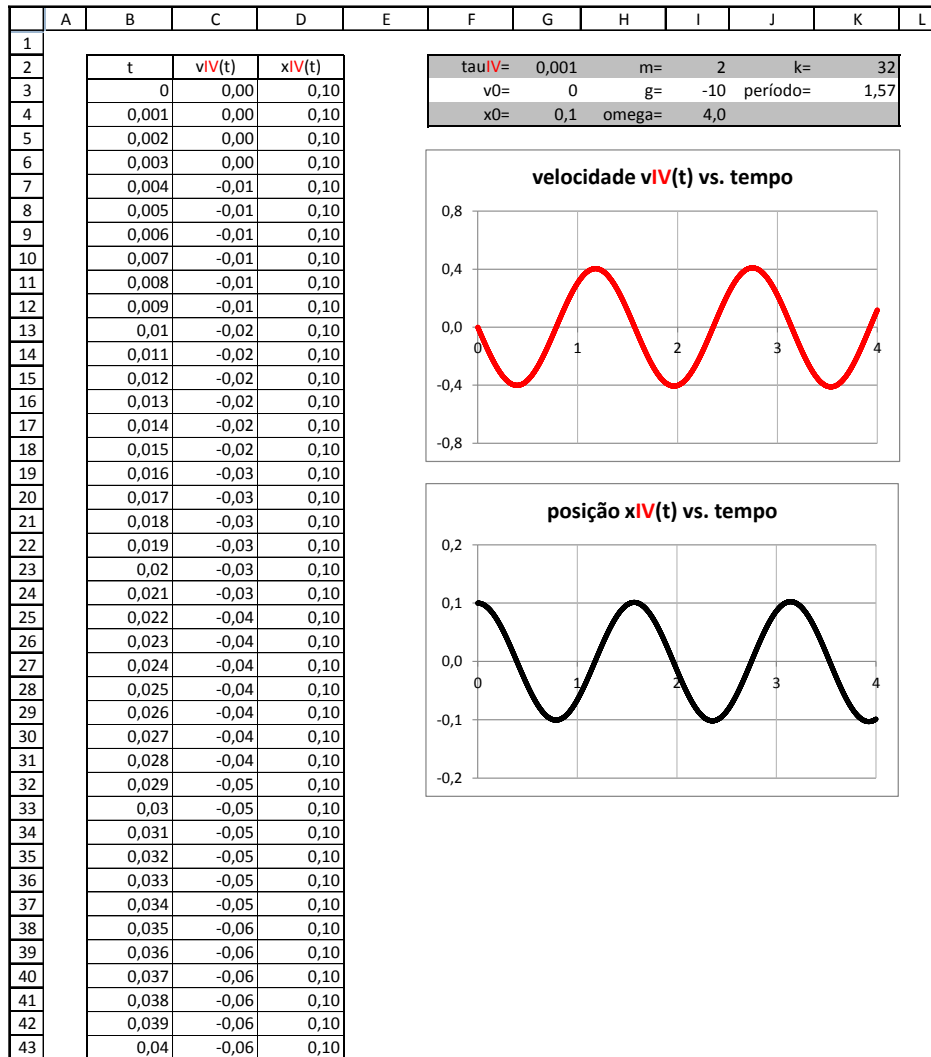
Figura 61. – Solução do problema de movimento de um oscilador harmônico considerando as equações discretas que não estão de acordo com o princípio da conservação da energia. Os resultados foram obtidos considerando-se  $\tau_{\text{auI}} = 0,02$ .



**Figura 62.** – Solução do problema de movimento de um oscilador harmônico considerando as equações discretas que não estão de acordo com o princípio da conservação da energia. Os resultados foram obtidos considerando-se  $\tau_{II} = 0,01$ .



**Figura 63.** – Solução do problema de movimento de um oscilador harmônico considerando as equações discretas que não estão de acordo com o princípio da conservação da energia. Os resultados foram obtidos considerando-se  $\tau_{III} = 0,006$ .



**Figura 64.** – Solução do problema de movimento de um oscilador harmônico considerando as equações discretas que não estão de acordo com o princípio da conservação da energia. Os resultados foram obtidos considerando-se  $\tau_{IV} = 0,001$ .

### A.4.2 Equações discretas com critério de conservação

Neste problema, a força elástica é dada por

$$F_n = kx_n. \quad (\text{A.29})$$

Considerando as equações

$$\frac{v_{n+1} + v_n}{2} = \frac{(x_{n+1} - x_n)}{\tau} \quad (\text{A.30})$$

e

$$\frac{a_{n+1} + a_n}{2} = \frac{(v_{n+1} - v_n)}{\tau} \quad (\text{A.31})$$

e definindo a frequência angular como

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \quad (\text{A.32})$$

obtemos como solução as equações

$$v_{n+1} = \left( \frac{4 - \omega^2 \tau^2}{4 + \omega^2 \tau^2} \right) v_n - \left( \frac{4\omega\tau}{4 + \omega^2 \tau^2} \right) \omega x_n \quad (\text{A.33})$$

e

$$\omega x_{n+1} = \frac{4\omega\tau}{4 + \omega^2 \tau^2} v_n + \frac{4 - \omega^2 \tau^2}{4 + \omega^2 \tau^2} \omega x_n \quad (\text{A.34})$$

onde

$$\omega_d = \frac{1}{\tau} \operatorname{atan} \frac{\omega\tau}{1 - \frac{\omega^2 \tau^2}{4}}. \quad (\text{A.35})$$

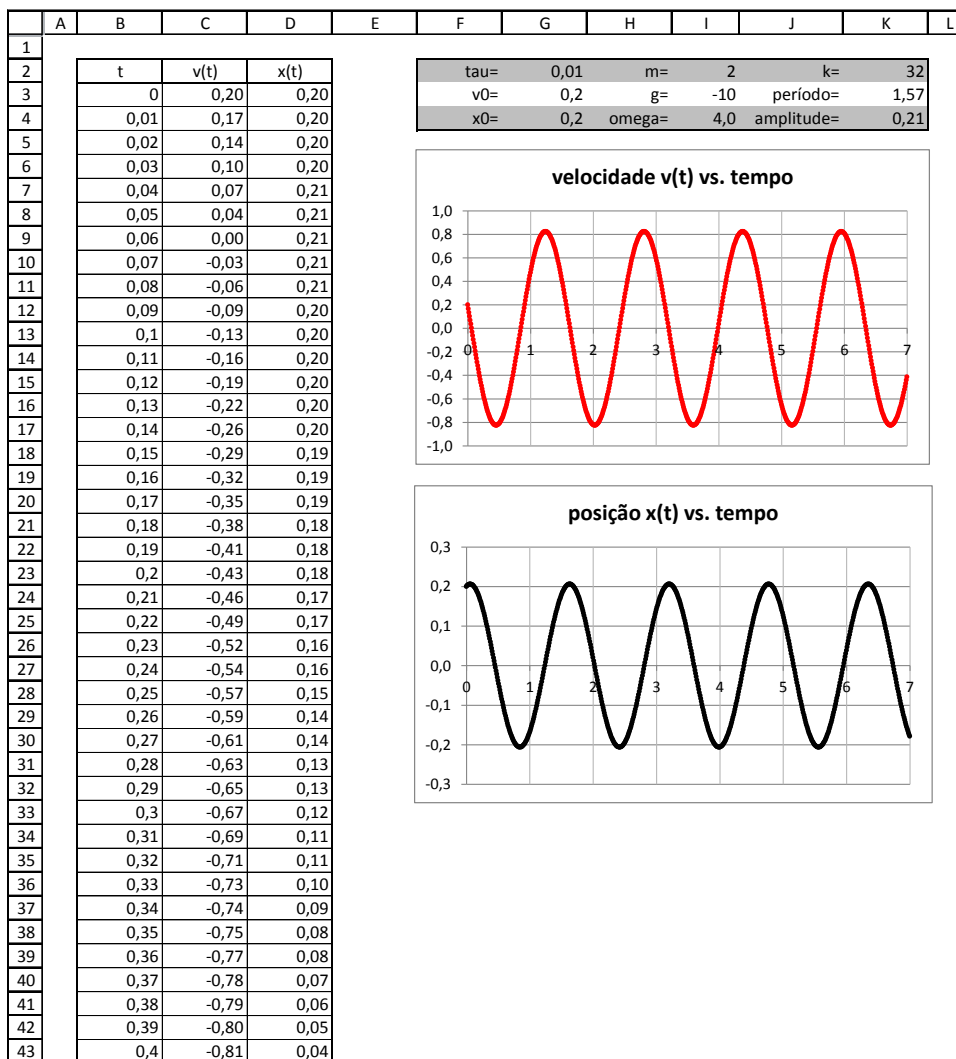
No Excel faça:

1. Defina  $\tau$ ,  $v_0$ ,  $x_0$ ,  $m$  e  $g$  nas mesmas células em que foram definidas nas Seções anteriores;
2. Defina a frequência angular  $\omega$ : a representação **omega** em H4 e seu valor em I4;
3. Em I4 escreva:  $= (k/m)^{(1/2)}$ ;
4. Defina a constante elástica da mola: a representação **k** em J2 e seu valor em K2;
5. Defina o período: a representação **período** em J3 e seu valor em K3;
6. Em K3 escreva:  $= 2 * \text{PI}() * ((m/k)^{(1/2)})$ ;
7. Construa a coluna dos instantes de tempo até a linha 703, com **tau=0,01**;
8. Em C2 escreva: **v(t)**;
9. Em C3 escreva: **=v0**;
10. Em C4 escreva:  $= ((4 - (\text{omega} * \text{tau})^2)) / (4 + (\text{omega} * \text{tau})^2) * \text{C3} - ((4 * \text{tau} * (\text{omega}^2)) / (4 + (\text{omega} * \text{tau})^2)) * \text{D3}$ ;

11. Clique em “enter”, selecione C4 e preencha a coluna até a linha 703;
12. Em D2 escreva:  $x(t)$ ;
13. Em D3 escreva:  $=x0$ ;
14. Em D4 escreva:  $=(4*\tau/(4+(\omega*\tau)^2))$   
 $C3+((4-(\omega*\tau)^2)/(4+(\omega*\tau)^2))*D3$ ;
15. Clique em “enter”, selecione D4 e preencha a coluna até a linha 703;
16. Construa os gráficos: velocidade  $v(t)$  vs. tempo e posição  $x(t)$  vs. tempo.

A figura 65 mostra o resultado obtido. Os parâmetros devem ser observados no quadro de valores na figura.





**Figura 65.** – Solução do problema de movimento de um oscilador harmônico considerando as equações discretas que estão de acordo com o princípio da conservação da energia. Os resultados foram obtidos considerando-se  $\tau = 0,01$ .

## A.5 Movimento com atrito proporcional ao quadrado da velocidade

Nesta parte do trabalho, vamos considerar a força de resistência do ar sobre um corpo em queda igual a

$$\vec{F}_{a(n)} = -bv_n^2 \hat{e} \quad (\text{A.36})$$

onde  $\hat{e}$  é um vetor unitário que tem a direção e o sentido do vetor velocidade do corpo em movimento.

Considerando as equações

$$v_{n+1} = \frac{x_{n+1} - x_n}{\tau} \quad (\text{A.37})$$

e

$$a_n = \frac{v_{n+1} - v_n}{\tau}, \quad (\text{A.38})$$

e aplicando a segunda lei de Newton,

$$\left(\sum F\right)_n = ma_n = -mg - bv_n^2, \quad (\text{A.39})$$

temos como resultado, para o movimento de queda com atrito de um corpo, as equações

$$v_{n+1} = v_n - \alpha v_n^2 \tau - g\tau \quad (\text{A.40})$$

e

$$x_{n+1} = x_n + v_n \tau - \alpha v_n^2 \tau^2 - g\tau^2 \quad (\text{A.41})$$

onde  $\alpha = b/m$ . No Excel faça:

1. Defina  $\tau$ ,  $v_0$ ,  $x_0$ ,  $m$  e  $g$  nas mesmas células em que foram definidas nas Seções anteriores;
2. Construa a coluna dos instantes de tempo até a linha 73, com `tau=0,1`;
3. Em C2 escreva: `v(t)`;
4. Em C3 escreva: `=v0`;
5. Em C4 escreva: `=v0+g*B4`;
6. Clique em “enter”, selecione C4 e preencha a coluna até a linha 73;
7. Em D2 escreva: `x(t)`;
8. Em D3 escreva: `=x0`;
9. Em D4 escreva: `=D3+C3*tau+g*tau^2`;
10. Clique em “enter”, selecione D4 e preencha a coluna até a linha 73;
11. Construa os gráficos: velocidade  $v(t)$  vs. tempo e posição  $x(t)$  vs. tempo;

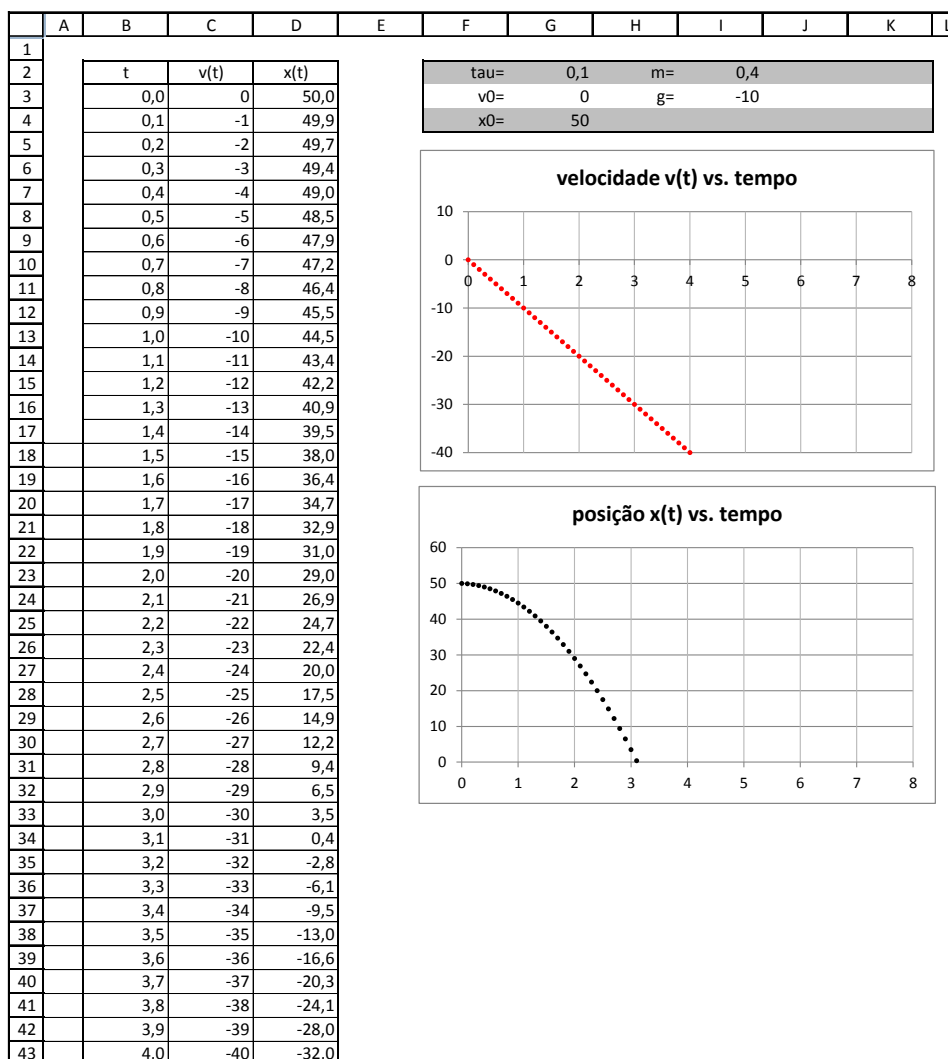


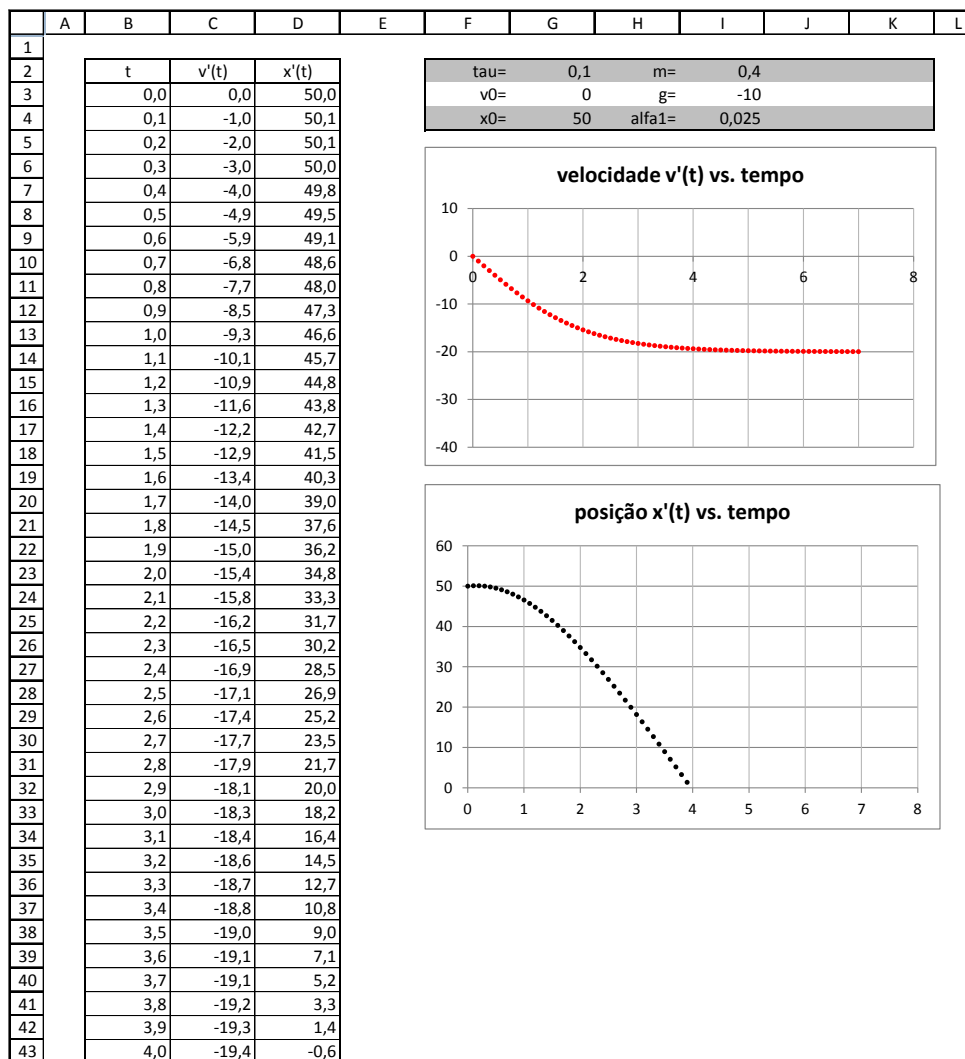
Figura 66. – Planilha Excel para o movimento de Queda livre de uma massa.

A figura 66 mostra os resultados obtidos.

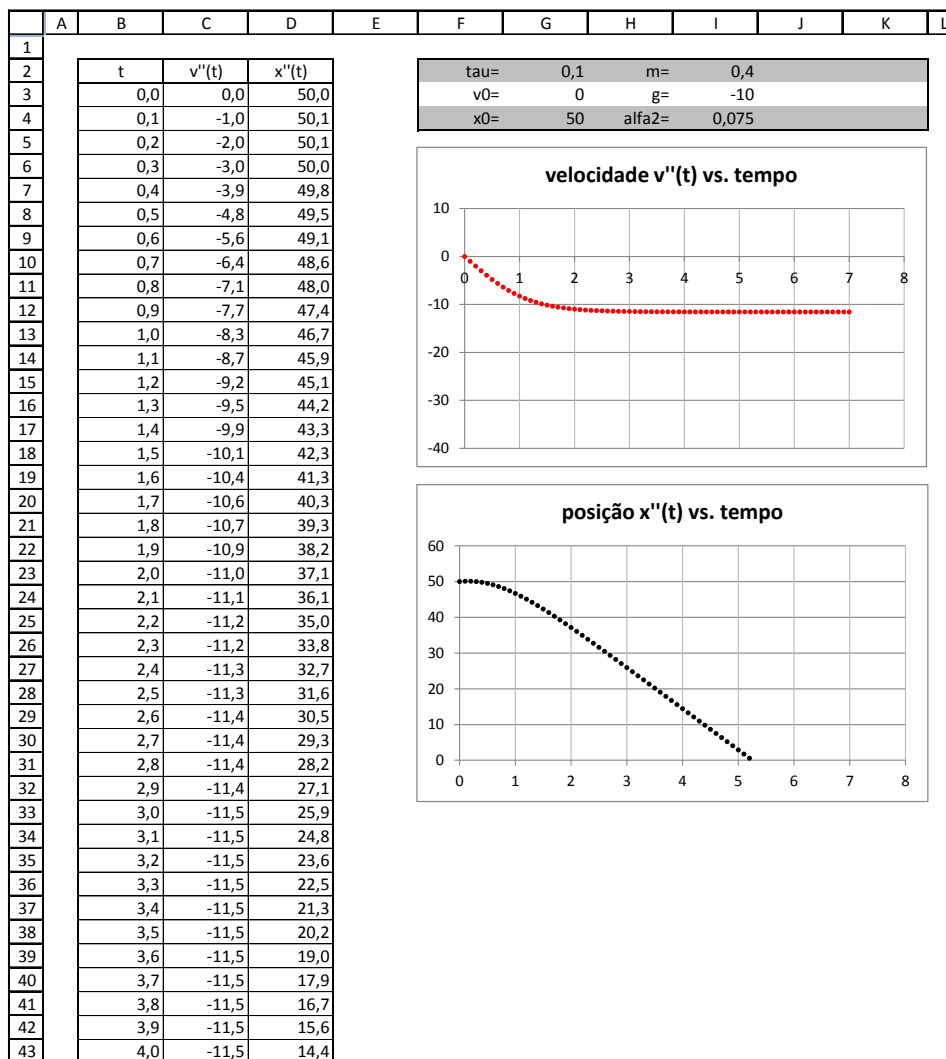
Agora vamos criar novas folhas e considerar a resistência do ar. Faça:

1. Repita os procedimentos acima, de 2 a 8, com exceção do item 5. Na célula C4 escreva:  
 $=C3+g*\tau-\alpha1*\tau*C3^2$ ;
2. Clique em “enter”, selecione C4 e preencha a coluna até a linha 73;
3. Defina **alfa1**: a representação **alfa1** em H4 e seu valor em I4;
4. Em D4 escreva;  $=D3+C3*\tau-g*\tau^2-(\alpha1)*(\tau^2)*C3^2$ ;
5. Clique em “enter”, selecione D4 e preencha a coluna até a linha 73;
6. Construa os gráficos: velocidade  $v'(t)$  vs. tempo e posição  $x'(t)$  vs. tempo.

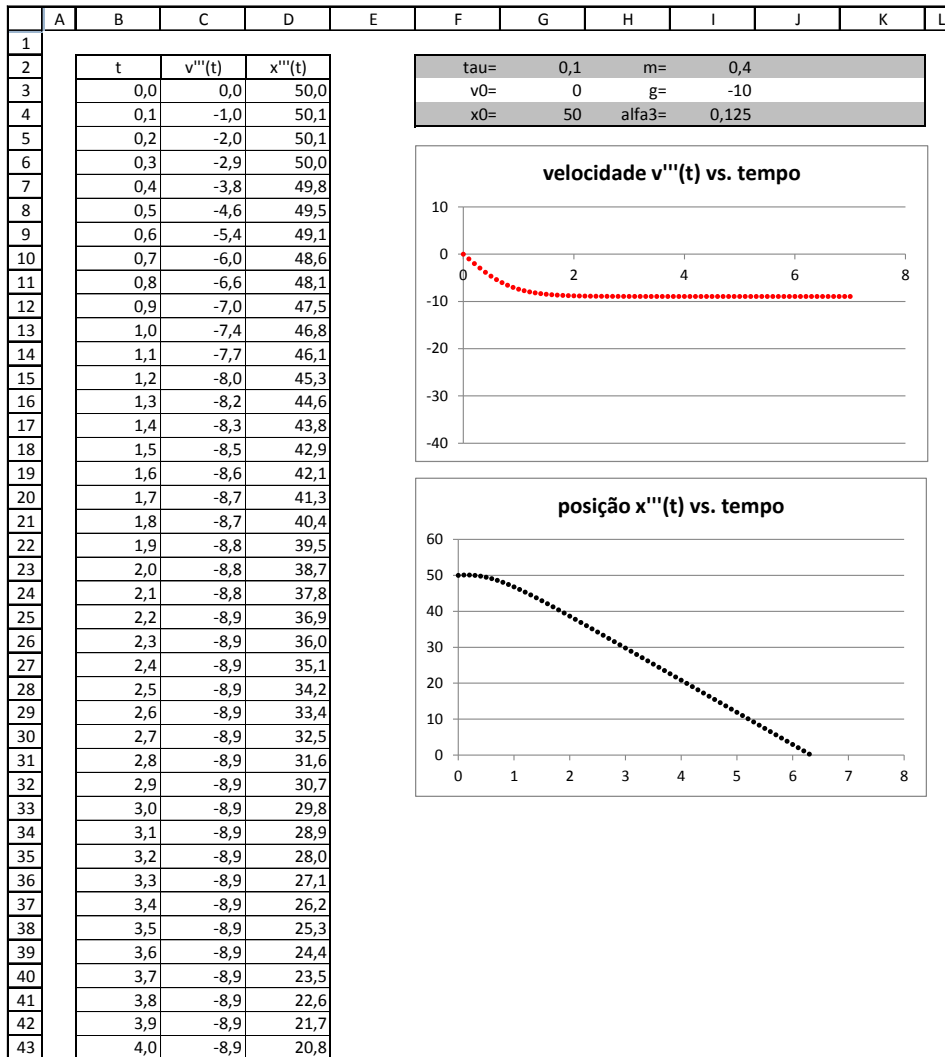
A figura 67 mostra o resultado obtido para  $\alpha1 = 0,025$ . Construímos mais duas folhas repetindo estes últimos procedimentos e considerando  $\alpha2 = 0,075$  e  $\alpha3 = 0,125$ , definidos nas suas respectivas folhas assim como foi definido **alfa1**. A figura 68 mostra os resultados para  $\alpha2 = 0,075$  e a figura 69 para  $\alpha3 = 0,125$ . Ao realizar os procedimentos acima considerando **alfa2** e **alfa3**, deve-se escrever as equações dos itens 1 e 4 substituindo **alfa1** por **alfa2** ou **alfa3**, dependendo da folha em que se está concentrando atenção. Além disso, para evitar possíveis confusões, pode-se diferenciar os títulos das colunas dos valores das velocidades e das posições. Na folha de trabalho em que se considera **alfa1**, por exemplo, escrevemos em C2 a representação  $v'(t)$  e em D2 a representação  $x'(t)$ . Na folha com **alfa2**, escrevemos  $v''(t)$  e  $x''(t)$ . E na folha do **alfa3**, escrevemos  $v'''(t)$  e  $x'''(t)$ .



**Figura 67.** – Planilha Excel para o movimento de Queda de uma massa. O corpo sofre a ação de uma força resistiva proporcional ao quadrado da velocidade do corpo. Neste caso o parâmetro alfa vale:  $\alpha_1 = 0,025$ .



**Figura 68.** – Planilha Excel para o movimento de Queda de uma massa. O corpo sofre a ação de uma força resistiva proporcional ao quadrado da velocidade do corpo. Neste caso o parâmetro alfa vale:  $\alpha = 0,075$ .



**Figura 69.** – Planilha Excel para o movimento de Queda de uma massa. O corpo sofre a ação de uma força resistiva proporcional ao quadrado da velocidade do corpo. Neste caso o parâmetro alfa vale:  $\text{alfa3} = 0,125$ .

## A.6 Movimento de projéteis

Nesta Seção resolvemos o problema de movimento do projétil. Dividimos a Seção em quatro subseções. Na primeira consideramos a ação do ar desprezível. Nas três subseções seguintes consideramos valores diferentes da intensidade da força que caracteriza a resistência do ar sobre o projétil. Nestas subseções vamos considerar a força de resistência do ar sobre um corpo igual a

$$\vec{F}_{a(n)} = -bv_n^2\hat{e}, \quad (\text{A.42})$$

onde  $\hat{e}$  é um vetor unitário que tem a direção e o sentido do vetor velocidade do corpo em movimento. Usamos as mesmas discretizações nas quatro situações. Além disso, em nossa abordagem analisamos o movimento do projétil construindo três folhas em cada situação: uma com os comportamentos da velocidade e da posição em função do tempo na direção horizontal, outra com os comportamentos da velocidade e da posição em função do tempo na direção vertical e a última com a trajetória do projétil.

### A.6.1 Movimento de projéteis com atrito desprezível

Considerando as equações

$$\frac{v_{x(n+1)} + v_{x(n)}}{2} = \frac{(x_{n+1} - x_n)}{\tau} \quad (\text{A.43})$$

e

$$a_{x(n)} = \frac{v_{x(n+1)} - v_{x(n)}}{\tau}, \quad (\text{A.44})$$

e aplicando a segunda lei de Newton,

$$\left(\sum F\right)_{x(n)} = ma_{x(n)} = 0, \quad (\text{A.45})$$

temos como resultado as equações

$$v_{x(n+1)} = v_{x(n)} = \text{constante}, \quad (\text{A.46})$$

e

$$x_{n+1} = x_n + v_{x(n)}\tau. \quad (\text{A.47})$$

Para o estudo das grandezas na horizontal faça:

1. Defina  $\tau$  como foi definido nas Seções anteriores;
2. Defina  $v_{x0}$  (componente horizontal do vetor velocidade inicial): a representação  $v_{x0}$  em F3 e seu valor em G3;
3. Defina  $x_0$  (componente horizontal do vetor posição inicial): a representação  $x_0$  em F4 e seu valor em G4;



4. Defina  $m$ : a representação  $m$  em H2 e seu valor em I2;
5. Defina  $g$ : a representação  $g$  em H3 e seu valor em I3;
6. Construa a coluna dos instantes de tempo até a linha 43, com  $\text{tau}=0,1$ ;
7. Em C2 escreva:  $\text{vx}(\text{t})$ ;
8. Em C3 escreva:  $=\text{vx}0$ ;
9. Em C4 escreva:  $=\text{vx}0$ ;
10. Clique em “enter”, selecione C4 e preencha a coluna até a linha 43;
11. Em D2 escreva:  $\text{x}(\text{t})$ ;
12. Em D3 escreva:  $=\text{x}0$ ;
13. Em D4 escreva:  $=\text{D3}+\text{C3}*\text{tau}$ ;
14. Clique em “enter”, selecione D4 e preencha a coluna até a linha 43;
15. Construa os gráficos: velocidade  $\text{vx}(\text{t})$  vs. tempo e posição  $\text{x}(\text{t})$  vs. tempo.

A figura 70 mostra o resultado, considerando-se  $\text{vx}0 = 25 \text{ m/s}$ ,  $\text{x}0 = 0$ ,  $m = 1 \text{ kg}$  e  $g = -10 \text{ m/s}^2$ .

Considerando as equações

$$\frac{v_{y(n+1)} + v_{y(n)}}{2} = \frac{(y_{n+1} - y_n)}{\tau} \quad (\text{A.48})$$

e

$$\frac{a_{y(n+1)} + a_{y(n)}}{2} = \frac{(v_{y(n+1)} - v_{y(n)})}{\tau}, \quad (\text{A.49})$$

e aplicando a segunda lei de Newton,

$$\left(\sum F\right)_{y(n)} = ma_{y(n)} = -mg, \quad (\text{A.50})$$

temos como resultado as equações

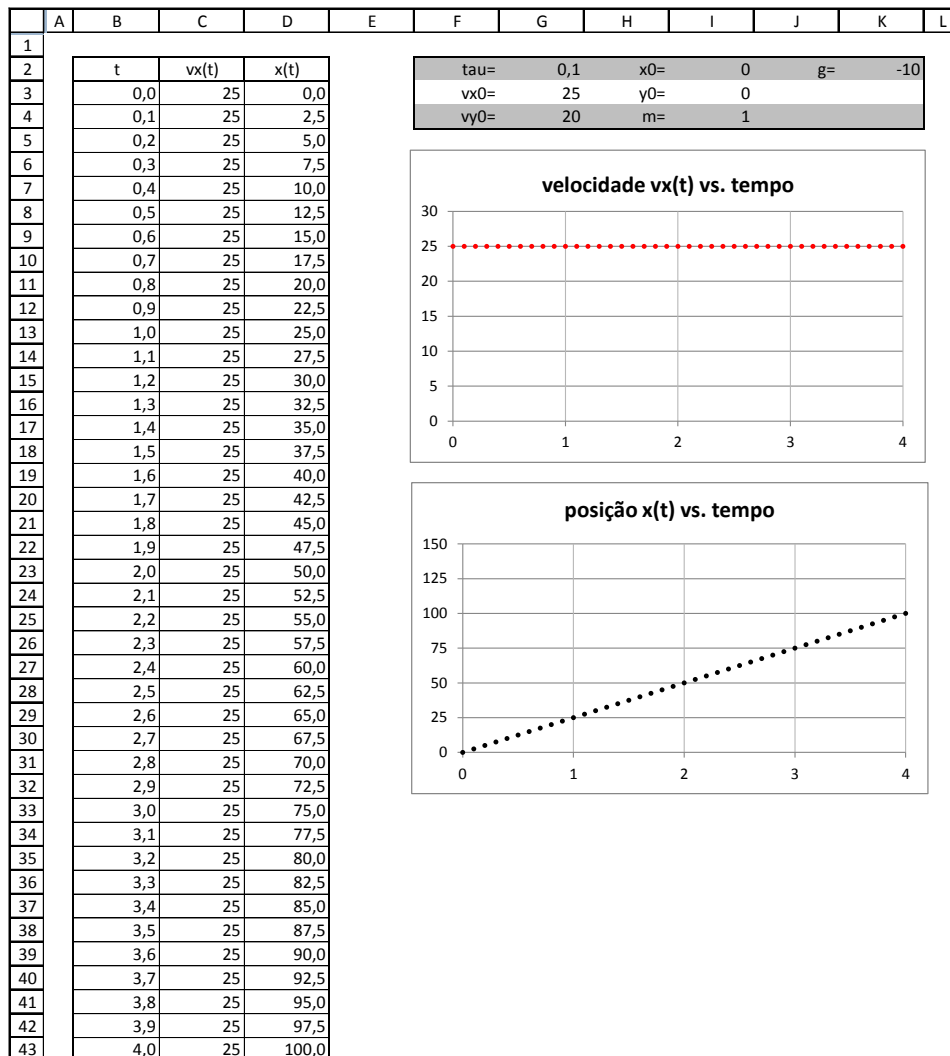
$$v_{y(n+1)} = v_{y(n)} - g\tau, \quad (\text{A.51})$$

e

$$y_{n+1} = y_n + v_{y(n)}\tau - \frac{g}{2}\tau^2. \quad (\text{A.52})$$

Para o estudo das grandezas na vertical faça:

1. O parâmetro  $\tau$  já está definido. Construa a coluna dos instantes de tempo até a linha 43, com  $\text{tau}=0,1$ ;



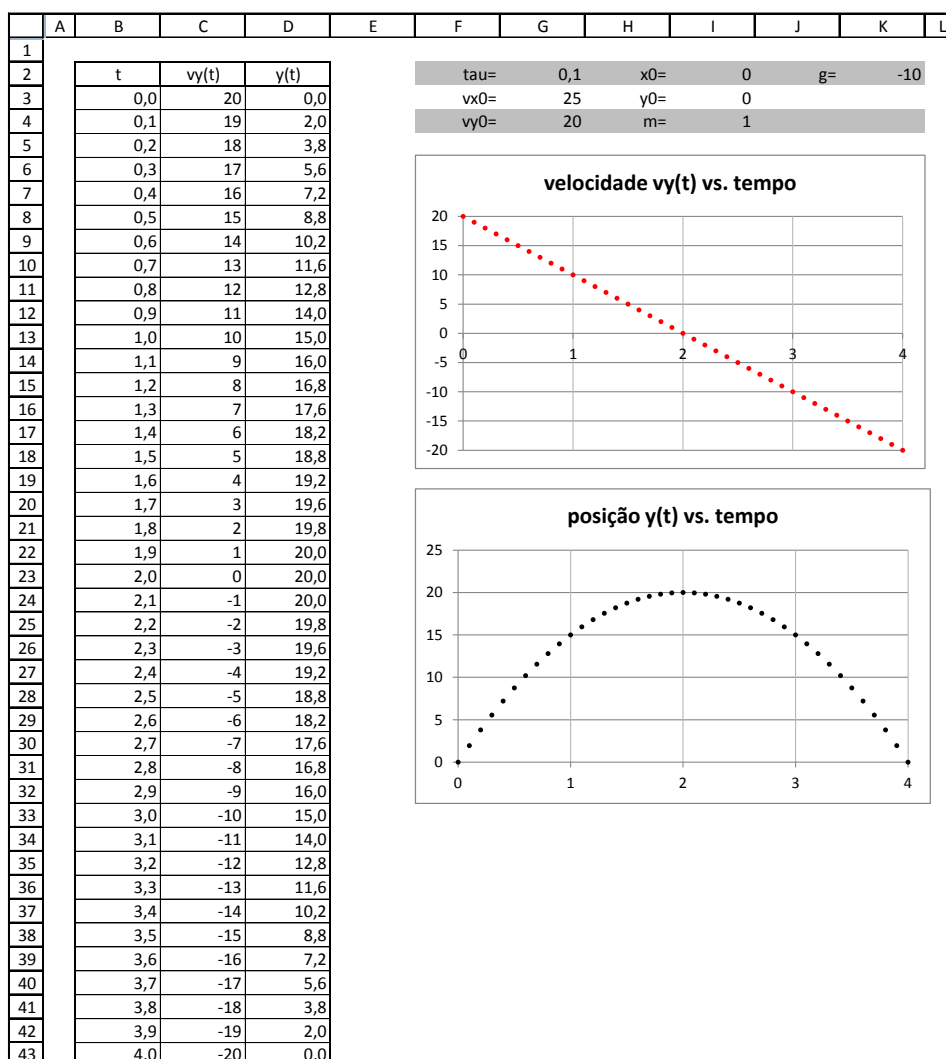
**Figura 70.** – Comportamentos das componentes horizontais da velocidade e posição do projétil. Neste caso consideramos desprezível a ação do ar.

2. Defina  $v_{y0}$  (componente vertical do vetor velocidade inicial): a representação  $v_{y0}$  em F3 e seu valor em G3;
3. Defina  $y_0$  (componente vertical do vetor posição inicial): a representação  $y_0$  em F4 e seu valor em G4;
4. Os parâmetros  $m$  e  $g$  já estão definidos;
5. Construa a coluna dos instantes de tempo até a linha 43, com  $\tau=0,1$ ;
6. Em C2 escreva:  $v_y(\tau)$ ;
7. Em C3 escreva:  $=v_{y0}$ ;
8. Em C4 escreva:  $=C3+g*\tau$ ;
9. Clique em “enter”, selecione C4 e preencha a coluna até a linha 43;
10. Em D2 escreva:  $y(\tau)$ ;
11. Em D3 escreva:  $=y_0$ ;
12. Em D4 escreva:  $=D3+C3*\tau+g/2*\tau^2$ ;
13. Clique em “enter”, selecione D4 e preencha a coluna até a linha 43;
14. Construa os gráficos: velocidade  $v_y(t)$  vs. tempo e posição  $y(t)$  vs. tempo.

A figura 71 mostra o resultado, considerando-se  $v_{y0}=20$ ,  $y_0=0$ ,  $m=1$  e  $g=-10$ .

Para construir a trajetória do projétil faça:

1.  $\tau$  já está definido. Construa a coluna dos instantes de tempo até a linha 43, com  $\tau=0,1$ ;
2. Em C2 escreva:  $x(\tau)$ ;
3. Em C3 escreva:  $=x_0$ ;
4. Em C4 escreva:  $=C3+movhorizontal!C3*\tau$ ;
5.  $movhorizontal!C3$  é o valor da célula C3 da folha chamada *movhorizontal*. Como a folha *movhorizontal* é a folha de estudo do comportamento das grandezas na horizontal e na coluna C estão os valores da componente horizontal da velocidade, a representação  $movhorizontal!C3$  está associada ao valor da velocidade que preenche a célula C3.
6. Clique em “enter”, selecione C4 e preencha a coluna até a linha 43;
7. Em D2 escreva:  $y(\tau)$ ;



**Figura 71.** – Comportamentos das componentes verticais da velocidade e posição do projétil. Neste caso consideramos desprezível a ação do ar.

8. Em D3 escreva: `=y0`;
9. Em D4 escreva: `=D3+movvertical!C3*tau+(g/2)*tau^2`;
10. `movvertical!C3` é o valor da célula C3 da folha chamada `movvertical`. Como a folha `movvertical` é a folha de estudo do comportamento das grandezas na vertical e na coluna C estão os valores da componente vertical da velocidade, a representação `movhorizontal!C3` está associada ao valor da velocidade que preenche a célula C3;
11. Clique em “enter”, selecione D4 e preencha a coluna até a linha 43;
12. Construa o gráfico: posição  $x(t)$  vs. posição  $y(t)$ .

A figura 72 mostra o resultado, considerando-se:  $v_{x0} = 25$  m/s,  $v_{y0} = 20$  m/s,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ ,  $m = 1$  kg e  $g = -10$  m/s<sup>2</sup>.

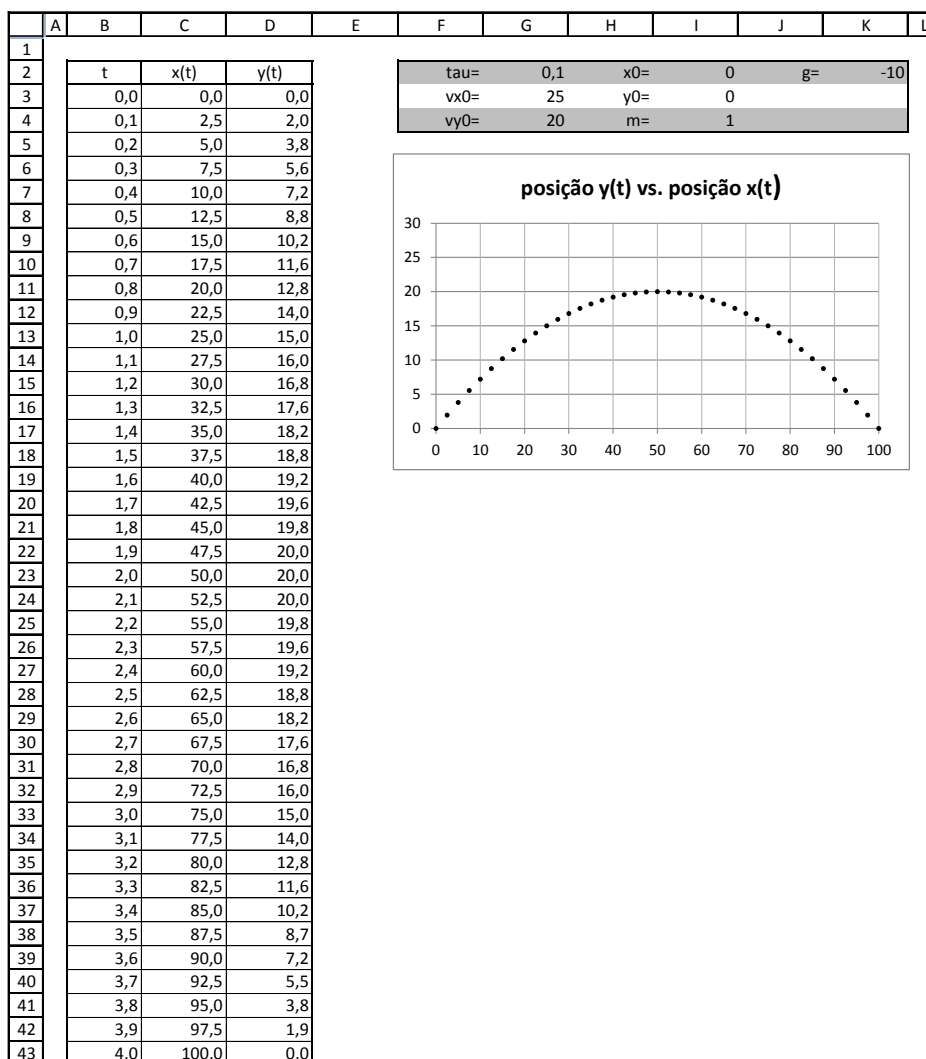


Figura 72. – Trajetória do projétil. Neste caso consideramos desprezível a ação do ar.

## A.6.2 Movimento de projéteis com atrito

A força de arrasto sobre o projétil tem componentes

$$F_{ax(n)} = -b \left( v_{x(n)}^2 + v_{y(n)}^2 \right)^{1/2} v_{x(n)} \quad (\text{A.53})$$

e

$$F_{ay(n)} = -b \left( v_{x(n)}^2 + v_{y(n)}^2 \right)^{1/2} v_{y(n)}. \quad (\text{A.54})$$

Considerando as equações

$$\frac{v_{x(n+1)} + v_{x(n)}}{2} = \frac{(x_{n+1} - x_n)}{\tau} \quad (\text{A.55})$$

e

$$a_{x(n)} = \frac{(v_{x(n+1)} - v_{x(n)})}{\tau}, \quad (\text{A.56})$$

e aplicando a segunda lei de Newton,

$$\left( \sum F \right)_{x(n)} = ma_{x(n)} = -b \left( v_{x(n)}^2 + v_{y(n)}^2 \right)^{1/2} v_{x(n)} \quad (\text{A.57})$$

temos como resultado as equações

$$v_{x(n+1)} = v_{x(n)} - \left[ \left( v_{x(n)}^2 + v_{y(n)}^2 \right)^{1/2} v_{x(n)} \right] \alpha \tau, \quad (\text{A.58})$$

e

$$x_{n+1} = x_n + v_{x(n)} \tau - \left[ \left( v_{x(n)}^2 + v_{y(n)}^2 \right)^{1/2} v_{x(n)} \right] \frac{\alpha}{2} \tau^2. \quad (\text{A.59})$$

Para o estudo do comportamento da grandezas na horizontal faça:

1. Defina  $\tau$  como foi definido nas Seções anteriores;;
2. Defina  $v_{x0}$  (componente horizontal do vetor velocidade inicial): a representação  $\mathbf{vx0}$  em F3 e seu valor em G3;
3. Defina  $v_{y0}$  (componente vertical do vetor velocidade inicial): a representação  $\mathbf{vy0}$  em F4 e seu valor em G4;
4. Defina  $x_0$  (componente horizontal do vetor posição inicial): a representação  $\mathbf{x0}$  em H2 e seu valor em I2;
5. Defina  $y_0$  (componente vertical do vetor posição inicial): a representação  $\mathbf{y0}$  em H3 e seu valor em I3;
6. Defina  $m$ : a representação  $\mathbf{m}$  em H4 e seu valor em I4;
7. Defina  $g$ : a representação  $\mathbf{g}$  em J2 e seu valor em K2;
8. Defina  $\alpha$ : a representação  $\mathbf{alfa1}$  em J3 e seu valor em K3;

9. Construa a coluna dos instantes de tempo até a linha 83, com  $\tau=0,05$ ;
10. Em C2 escreva:  $\mathbf{vx}'(t)$ ;
11. Em C3 escreva:  $=\mathbf{vx}0$ ;
12. Em C4 escreva:  $=\mathbf{C3}-\mathbf{alfa1}*\mathbf{C3}*\mathbf{tau}*(\mathbf{C3}^2+('movvertical\ \mathbf{alfa1}'!\mathbf{C3}^2))^{(1/2)}$ ;
13. Clique em “enter”, selecione C4 e preencha a coluna até a linha 83;
14. Em D2 escreva:  $\mathbf{x}'(t)$ ;
15. Em D3 escreva:  $=\mathbf{x}0$ ;
16. Em D4 escreva:  $=\mathbf{D3}+\mathbf{C3}*\mathbf{tau}-((\mathbf{alfa1}*\mathbf{C3}*(\mathbf{tau}^2))/2)*(\mathbf{C3}^2+('movvertical\ \mathbf{alfa1}'!\mathbf{C3}^2))^{(1/2)}$ ;
17. Clique em “enter”, selecione D4 e preencha a coluna até a linha 83;
18. Construa os gráficos: velocidade  $\mathbf{vx}'(t)$  vs. tempo e posição  $\mathbf{x}'(t)$  vs. tempo.

A figura 73 mostra o resultado, considerando-se  $\mathbf{vx}0 = 25$  m/s,  $\mathbf{vy}0 = 20$  m/s,  $\mathbf{x}0 = 0$ ,  $\mathbf{y}0 = 0$ ,  $m = 0,45$  kg,  $\mathbf{g} = -10$  m/s<sup>2</sup> e  $\mathbf{alfa1} = 0,1$  s<sup>-1</sup>.

Considerando as equações

$$\frac{v_{y(n+1)} + v_{y(n)}}{2} = \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} \quad (\text{A.60})$$

e

$$a_{y(n)} = \frac{v_{y(n+1)} - v_{y(n)}}{\tau} \quad (\text{A.61})$$

e aplicando a segunda lei de Newton,

$$\left(\sum F\right)_{y(n)} = ma_{y(n)} = -m g - b \left(v_{x(n)}^2 + v_{y(n)}^2\right)^{1/2} v_{y(n)} \quad (\text{A.62})$$

temos como resultado as equações

$$v_{y(n+1)} = v_{y(n)} - \left[\left(v_{x(n)}^2 + v_{y(n)}^2\right)^{1/2} v_{y(n)}\right] \alpha \tau - g \tau, \quad (\text{A.63})$$

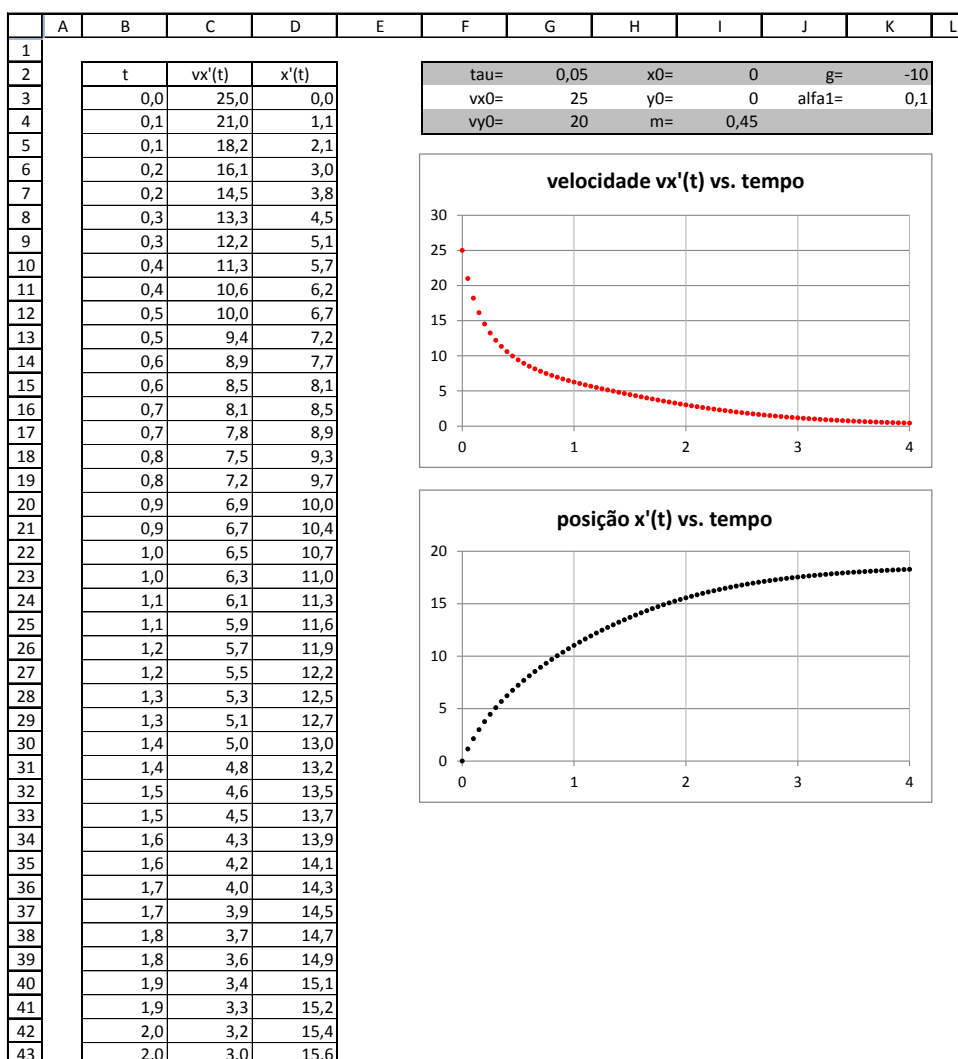
e

$$y_{n+1} = y_n + v_{y(n)} \tau - \left[\left(v_{x(n)}^2 + v_{y(n)}^2\right)^{1/2} v_{y(n)}\right] \frac{\alpha}{2} \tau^2. \quad (\text{A.64})$$

Para o estudo das grandezas na vertical faça:

1.  $\tau$  já está definido. Construa a coluna dos instantes de tempo até a linha 83, com  $\tau=0,05$ ;
2. Todos os parâmetros já estão definidos. Apenas copie o quadro que contém os parâmetros da folha anterior para a que está trabalhando;





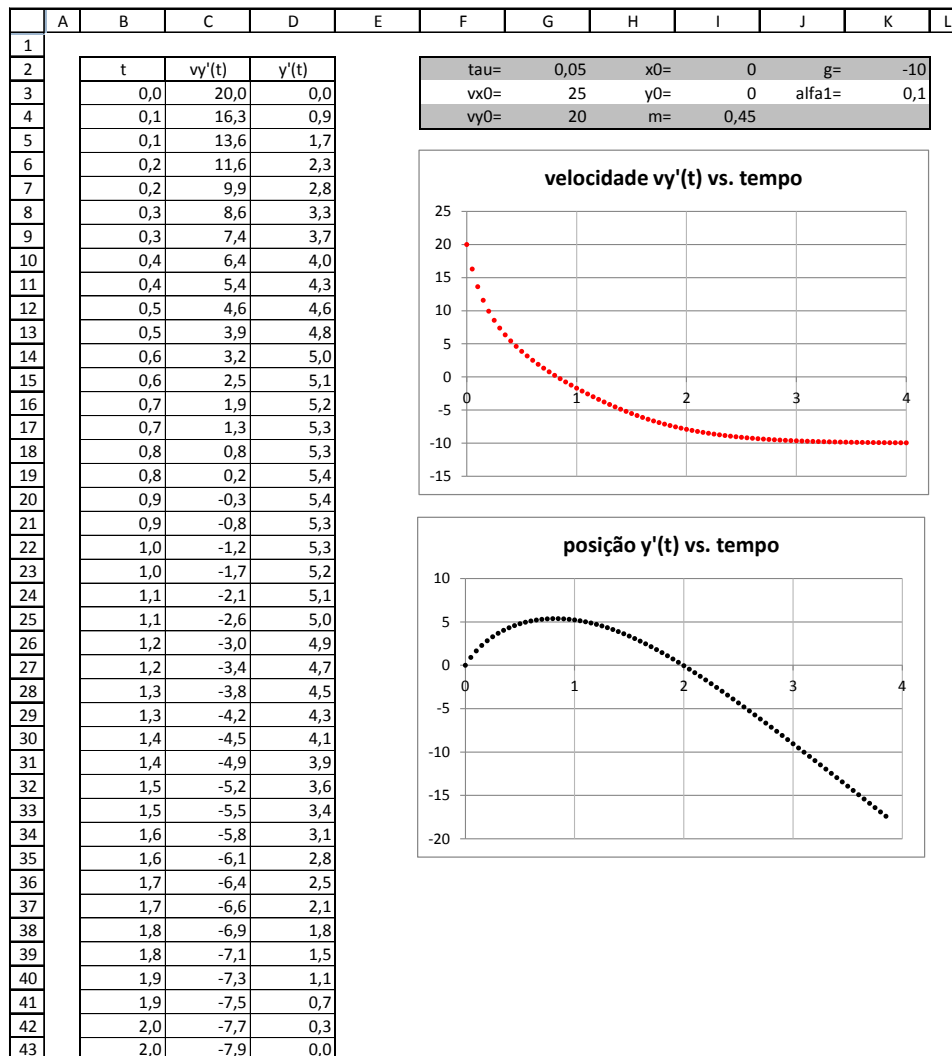
**Figura 73.** – Comportamento das componentes horizontais da velocidade e posição de um projétil em movimento. Neste caso consideramos o atrito:  $\alpha_1 = 0,1$ .

3. Em C2 escreva:  $vy'(t)$ ;
4. Em C3 escreva:  $=vy0$ ;
5. Em C4 escreva:  
 $=C3-alfa1*C3*tau*(C3^2+( 'movhorizontal\ alfa1'!C3)^2)^{(1/2)}+g*tau$ ;
6. Clique em “enter”, selecione C4 e preencha a coluna até a linha 83;
7. Em D2 escreva:  $y'(t)$ ;
8. Em D3 escreva:  $=y0$ ;
9. Em D4 escreva;  
 $=D3+C3*tau-((alfa1*C3*(tau^2))/2)*$   
 $(C3^2+( 'movhorizontal\ alfa1'!C3)^2)^{(1/2)}+(g*(tau^2)/2)$ ;
10. Clique em “enter”, selecione D4 e preencha a coluna até a linha 83;
11. Construa os gráficos: velocidade  $vy'(t)$  vs. tempo e posição  $y'(t)$  vs. tempo.

A figura 74 mostra o resultado, considerando-se  $vx0 = 25$  m/s,  $vy0 = 20$  m/s,  $x0 = 0$ ,  $y0 = 0$ ,  $m = 0,45$  kg,  $g = -10$  m/s<sup>2</sup> e  $alfa1 = 0,1$  s<sup>-1</sup>.

Para construir a trajetória do projétil faça:

1.  $tau$  já está definido. Construa a coluna dos instantes de tempo até a linha 83, com  $tau=0,05$ ;
2. Em C2 escreva:  $x'(t)$ ;
3. Em C3 escreva:  $=x0$ ;
4. Em C4 escreva:  
 $=C4+'movhorizontal\ alfa1'!C4*tau-$   
 $((alfa1*'movhorizontal\ alfa1'!C4*(tau^2))/2)*$   
 $( 'movhorizontal\ alfa1'!C4^2+( 'movvertical\ alfa1'!C4)^2)^{(1/2)}$ ;
5. Clique em “enter”, selecione C4 e preencha a coluna até a linha 83;
6. Em D2 escreva:  $y'(t)$ ;
7. Em D3 escreva:  $=y0$ ;
8. Em D4 escreva;  
 $=D4+'movvertical\ alfa1'!C4*tau-((alfa1*'movvertical\ alfa1'!C4*$   
 $(tau^2))/2)*( 'movvertical\ alfa1'!C4^2+( 'movhorizontal\ alfa1'$   
 $C4)^2)^{(1/2)}+(g*(tau^2)/2)$ ;



**Figura 74.** – Comportamento das componentes vertical da velocidade e posição de um projétil em movimento. Neste caso consideramos o atrito:  $\alpha_1 = 0,1$ .

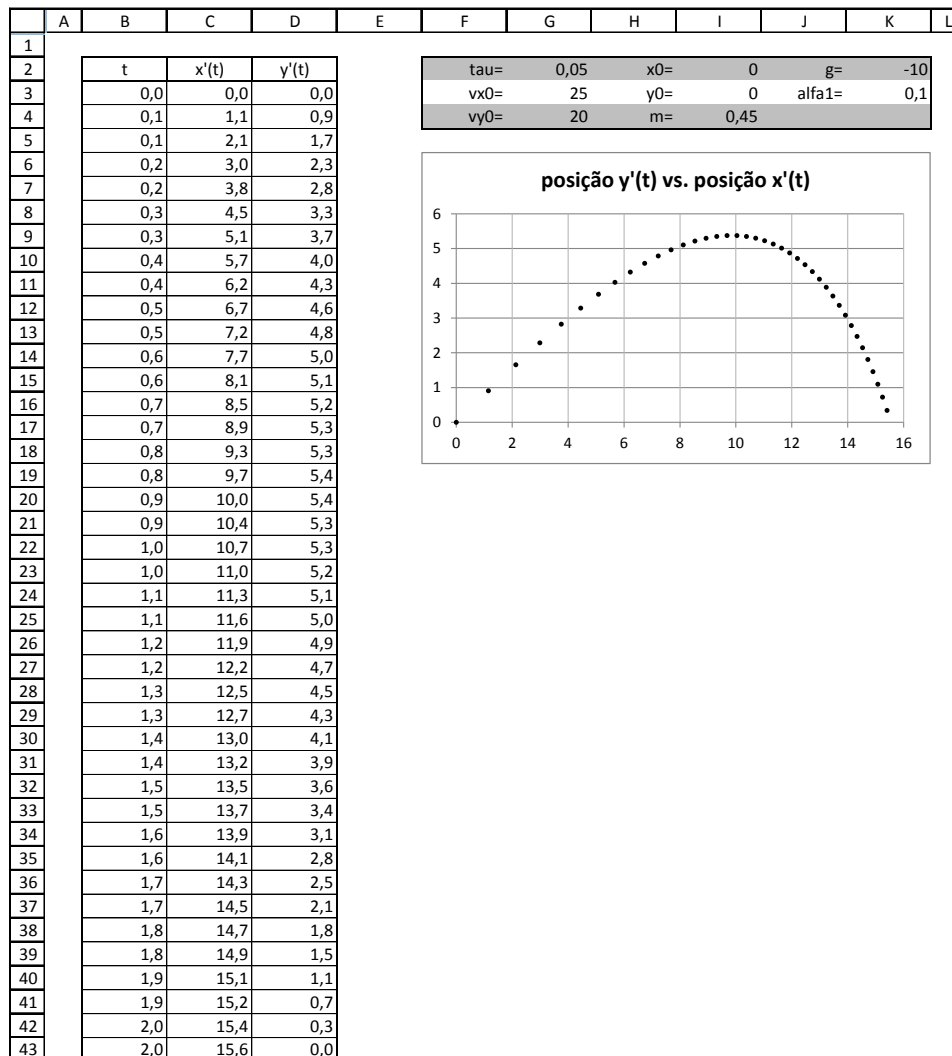
9. Clique em “enter”, selecione D4 e preencha a coluna até a linha 83;
10. Construa o gráfico: posição  $x'(t)$  vs. posição  $y'(t)$ .

A figura 75 mostra o resultado, considerando-se  $v_{x0} = 25$  m/s,  $v_{y0} = 20$  m/s,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ ,  $m = 0,45$  kg,  $g = -10$  m/s<sup>2</sup> e  $\text{alfa1} = 0,1$  s<sup>-1</sup>.

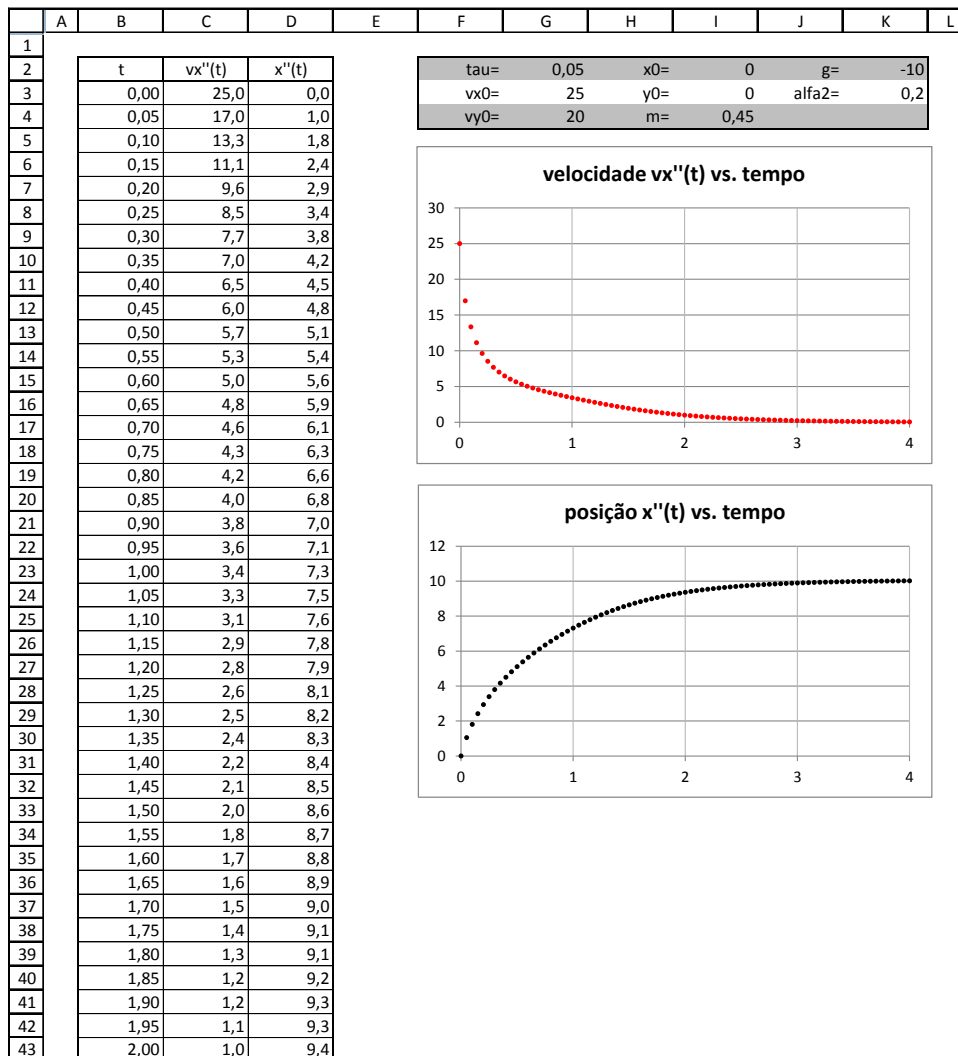
Os últimos três conjuntos de procedimentos nos levaram aos resultados mostrados nas figuras 73, 74 e 75. Ou seja, o estudo do movimento de um projétil que sofre a ação do ar foi separado em três etapas: uma análise do comportamento das componentes horizontais da velocidade e posição, uma análise do comportamento das componentes verticais da velocidade e posição e a construção da trajetória do projétil. Estes mesmos últimos procedimentos podem ser realizados e, então, outros valores do parâmetro alfa podem ser considerados. Assim, teremos mais de uma folha e poderemos fazer comparações entre os resultados obtidos.

Foram repetidos os procedimentos acima e considerados os seguintes valores do parâmetro alfa:  $\text{alfa2} = 0,2$  e  $\text{alfa3} = 0,3$ . Os resultados para  $\text{alfa2}$  são mostrados nas figuras 76, 77 e 78. Nas folhas de trabalho referentes à  $\text{alfa2}$  usamos as representações  $v_x''(t)$  e  $v_y''(t)$  para as componentes da velocidade e a representação  $x''(t)$  e  $y''(t)$  para as componentes da posição. Nas folhas de trabalho referentes à  $\text{alfa3}$  usamos as representações  $v_x'''(t)$  e  $v_y'''(t)$  para as componentes da velocidade e a representação  $x'''(t)$  e  $y'''(t)$  para as componentes da posição.

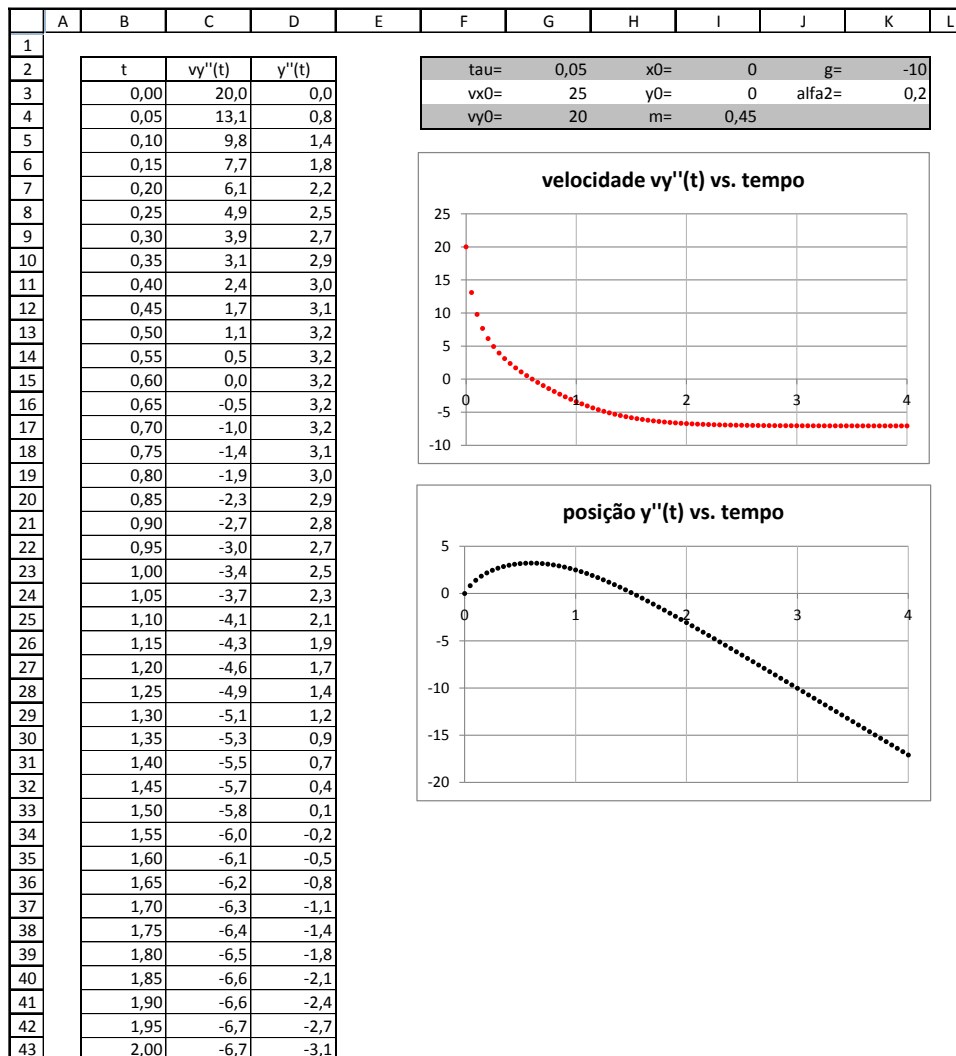
Os resultados para  $\text{alfa3}$  são mostrados nas figuras 79, 80 e 81.



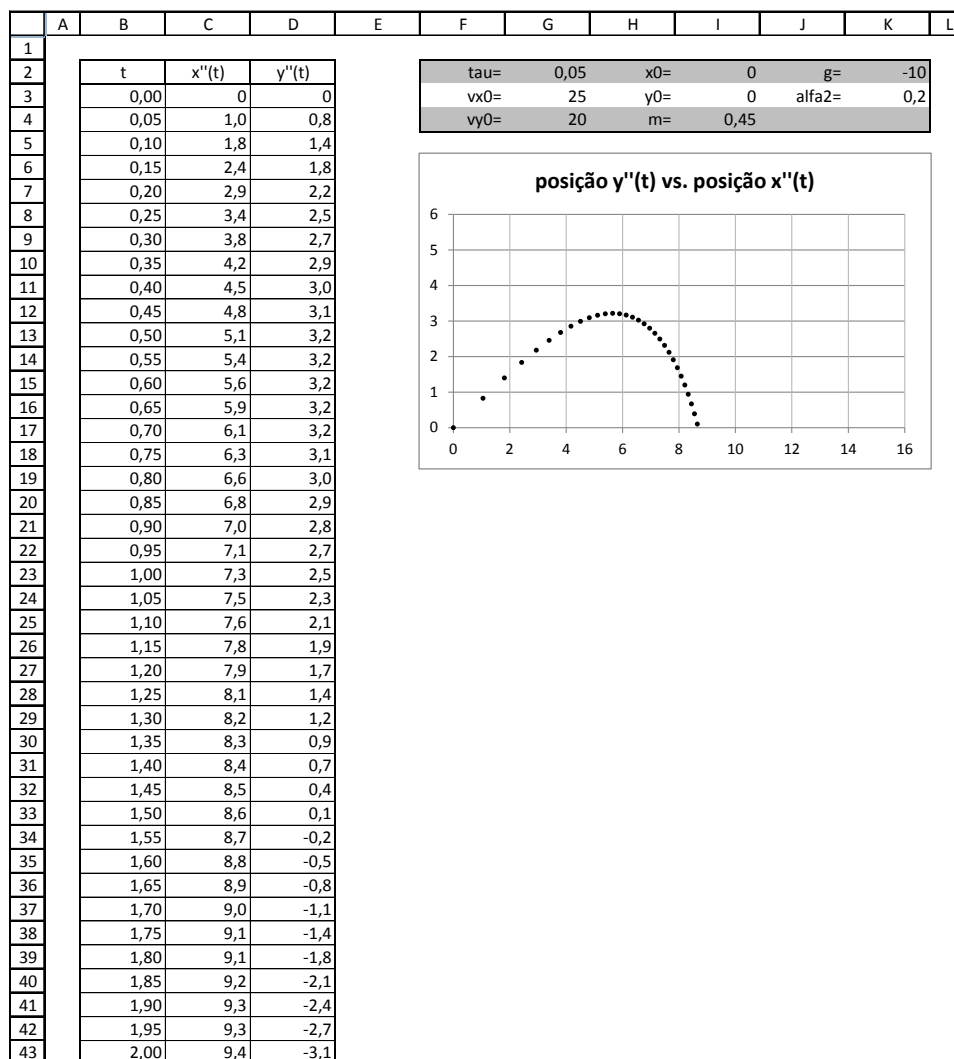
**Figura 75.** – Trajetória de um projétil em movimento. Neste caso consideramos o atrito:  $\alpha_1 = 0,1$ .



**Figura 76.** – Comportamento das componentes horizontais da velocidade e posição de um projétil em movimento. Neste caso consideramos o atrito:  $\alpha_2 = 0,2$ .

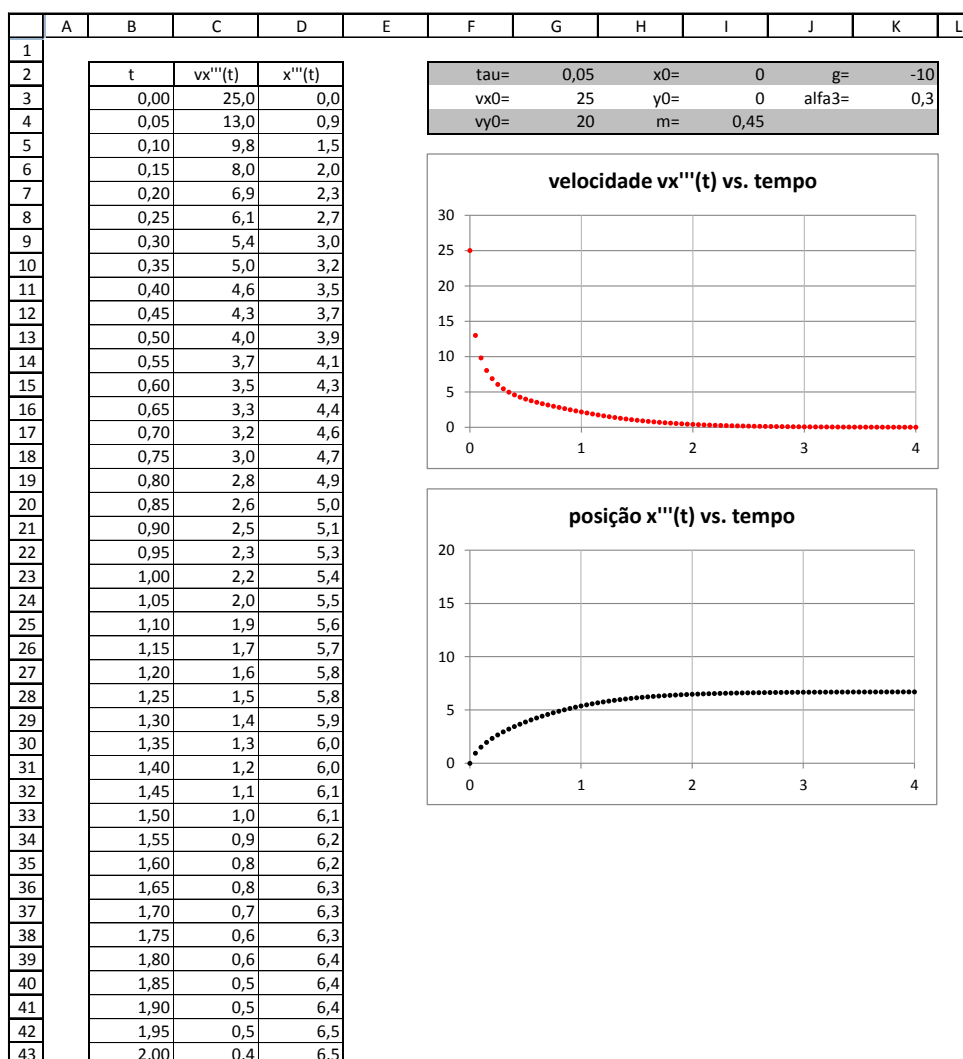


**Figura 77.** – Comportamento das componentes verticais da velocidade e posição de um projétil em movimento. Neste caso consideramos o atrito:  $\alpha_2 = 0,2$ .

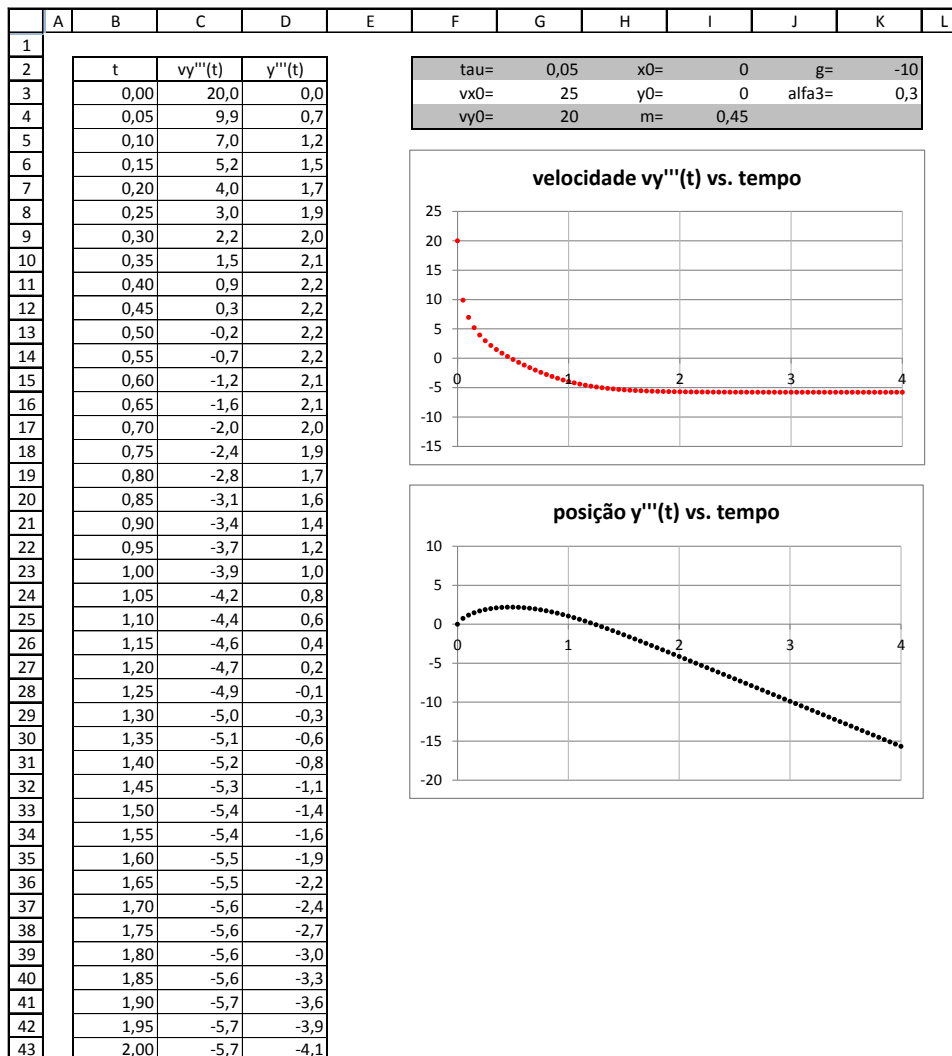


**Figura 78.** – Trajetória de um projétil em movimento. Neste caso consideramos o atrito:  $\alpha_2 = 0,2$ .

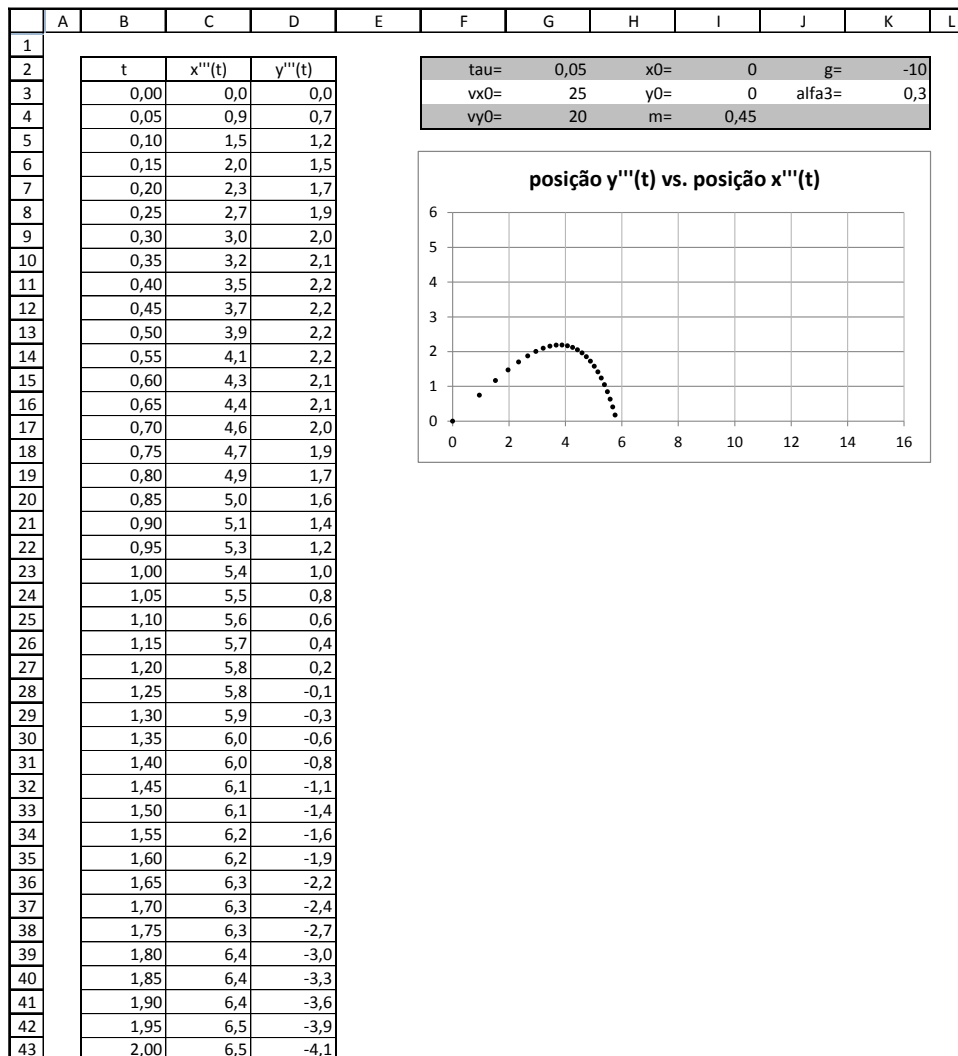




**Figura 79.** – Comportamento das componentes horizontais da velocidade e posição de um projétil em movimento. Neste caso consideramos o atrito:  $\alpha_3 = 0,3$ .



**Figura 80.** – Comportamento das componentes verticais da velocidade e posição de um projétil em movimento. Neste caso consideramos o atrito:  $\alpha_3 = 0,3$ .



**Figura 81.** – Trajetória de um projétil em movimento. Neste caso consideramos o atrito:  $\alpha_3 = 0,3$ .

## A.7 Exercício com oscilador

Neste problema, a força elástica é dada por

$$F_n = -kx_n \quad (\text{A.65})$$

Considerando as equações

$$v_{n+1} = \frac{x_{n+1} - x_n}{\tau} \quad (\text{A.66})$$

e

$$a_n = \frac{v_{n+1} - v_n}{\tau} \quad (\text{A.67})$$

e definindo a frequência angular como

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad (\text{A.68})$$

obtemos como solução as equações

$$v_{n+1} = v_n - \omega^2 x_n \tau \quad (\text{A.69})$$

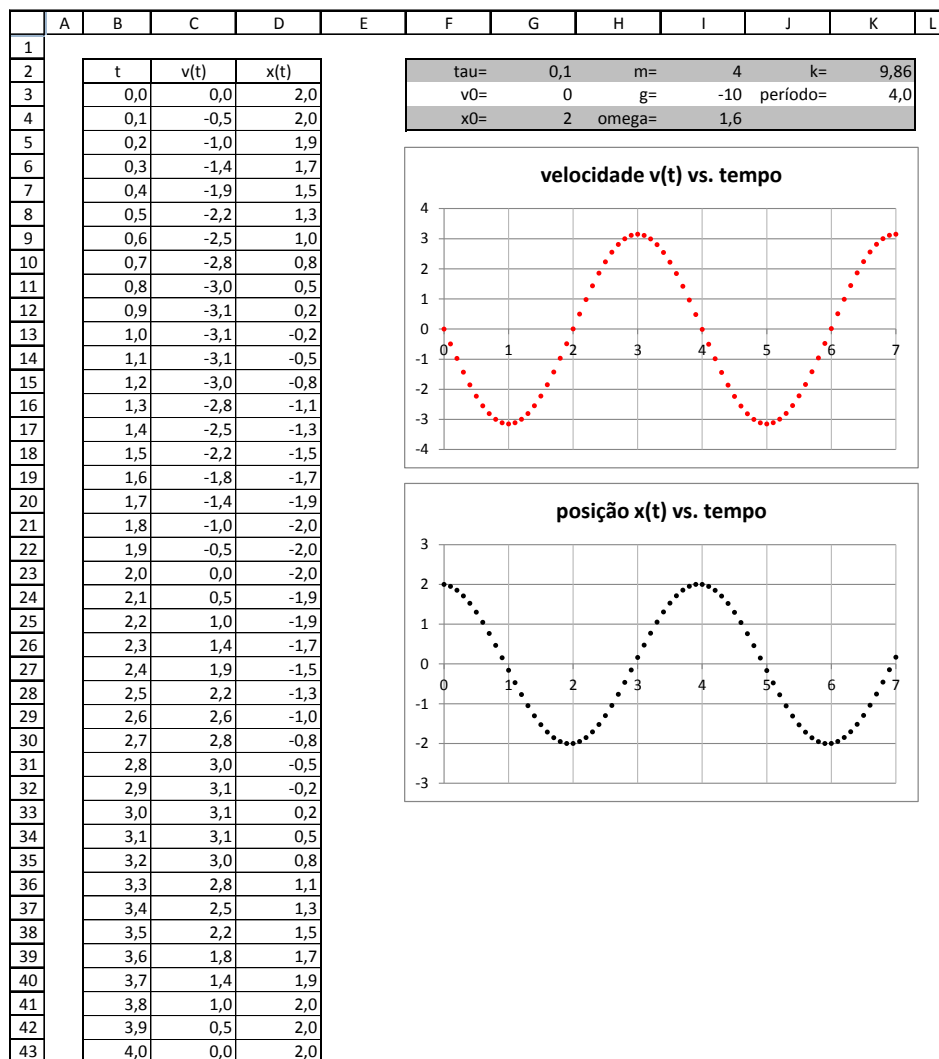
e

$$x_{n+1} = x_n + v_n \tau - \omega^2 x_n \tau^2. \quad (\text{A.70})$$

No Excel faça:

1. Defina  $\tau$ ,  $v_0$ ,  $x_0$ ,  $m$ ,  $g$ ,  $\omega$ ,  $k$  e o período nas mesmas células em que foram definidas na Seção 4;
2. Em I4 escreva:  $=(k/m)^{(1/2)}$ ;
3. Em K3 escreva:  $=2*PI()*((m/k)^{(1/2)})$ ;
4. Construa a coluna dos instantes de tempo até a linha 73, com  $\text{tau}=0,1$ ;
5. Em C2 escreva:  $v(t)$ ;
6. Em C3 escreva:  $=v0$ ;
7. Em C4 escreva:  $=C3-\text{omega}^2*D3*\text{tau}$ ;
8. Clique em “enter”, selecione C4 e preencha a coluna até a linha 73;
9. Em D2 escreva:  $x(t)$ ;
10. Em D3 escreva:  $=x0$ ;
11. Em D4 escreva:  $=D3+C3*\text{tau}-\text{omega}^2*D3*\text{tau}^2$ ;
12. Clique em “enter”, selecione D4 e preencha a coluna até a linha 73;
13. Construa os gráficos: velocidade  $v(t)$  vs. tempo e posição  $x(t)$  vs. tempo.

A figura 82 mostra o resultado obtido, considerando-se  $v_0 = 0$ ,  $x_0 = 2$  m,  $m = 4$  kg e  $k = 9,86$  N/m.



**Figura 82.** – Gráficos da velocidade e posição em função do tempo de um oscilador harmônico simples. Em nosso trabalho esta folha de foi construída para resolver um problema proposto em um livro de ensino médio.

## A.8 Oscilador com atrito cinético

Neste problema consideramos duas forças: A força elástica

$$F_n = -kx_n \quad (\text{A.71})$$

e a força de atrito exercida pela superfície sobre a massa em movimento

$$f_{at} = \mu_c N. \quad (\text{A.72})$$

onde  $N = mg$  é o módulo da força normal exercida pela superfície sobre a massa.

Considerando as equações

$$v_{n+1} = \frac{x_{n+1} - x_n}{\tau} \quad (\text{A.73})$$

e

$$a_n = \frac{v_{n+1} - v_n}{\tau}, \quad (\text{A.74})$$

e aplicando a segunda lei de Newton,

$$\left(\sum F\right)_n = ma_n = -kx_n - \mu_c N, \quad (\text{A.75})$$

obtemos como solução as equações

$$v_{n+1} = v_n - \frac{k}{m}x_n\tau - \mu_c g\tau \quad (\text{A.76})$$

e

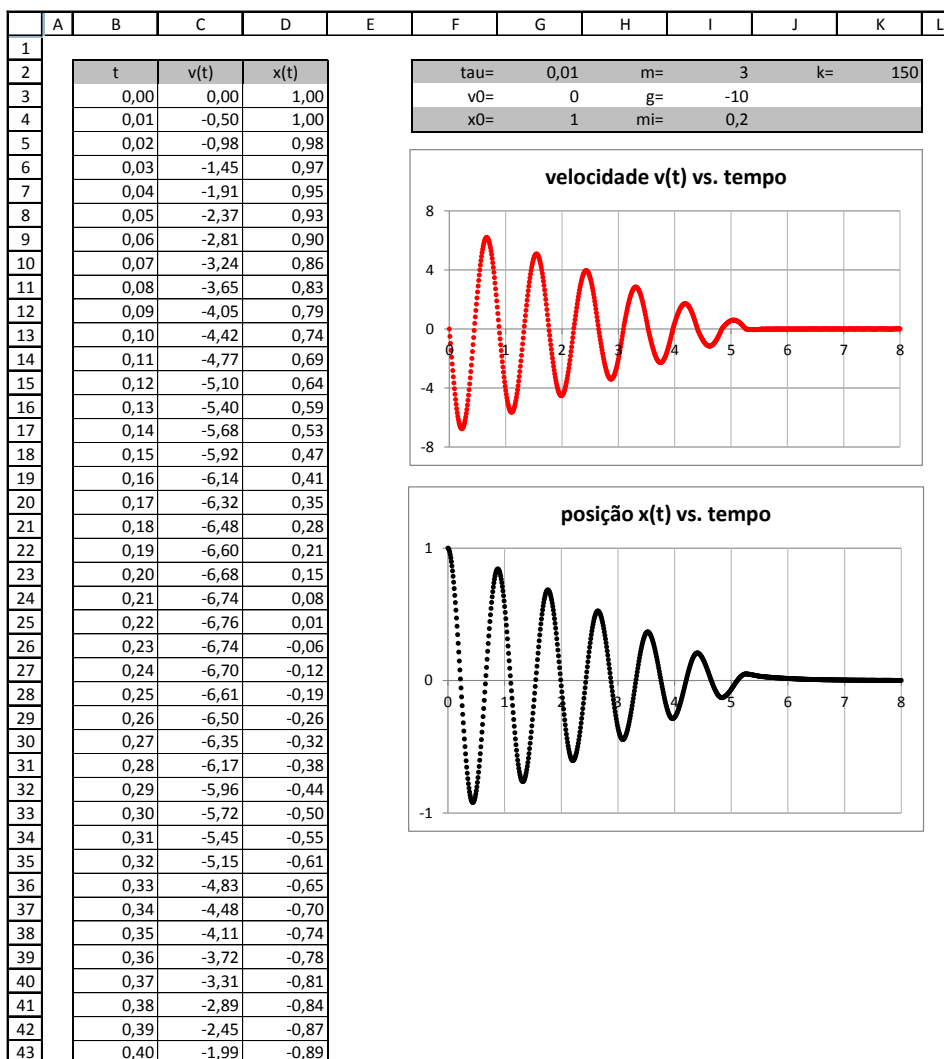
$$x_{n+1} = x_n + v_n\tau - \frac{k}{m}x_n\tau^2 - \mu_c g\tau^2. \quad (\text{A.77})$$

No Excel faça:

1. Defina  $\tau$ ,  $v_0$ ,  $x_0$ ,  $m$ ,  $g$  e  $k$  nas mesmas células em que foram definidas na Seção anterior;
2. Defina  $\mu_c$ : a representação `mi` em H4 e seu valor em I4;
3. Construa a coluna dos instantes de tempo até a linha 803, com `tau=0,01`;
4. Em C2 escreva: `v(t)`;
5. Em C3 escreva: `=v0`;
6. Em C4 escreva:  
`=C3-(k/m)*D3*tau+mi*g*tau*SINAL(C3)`;
7. Clique em “enter”, selecione C4 e preencha a coluna até a linha 803;
8. Em D2 escreva: `x(t)`;
9. Em D3 escreva: `=x0`;

10. Em D4 escreva:  $=D3+C3*\tau-(k/m)*D3*\tau^2-mi*g*\tau^2*SINAL(C3);$
11. Clique em “enter”, selecione D4 e preencha a coluna até a linha 803;
12. Construa os gráficos: velocidade  $v(t)$  vs. tempo e posição  $x(t)$  vs. tempo.

A figura 83 mostra o resultado obtido, considerando-se  $v_0 = 0$ ,  $x_0 = 1$  m,  $g = -10$  m/s<sup>2</sup>,  $m = 3$ kg,  $k = 150$  N/m e  $mi = 0,2$ .



**Figura 83.** – Gráficos da velocidade e posição em função do tempo de um oscilador harmônico submetido a força de atrito cinético.



## A.9 Oscilador amortecido

Neste problema consideramos duas forças: A força elástica

$$F_n = -kx_n \quad (\text{A.78})$$

e a força resistiva proporcional a velocidade da massa em movimento

$$F_{a(n)} = -b v_n. \quad (\text{A.79})$$

Considerando as equações

$$v_{n+1} = \frac{x_{n+1} - x_n}{\tau} \quad (\text{A.80})$$

e

$$a_n = \frac{v_{n+1} - v_n}{\tau}, \quad (\text{A.81})$$

definido a frequência angular

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \quad (\text{A.82})$$

e aplicando a segunda lei de Newton,

$$\left(\sum F\right)_n = m a_n = -k x_n - b v_n, \quad (\text{A.83})$$

obtemos como solução as equações

$$v_{n+1} = v_n - \omega^2 x_n \tau - \frac{b}{m} v_n \tau \quad (\text{A.84})$$

e

$$x_{n+1} = x_n + v_n \tau - \omega^2 x_n \tau^2 - \frac{b}{m} v_n \tau^2. \quad (\text{A.85})$$

No Excel faça:

1. Defina  $\tau$ ,  $v_0$ ,  $x_0$ ,  $m$ ,  $g$  e  $k$  nas mesmas células em que foram definidas na Seção anterior;
2. Defina o coeficiente de resistividade  $b$ : a representação **b** em H4 e seu valor em I4;
3. Defina  $\omega$ ; a representação **omega** em J3 e seu valor em K3;
4. Em K3 escreva:  $=(k/m)^(1/2)$ ;
5. Defina o período: a representação **período** em J4 e seu valor em K4;
6. Em K4 escreva:  $=2*PI()*((m/k)^(1/2))$ ;
7. Construa a coluna dos instantes de tempo até a linha 603, com  $\tau=0,01$ ;
8. Em C2 escreva: **v(t)**;
9. Em C3 escreva: **=v0**;

10. Em C4 escreva:  $=C3-\omega^2*D3*\tau-(b/m)*C3*\tau;$
11. Clique em “enter”, selecione C4 e preencha a coluna até a linha 603;
12. Em D2 escreva:  $x(t);$
13. Em D3 escreva:  $=x0;$
14. Em D4 escreva;  $=D3+C3*\tau-\omega^2*D3*\tau^2-(b/m)*C3*\tau^2;$
15. Clique em “enter”, selecione D4 e preencha a coluna até a linha 603;
16. Construa os gráficos: velocidade  $v(t)$  vs. tempo e posição  $x(t)$  vs. tempo.

A figura 84 mostra o resultado obtido, considerando-se  $v_0 = 0$ ,  $x_0 = 2$  cm,  $m = 2$  kg,  $g = -10$  m/s<sup>2</sup>,  $b = 2$  Ns/m e  $k = 100$  N/m.

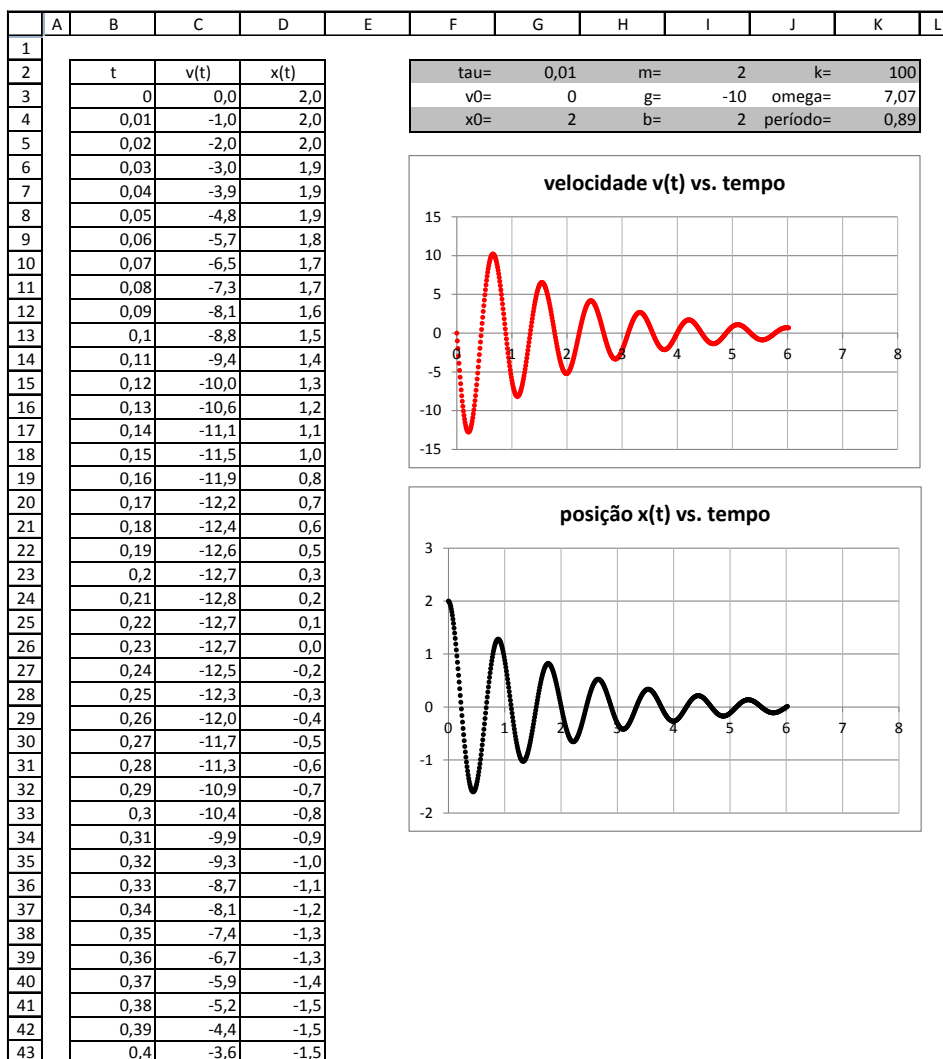


Figura 84. – Gráficos da velocidade e posição em função do tempo de um oscilador harmônico amortecido.

## A.10 Oscilador em duas dimensões

Neste problema temos que considerar as componentes horizontal e vertical da força elástica. A força elástica é dada por

$$\vec{F}_{en} = -k(L_n - L_0)\hat{L}, \quad (\text{A.86})$$

onde  $L_0$  e  $\hat{L}$  são o comprimento da mola relaxada e o vetor unitário na direção da distensão da mola, respectivamente. O comprimento  $L_n$  da mola é dado por

$$L_n = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}. \quad (\text{A.87})$$

As componentes da força elástica são

$$F_{ex(n)} = -k \left( x_n - \frac{L_0}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} \right) \quad (\text{A.88})$$

e

$$F_{ey(n)} = -k \left( y_n - \frac{L_0}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} \right). \quad (\text{A.89})$$

Consideramos as equações

$$\vec{v}_{n+1} = \frac{\vec{r}_{n+1} - \vec{r}_n}{\tau} \quad (\text{A.90})$$

e

$$\vec{a}_n = \frac{\vec{v}_{n+1} - \vec{v}_n}{\tau} \quad (\text{A.91})$$

Construímos três folhas de trabalho para este problema. A primeira para analisar o comportamento das componentes horizontais da velocidade e da posição em função do tempo, a segunda para analisar o comportamento das componentes verticais da velocidade e da posição em função do tempo e a terceira para construir a trajetória da massa presa à mola.

Aplicando a segunda lei de Newton, as soluções para a folha referente ao movimento na horizontal são:

$$v_{x(n+1)} = v_{x(n)} + \frac{k}{m} \left[ \frac{L_0}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} - 1 \right] x_n \tau \quad (\text{A.92})$$

e

$$x_{n+1} = x_n + v_{x(n)} \tau + \frac{k}{m} \left[ \frac{L_0}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} - 1 \right] x_n \tau^2. \quad (\text{A.93})$$

As soluções para a folha referente ao movimento na vertical são:

$$v_{y(n+1)} = v_{y(n)} + \frac{k}{m} \left[ \frac{L_0}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} - 1 \right] y_n \tau - g\tau \quad (\text{A.94})$$

e

$$y_{n+1} = y_n + v_{y(n)} \tau + \frac{k}{m} \left[ \frac{L_0}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} - 1 \right] y_n \tau^2 - g\tau^2. \quad (\text{A.95})$$

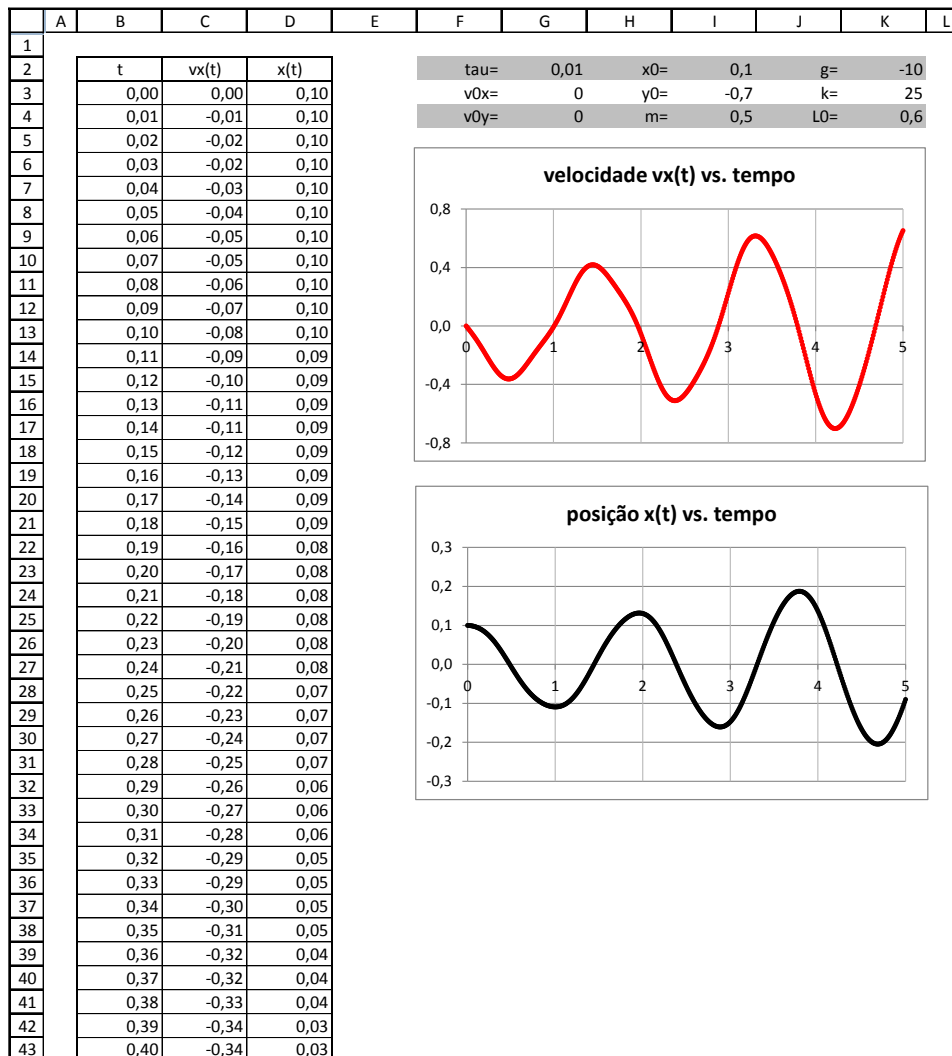
Para gerar a folha de análise do movimento na horizontal no Excel faça:

1. Defina  $\tau$  como nas Seções anteriores;
2. Construa a coluna dos instantes de tempo até a linha 503, com  $\tau=0,01$ ;
3. Defina  $v_0x$  (componente horizontal do vetor velocidade inicial): a representação  $v_0x$  em F3 e seu valor em G3;
4. Defina  $v_0y$  (componente vertical do vetor velocidade inicial): a representação  $v_0y$  em F4 e seu valor em G4;
5. Defina  $x_0$ : a representação  $x_0$  em H2 e seu valor em I2;
6. Defina  $y_0$ : a representação  $y_0$  em H3 e seu valor em I3;
7. Defina  $m$ : a representação  $m$  em H4 e seu valor em I4;
8. Defina  $g$ : a representação  $g$  em J2 e seu valor em K2;
9. Defina  $k$ : a representação  $k$  em J3 e seu valor em K3;
10. Defina  $L_0$ : a representação  $L_0$  em J4 e seu valor em K4;
11. Em C2 escreva:  $vx(t)$ ;
12. Em C3 escreva:  $=v_0x$ ;
13. Em C4 escreva:
 
$$=C3+(k/m)*((L_0*D3/((D3^2)+('comportamento na vertical'!D3^2)))^{(1/2)}-D3)*\tau;$$
14. Clique em “enter”, selecione C4 e preencha a coluna até a linha 503;
15. Em D2 escreva:  $x(t)$ ;
16. Em D3 escreva:  $=x_0$ ;
17. Em D4 escreva:
 
$$=D3+C3*\tau+(k/m)*(L_0*D3/((D3^2)+((('comportamento na vertical'!D3^2))))^{(1/2)}-D3)*\tau^2;$$
18. Clique em “enter”, selecione D4 e preencha a coluna até a linha 503;
19. Construa os gráficos: velocidade  $vx(t)$  vs. tempo e posição  $x(t)$  vs. tempo.

A figura 85 mostra o resultado obtido, considerando-se  $v_0x=0$ ,  $v_0y=0$ ,  $x_0=0,1$ ,  $y_0=-0,7$ ,  $m=0,5$ ,  $g=-10$ ,  $L_0=0,6$  e  $k=25$ .

Para gerar a folha de análise do movimento na vertical no Excel faça:

1. Construa a coluna dos instantes de tempo até a linha 503, com  $\tau=0,01$ ;



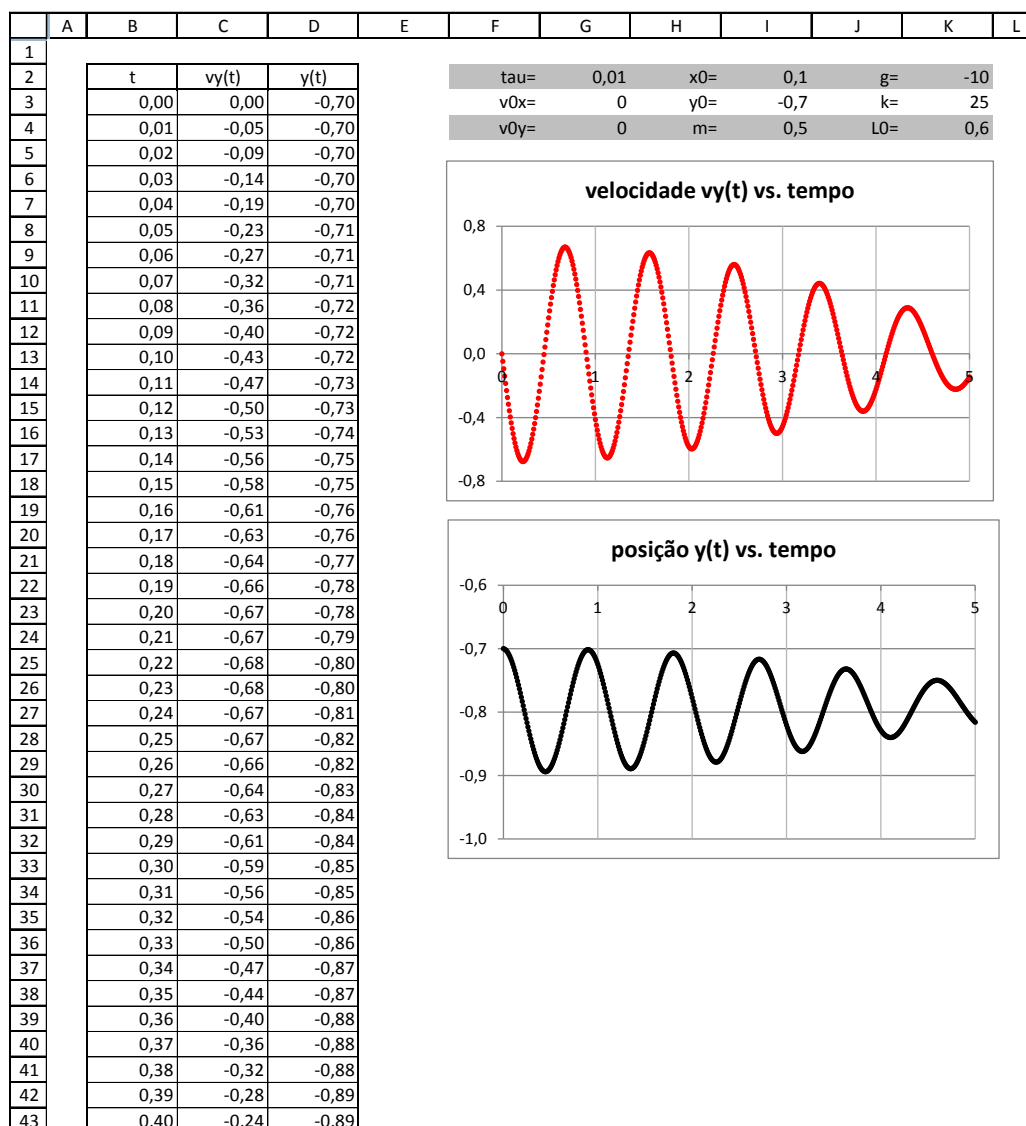
**Figura 85.** – Gráficos das componentes horizontais da velocidade e da posição em função do tempo do problema do oscilador em duas dimensões.

2. Copie o quadro dos parâmetros da folha referente ao movimento na horizontal e cole nesta folha, gerando um quadro idêntico na folha referente ao movimento na vertical;
3. Em C2 escreva:  $v_y(t)$ ;
4. Em C3 escreva:  $=v_0y$ ;
5. Em C4 escreva  
 $=C3+(k/m)*(L0*D3/((((\text{'comportamento na horizontal'}!D3)^2)+$   
 $(D3^2))^{(1/2)})-D3)*\tau+g*\tau$ ;
6. Clique em “enter”, selecione C4 e preencha a coluna até a linha 503;
7. Em D2 escreva:  $y(t)$ ;
8. Em D3 escreva:  $=y_0$ ;
9. Em D4 escreva;  
 $=D3+C3*\tau+(k/m)*((L0*D3/((\text{'comportamento na horizontal'}!D3^2)+$   
 $(D3^2))^{(1/2)})-D3)*\tau^2+g*\tau^2$ ;
10. Clique em “enter”, selecione D4 e preencha a coluna até a linha 503;
11. Construa os gráficos: velocidade  $v_y(t)$  vs. tempo e posição  $y(t)$  vs. tempo.

A figura 86 mostra o resultado obtido, considerando-se  $v_0x=0$ ,  $v_0y=0$ ,  $x_0=0,1$ ,  $y_0=-0,7$ ,  $m=0,5$ ,  $g=-10$ ,  $L_0=0,6$  e  $k=25$ .

Para construir a trajetória da massa presa à mola no Excel faça:

1. Construa a coluna dos instantes de tempo até a linha 503, com  $\tau=0,01$ ;
2. Copie o quadro dos parâmetros da folha referente ao movimento na horizontal e cole nesta folha, gerando um quadro idêntico na folha referente a trajetória da massa;
3. Em C2 escreva:  $x(t)$ ;
4. Em C3 escreva:  $=x_0$ ;
5. Em C4 escreva  
 $=C3+\text{'comportamento na horizontal'}!C3*\tau+(k/m)*$   
 $(L0*C3/((C3^2)+(D3^2)))^{(1/2)}-C3)*\tau^2$ ;
6. Clique em “enter”, selecione C4 e preencha a coluna até a linha 503;
7. Em D2 escreva:  $y(t)$ ;
8. Em D3 escreva:  $=y_0$ ;



**Figura 86.** – Gráficos das componentes verticais da velocidade e da posição em função do tempo do problema do oscilador em duas dimensões.



9. Em D4 escreva;

```
=D3+'comportamento na vertical'!C3*tau+  
(k/m)*(L0*D3/((C3^2)+(D3^2))^(1/2)-D3)*tau^2+g*tau^2;
```

10. Clique em “enter”, selecione D4 e preencha a coluna até a linha 503;

11. Construa o gráfico: posição  $x(t)$  vs. posição  $y(t)$ .

A figura 87 mostra o resultado obtido, considerando-se  $v_{0x} = 0$ ,  $v_{0y} = 0$ ,  $x_0 = 0,1$  m,  $y_0 = -0,7$  m,  $m = 0,5$  kg,  $g = -10$  m/s<sup>2</sup>,  $L_0 = 0,6$  m e  $k = 25$  N/m.

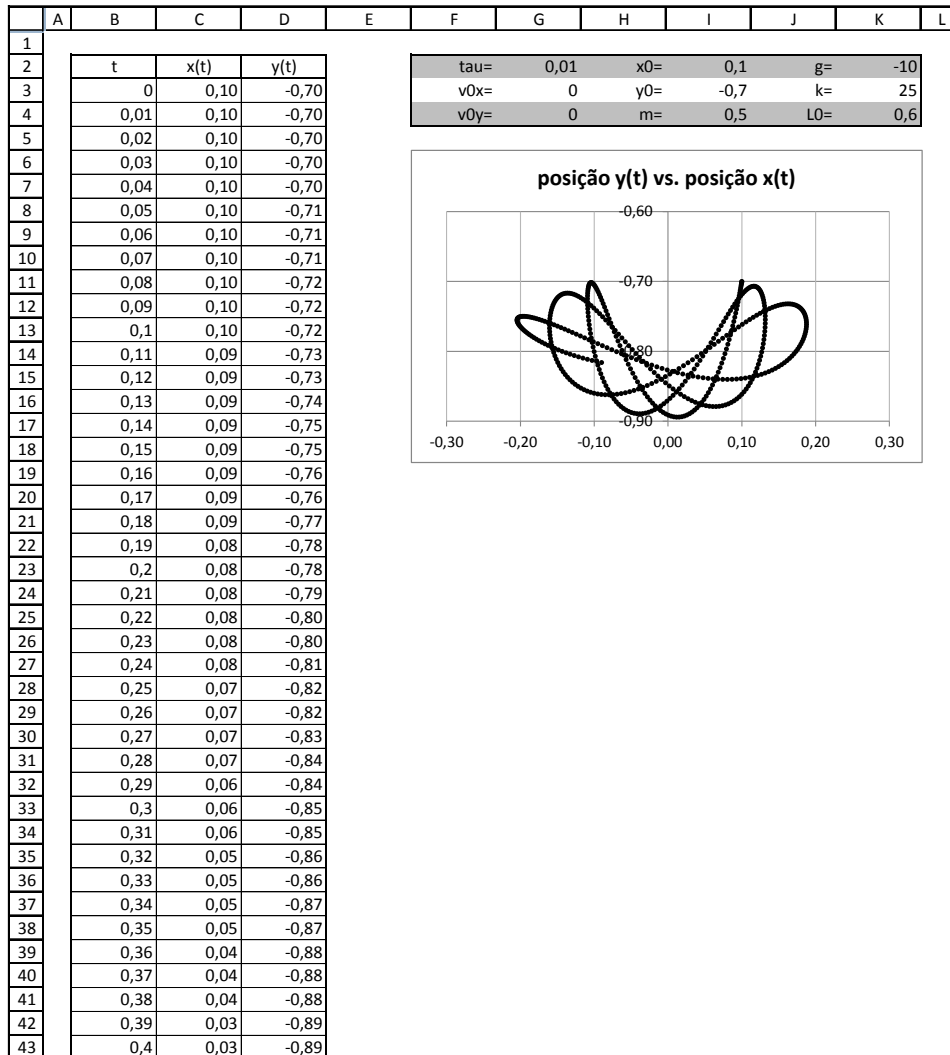


Figura 87. – Trajetória de uma massa presa a uma mola: oscilador em duas dimensões.

## B Números complexos

Podemos representar o número complexo (4.36) em coordenadas polares e constatar que

$$u = |z| \cos \theta$$

e

$$w = |z| \operatorname{sen} \theta.$$

Então, substituindo os resultados acima na relação (4.36), temos

$$z = |z| (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta). \quad (\text{B.1})$$

Da relação (B.1), podemos escrever

$$z^n = |z|^n (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n. \quad (\text{B.2})$$

Calculando o termo  $(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n$ , para  $n = 1, 2, 3, \dots, n$ , temos

$$\begin{aligned} n = 1 & \quad (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^1 = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta \\ n = 2 & \quad (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^2 = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta + 2i \cos \theta \operatorname{sen} \theta \\ & \quad = \cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta, \\ n = 3 & \quad (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^2 (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = (\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta) (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta), \\ & \quad = \cos \theta \cos 2\theta - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} 2\theta \\ & \quad \quad + i(\cos 2\theta \operatorname{sen} \theta + \cos \theta \operatorname{sen} 2\theta) \\ & \quad = \cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta, \\ n = 4 & \quad (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^3 (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = (\cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta) (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta), \\ & \quad = \cos \theta \cos 3\theta - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} 3\theta \\ & \quad \quad + i(\cos 3\theta \operatorname{sen} \theta + \cos \theta \operatorname{sen} 3\theta) \\ & \quad = \cos 4\theta + i \operatorname{sen} 4\theta, \\ & \quad \vdots \\ & \quad \vdots \\ n = n & \quad (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos (n\theta) + i \operatorname{sen} (n\theta). \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Portanto, substituindo o resultado acima na expressão (B.2), temos

$$z^n = |z|^n (\cos (n\theta) + i \operatorname{sen} (n\theta)). \quad (\text{B.4})$$

### Limites

Apesar de as regras de cálculo de limites de funções não serem estudadas no Ensino Médio, nesta seção abordaremos alguns resultados de limites de funções muito comuns em

cálculo, especialmente quando se resolve problemas de movimento. As relações de limite abaixo não serão demonstradas:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad (\text{B.5})$$

onde  $e$  é chamado de número de Euler. Na Seção 4.3 (Queda com atrito), pode-se observar que nas soluções obtidas aparece o termo  $(1 - \alpha\tau)^n$ . Na seção foi aplicada a expansão binomial para analisar os resultados quando  $\alpha$  é muito pequeno, em uma medida que o torna desprezível. Agora, vamos usar a relação de limite (B.5) para analisar o resultado quando  $\tau$  tende para zero. O binômio  $(1 - \alpha\tau)^n$  pode ser escrito de outra forma equivalente, considerando-se a equação (3.6):

$$(1 - \alpha\tau)^n = \left(1 - \alpha \frac{t_n}{n}\right)^n = \left[1 - (\alpha t_n) \left(\frac{1}{n}\right)\right]^n.$$

Observe que para um instante  $t$  fixo, quando  $\tau$  tende para zero  $n$  tende para  $\infty$ . Assim, aplicando o limite (B.5), temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + (-\alpha t) \left(\frac{1}{n}\right)\right]^n = e^{-\alpha t}.$$

Em palavras, quando  $\tau$  tende para zero o binômio  $(1 - \alpha\tau)^n$  tende para  $e^{-\alpha t}$ . Nesta situação, temos  $t_{n+1} = t_n = t$ . Observe ainda que quando  $\tau$  tende para zero os termos  $(1 - \alpha\tau)$ , na (4.18), e  $\beta = (1 - \alpha\tau/2)$ , na (4.20), tendem para 1. Desta forma, pode-se reescrever as equações (4.18) e (4.20)

$$x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{(g + \alpha v_0)}{\alpha^2} \left[ (e^{-\alpha t} - 1) + \alpha t \right],$$

que corresponde a solução contínua do mesmo problema.

As equações (4.46) e (4.61) diferem pelo termo  $\left[\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}\right]^n$ . Quando  $\tau$  tende para zero, temos

$$\left[\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}\right]^n = \left[1 + (\omega\tau)^2\right]^{\frac{n}{2}}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + (\omega\tau)^2\right]^{\frac{n}{2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left(1 + (\omega\tau)^2\right)^n \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + (\omega\tau)^2\right]^n \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \omega^2 t^2 \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \right]^{\frac{1}{2n}} \\ &= \left(e^{\omega^2 t^2}\right)^{\frac{1}{2n}} \\ &= 1, \end{aligned}$$

pois  $n \rightarrow \infty$ . Então, podemos concluir que tanto a equação (4.46) quanto a equação (4.61) tendem para a solução contínua do mesmo problema quando  $\tau$  tende para zero,

pois, quando  $\tau$  tende para zero a frequência angular discreta  $\omega_d$  que aparece nas equações tende para  $\omega = \sqrt{k/m}$ . Aplicando as regras de cálculo de limites

$$\lim_{x \rightarrow 0} c = c \quad (c = \text{constante})$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(cx)}{x} = c$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 0} \omega_d &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \arctan(\omega\tau) \\ \omega_d &= \omega \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 0} \omega_d &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \arctan\left(\frac{4\omega\tau}{4 - \omega^2\tau^2}\right) \\ \omega_d &= \omega. \end{aligned}$$