UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Física
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física
Mestrado Profissional em Ensino de Física

O Paradoxo de Galileu e suas Variações

Mariana Faria Brito Francisquini

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Orientadores:
Alexandre Carlos Tort
Vitorvani Soares

Rio de Janeiro
Junho de 2015

O Paradoxo de Galileu e suas Variações

Mariana Faria Brito Francisquini

Orientadores:
Alexandre Carlos Tort
Vitorvani Soares

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Aprovada por:

Prof. Dr. Alexandre Carlos Tort (Presidente)

Prof. Dr. Carlos Eduardo Aguiar

Prof. Dr. Roberto Affonso Pimentel Júnior

Rio de Janeiro
Junho de 2015

FICHA CATALOGRÁFICA

F814p Francisquini, Mariana Faria Brito

O Paradoxo de Galileu e suas variações / Mariana Faria Brito Francisquini. – Rio de Janeiro: UFRJ/IF, 2015.

viii, 74 f. : il. ; 30 cm.

Orientadores: Alexandre Carlos Tort; Vitorvani Soares.

Dissertação (mestrado) – UFRJ / Instituto de Física / Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, 2015.

Referências Bibliográficas: f. 73-74.

1. Ensino de Física. 2. Cinemática. 3. Paradoxo de Galileu. I. Alexandre Carlos Tort. II. Vitorvani Soares. III. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Física, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física. IV. O Paradoxo de Galileu e suas variações.

A todos que contribuíram de alguma
forma para a execução deste trabalho

Agradecimentos

À minha família por todos os votos de confiança sempre dados a mim.

Aos meus caros companheiros de mestrado, com os quais muito aprendi, pelas inúmeras discussões desde as mais bobas (que até davam um *paper*) até as mais sérias e nem sempre tão amistosas.

À *Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze* por ter permitido a utilização dos manuscritos de Galileu neste trabalho, em especial à *Dra. Francesca Gallori* pela presteza nesta tramitação.

Aos caríssimos professores do Mestrado Profissional em Ensino de Física por terem, mais uma vez, me presenteado com suas maravilhosas aulas (e com suas não-tão-maravilhosas provas).

Ao Filipe Santos cujas discussões foram centrais para o desenvolvimento desta dissertação. Além disso, agradeço-lhe por ter gentilmente nos disponibilizado uma das câmeras utilizadas ao longo deste trabalho.

Ao IFRJ de Nilópolis por ter cedido o espaço para as filmagens.

Aos professores Carlos Eduardo Aguiar e Roberto Affonso Pimentel por suas valiosas sugestões ao longo da redação deste trabalho e por terem gentilmente concordado em fazer parte da banca desta dissertação.

Ao orientador Vitorvani Soares pelas muitas discussões sobre o tema e pela dedicação dispensada a mim durante esta jornada.

E por último, mas não menos importante, ao meu orientador Alexandre Tort por ter caminhado ao meu lado neste trabalho mesmo quando sua saúde tentou impedi-lo. Sou muito grata a você por tudo, desde as conversas fiadas na sua sala até os puxões de orelha pela demora na entrega desta dissertação.

RESUMO

O Paradoxo de Galileu e suas Variações

Mariana Faria Brito Francisquini

Orientadores:
Alexandre Carlos Tort
Vitorvani Soares

Resumo da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

O estudo dos movimentos é reconhecidamente uma parte da física pouco atrativa a maioria dos alunos. Ironicamente, este é o primeiro contato que estes têm com esta ciência. Embora seu domínio e história sejam repletos de detalhes e discussões de alto valor pedagógico, os alunos são quase que instantaneamente expostos a problemas abstratos que exigem apenas a manipulação algébrica de fórmulas. Além disso, a ausência de situações concretas neste estudo, só acaba acentuando as inúmeras dificuldades conceituais que os alunos demonstram ter. Este trabalho nasceu, de certa forma, com a finalidade de tentar oferecer uma modesta contribuição para a solução de algumas destas dificuldades. Para isto, iremos apresentar a concretização de algumas situações idealizadas por Galileu em seu livro *Duas Novas Ciências*. A exposição dos alunos a estas situações, a nosso ver, fornece ao aluno uma oportunidade de refletir sobre o movimento de queda de corpos em contextos diferentes daqueles nos quais os problemas tradicionais de cinemática são apresentados. Neste trabalho, esperamos apresentar este assunto em cenários desafiadores e conceitualmente ricos.

Palavras chave: Ensino de Física, Cinemática, Paradoxo de Galileu.

Rio de Janeiro
Junho de 2015

ABSTRACT

Galileo's Paradox
and its Variations

Mariana Faria Brito Francisquini

Supervisors:
Alexandre Carlos Tort
Vitorvani Soares

Abstract of master's thesis submitted to Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, in partial fulfillment of the requirements for the degree Mestre em Ensino de Física.

The study of motion is confessedly a part of physics which is not very appealing to most students. Ironically, this is the first glimpse these students have with this science. Although its domain and history are filled with details and discussions of high pedagogical value, students are almost instantly exposed to abstract problems which require only the algebraic manipulation of formulas. Furthermore, the absence of concrete situations in this study ends up reinforcing the countless conceptual difficulties students seem to have. This dissertation was born, in a certain way, in order to try to provide a modest contribution to the solving of some of these difficulties. Therefore, we shall present the concretization of some situations idealized by Galileo in his book *Two New Sciences*. The exposure of students to these situations, in our opinion, provides an opportunity for the students to reflect upon the motion of falling objects in contexts which are different from those in which traditional kinematical problems are presented. In this work, we hope to present this subject in conceptually rich challenging scenarios.

Keywords: Physics education, Kinematics, Galileo's Paradox.

Rio de Janeiro
Junho de 2015

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O ensino da cinemática é, tradicionalmente, o primeiro contato que um aluno de ensino médio tem com a disciplina de física. É por meio deste contato que os estudantes são introduzidos à utilização de modelos físicos para descrever fenômenos. Diante deste panorama, sabemos que a quantidade de novas definições e conceitos a serem apresentados acabam desestimulando nossos alunos ao invés de cativá-los em um primeiro momento. Estudar e compreender os movimentos são, a nosso ver, o primeiro passo a ser tomado para uma compreensão funcional dos modelos físicos. É a partir dos movimentos e de sua mudança que podemos entender como os corpos interagem entre si. Assim, entendemos que a cinemática carrega em si uma quantidade muito rica de conceitos e acreditamos que a compreensão destes (bem como a relação destes conceitos com outros) seja requisito necessário ao entendimento de outras áreas fundamentais do conhecimento físico. Como prosseguir para temas mais densos como, por exemplo, "leis de Newton"se não se sabe bem a diferença entre velocidade e aceleração?

Nessa perspectiva, um dos motivos que inspirou este trabalho foi a tentativa de realizar um projeto que pudesse envolver os alunos ativamente na reflexão dos conceitos cinemáticos a partir da observação de situações concretas. Segundo McDermott [1], "o desenvolvimento da compreensão funcional de um conceito não pode ocorrer sem que os próprios alunos estejam envolvidos no raciocínio necessário ao desenvolvimento e à aplicação destes conceitos"[tradução livre]. Assim sendo, um dos objetivos deste trabalho é fornecer situações concretas com as quais os alunos possam interagir para refletir, discutir e aplicar estes conceitos corretamente.

Outro motivo que serviu de estímulo à produção deste trabalho diz respeito à forma com que a cinemática é abordada em livros-texto do Ensino Médio. Comumente esta parte é tratada como se o conteúdo demandasse apenas a memorização de fórmulas e suas aplicações em situações abstratas. De modo geral, vemos que o ensino da cinemática vem sendo reduzido à resolução de problemas onde o desafio central para o aluno consiste em identificar qual fórmula deve ser utilizada [2]. Acreditamos que a formalização matemática continue sendo parte essencial do pensamento físico, mas esta abordagem não deveria ser priorizada em detrimento de uma melhor compreensão acerca dos conceitos que giram em torno do assunto. Assim, somos solidários ao que prega o PCN+. Acreditamos que deve-se procurar substituir exercícios que envolvam meras manipulações algébricas por situações-problema em que os alunos possam: (i) identificar os conceitos relevantes no problema; (ii) levantar hipóteses sobre a utilização destes e (iii) escolher o melhor caminho para a aplicação destes conceitos em diferentes ocasiões.

Nesta dissertação, entretanto, esperamos um pouco mais do que apenas dar subsídios aos alunos para a resolução funcional de problemas. Esperamos mostrá-los que a física pode ser fonte de beleza. A beleza à qual nos referimos, diz respeito à simplicidade das leis fundamentais da física e ao modo com que inúmeros fenômenos podem ser explicados ao evocarmos alguns de seus conceitos mais básicos. Despertar nos nossos alunos o interesse em enxergar e apreciar as peculiaridades de cada conceito em situações inusitadas é um dos, talvez mais árduos, objetivos deste trabalho. Assim sendo, esta dissertação será apresentada ao longo de seis capítulos que descreveremos brevemente a seguir.

No capítulo 2 será feita uma análise acerca do ensino e aprendizagem de cinemática. A análise baseia-se nos trabalhos de Lilian McDermott e David Trowbridge [3-4] em que alunos ingressantes na Universidade de Washington foram submetidos a entrevistas exploratórias para determinar o nível de entendimento destes em relação à cinemática. Apesar de este estudo ter sido conduzido na Universidade de Washington, acreditamos pela nossa experiência que a análise feita nos trabalhos de McDermott e Trowbridge reproduzem com fidelidade as principais dificuldades encontradas por alunos do Ensino Médio no Brasil.

No capítulo 3 apresentaremos um problema proposto por Galileu acerca do movimento de corpos que deslizam por planos inclinados inscritos em um círculo. Este problema é proposto, inicialmente, no *Terceiro Dia* de seu livro *Duas Novas Ciências* [5]. Na continuidade do capítulo, nós forneceremos uma solução analítica para o problema, bem como apresentaremos uma filmagem feita [6-8] por nós para demonstrar o efeito descrito por Galileu em seu livro.

No capítulo 4 veremos uma consequência direta do resultado apresentado no capítulo 3. Iremos mostrar qual o lugar geométrico de corpos que deslizam ao longo de planos inclinados inscritos em uma circunferência a partir de uma origem comum localizada no topo da circunferência. Mostraremos analiticamente a equação desta curva bem como apresentaremos uma filmagem [9] demonstrativa deste efeito.

No capítulo 5 abordaremos um assunto não explorado por Galileu. Verificaremos o que ocorre com os efeitos dos capítulos 3 e 4 quando levamos em consideração a ação de forças resistivas. Basearemo-nos em um trabalho recentemente publicado a fim de verificar a nova descrição do lugar geométrico ocupado pelos corpos durante seu movimento de queda.

No capítulo 6 serão apresentadas as conclusões deste trabalho.

No Apêndice A apresentaremos os materiais necessários à construção do equipamento utilizado em todas as demonstrações dos capítulos 3, 4 e 5, além de apresentarmos o questionário que foi utilizado em sala de aula antes da observação dos fenômenos dos capítulos 3 e 4.

No Apêndice B trazemos o problema inicialmente proposto por Galileu, em suas próprias palavras, como consta no seu livro *Duas Novas Ciências*. Tentamos, nesse mesmo apêndice, colocar os argumentos geométricos que Galileu utilizou em sua demonstração em uma notação comum aos dias de hoje.

No Apêndice C pode ser encontrada a demonstração de um teorema de grande valor para nós para a resolução das situações propostas.

O presente trabalho foi escrito tendo como referência as publicações [10-13].

Capítulo 2

O ensino da cinemática

Meu objetivo é expor uma ciência muito nova que trata de um tema muito antigo. Talvez nada na natureza seja mais antigo que o movimento...
Galileu Galilei

O movimento orbital de planetas em torno do Sol, as gotas de chuva que caem de nuvens, o sangue que corre em nossas veias, a luz e outras ondas eletromagnéticas que permeiam o universo. Todos os fenômenos citados têm em comum a característica do movimento. Questões ligadas ao movimento de corpos por séculos chamaram a atenção de grandes pensadores como Aristóteles, Galileu Galilei, Newton e até mesmo Albert Einstein. Mas por que a descrição de movimentos é tão importante? Por que grandes sábios como os citados parecem ter se importado tanto com o assunto?

A cinemática estuda o movimento dos corpos sem levar em conta as suas causas. O termo cunhado em 1834 por Ampère em seu trabalho intitulado *Ensaio sobre a filosofia da ciência* advém da palavra grega *kinema*, que significa movimento. A cinemática não é um conjunto de definições aleatórias. Sua complexidade fez com que mesmo os gregos antigos falhassem na tentativa de chegar aos conceitos de velocidade e aceleração, bem como de introduzir a noção de grandezas instantâneas [14].

As ideias por trás da descrição do movimento, nascidas na Antiguidade, só foram aperfeiçoadas a partir do século XIV com os esforços dos Calculadores de Merton[1] assim como os de Nicole Oresme[2]. A partir do século XVII estudos sobre os movimentos tornaram a ganhar importância com as novas definições de Galileu Galilei retratadas em seu livro *Duas Novas Ciências*.

Embora haja uma grande lacuna entre as conjecturas dos gregos antigos e as descobertas feitas pelos pensadores dos séculos XIV e XVII, espera-se, constantemente, que alunos de Ensino Médio as assimilem em poucas horas de explanação sobre o tema. A quantidade de novos conceitos apresentados aos alunos pode ser esmagadora (como posição, deslocamento, instante de tempo, intervalo de tempo, velocidade média, velocidade instantânea, aceleração média) e remeter à ideia de que a cinemática é um conjunto de definições e fórmulas matemáticas utilizadas somente na resolução de problemas. Este tratamento que vem sido dado à cinemática se resume a apresentar problemas numéricos sobre movimentos com os quais os alunos não conseguem relacionar fenômenos de seu cotidiano.

Estes problemas encontrados por alunos no ramo da cinemática é uma constante que pode ser encontrada nos mais variados níveis de instrução e em diversos locais do mundo. Dois trabalhos realizados por David Trowbridge e Lilian MacDermott foram analisados e neles foi relatado o que alunos ingressantes na Universidade de Washington pensavam acerca dos conceitos de velocidade e aceleração. Embora o trabalho realizado por estes autores tenha sido conduzido em alunos vinculados ao ensino superior, entendemos que seus resultados retratam com certa fidelidade o panorama enfrentado por alunos brasileiros do Ensino Médio.

2.1 As concepções de alunos acerca do conceito de velocidade

David Trowbridge e Lilian McDermott em importante trabalho [3] fazem entrevistas exploratórias com alunos ingressantes na Universidade de Washing-

[1] Grupo de matemáticos ativos que atuaram na Universidade de Oxford na primeira metade do século XIV. Este grupo era composto por: Thomas Bradwardine, William Heytesbury, Richard Swineshead, e John Dumbleton.

[2] Intelectual da Universidade de Paris durante o século XIV.

ton acerca de suas concepções sobre o conceito de velocidade. As entrevistas que tiveram duração variando de 20 a 30 minutos foram conduzidas com mais de 300 alunos.

O interesse dos autores nesta pesquisa reside no fato de que certas dificuldades conceituais ocorrem previsivelmente entre alunos nos cursos de física introdutória. Além disso, os autores reconhecem que os conceitos da descrição do movimento permeiam grande parte do currículo destes cursos e consideram que o domínio desta parte seja crítico ao entendimento de quase todas as áreas da física.

Foi utilizado como critério de entendimento de um conceito por parte do aluno como sendo "o grau no qual um indivíduo consegue aplicar o conceito satisfatoriamente quando confrontado com movimentos simples de objetos reais". Embora o aspecto conceitual tenha prevalecido como critério de compreensão, os autores não negam a importância de exames tradicionais. Este critério foi o escolhido porque muitos alunos com bom aproveitamento em exames tradicionais não necessariamente têm um amplo entendimento dos conceitos físicos que estão sendo abordados.

Dentre as tarefas propostas aos alunos durante as entrevistas, escolhemos duas que nos chamaram a atenção.

2.1.1 Tarefa 1 - Comparação de velocidades I

Nesta tarefa [figura 2.1], os alunos são requisitados a observar o movimento de duas bolas que rolam em trilhos paralelos. Os alunos veem os movimentos primeiro separadamente e, em seguida, juntos. Na primeira situação, a bola A se desloca com um movimento uniforme da esquerda para a direita e, na segunda situação, a bola B se desloca no mesmo sentido que a bola A com velocidade de módulo maior que o de A, subindo um plano ligeiramente inclinado.

Quando os movimentos são observados conjuntamente, os alunos veem a bola B ultrapassar a bola A[3], reduzir sua velocidade ao subir a rampa até eventualmente chegar ao repouso e descer o plano em um movimento acele-

[3] A liberação da bola B ocorre alguns instantes após a liberação da bola A

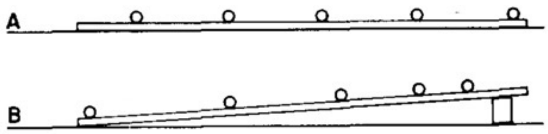


Figura 2.1: Tarefa 1 - o movimento dos pontos materiais ocorrem da esquerda para a direita. Adaptado de [3].

rado passando, novamente, pela bola A, viajando em um sentido contrário ao desta. O gráfico do movimento dos corpos, o qual não foi apresentado aos alunos no curso das entrevistas, pode ser encontrado na figura 2.2.

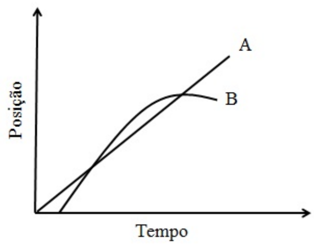


Figura 2.2: Tarefa 1 - gráfico da posição vs. tempo das bolas A e B. Adaptado de [3].

Ao longo da entrevista os alunos eram questionados se estas bolas em algum momento possuíam a mesma velocidade. Os autores verificaram que um número expressivo de alunos identificava, como resposta à pergunta, os instantes em que as bolas possuíam a mesma posição em vez de indicarem os instantes em que elas mantinham uma distância aproximadamente constante uma da outra. A concepção por parte dos alunos de que móveis que ocupam a mesma posição no espaço possuem a mesma velocidade foi explicitada diversas vezes no decorrer da pesquisa dos autores por meio de algumas transcrições das entrevistas.

2.1.2 Tarefa 2 - Comparação de velocidades II

Na continuidade de sua pesquisa, Trowbridge e McDermott novamente demonstram o movimento de duas bolas B e C em trilhos paralelos, como mostra a representação da figura 2.3. A bola B tem o mesmo movimento de antes enquanto a bola C parte do repouso de um ponto à frente da bola B.

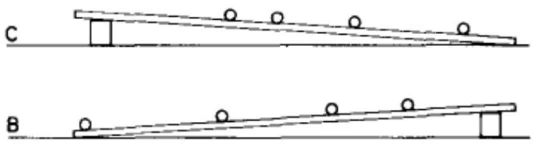


Figura 2.3: Tarefa 2 - o movimento dos pontos materiais ocorrem da esquerda para a direita. Adaptado de [3].

A bola C acelera uniformemente no sentido de inclinação do plano nunca sendo ultrapassada pela bola B, apesar de B iniciar seu movimento com velocidade muito superior a de C, como mostra o gráfico da figura 2.4. Novamente, este gráfico não foi exposto aos alunos.

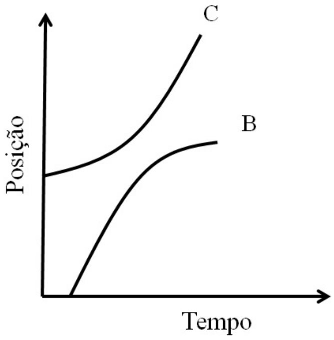


Figura 2.4: Tarefa 2 - gráfico da posição vs. tempo das bolas B e C. Adaptado de [3].

Assim como observado na tarefa 1, os alunos continuaram adotando um critério de posição para comparar velocidades. Estes alegavam que as bolas B e C jamais poderiam ter a mesma velocidade porque a bola B nunca alcançava a bola C. Mesmo quando os estudantes descreviam satisfatoriamente o movimento de B como sendo um movimento em que a velocidade diminui e o de C como sendo um movimento em que a velocidade aumenta, eles não foram capazes de perceber que em um único instante de tempo as velocidades dos corpos deveriam ser exatamente iguais.

2.2 Sobre as concepções de alunos acerca do conceito de aceleração

Em complemento às pesquisas alusivas ao conceito de velocidade, os autores conduziram uma investigação semelhante à anterior com o objetivo de mapear o entendimento dos alunos sobre o conceito de aceleração.

Na pesquisa, que manteve o mesmo padrão da anterior, alunos que já haviam tido algum grau de instrução em cinemática foram expostos novamente às demonstrações descritas nas tarefas 1 e 2. Quando confrontados sobre o movimento dos corpos e questionados sobre as bolas em algum momento terem a mesma aceleração, os alunos foram taxativos quanto à resposta de que “as acelerações são as mesmas quando as velocidades são as mesmas”. Ao investigarem as justificativas do raciocínio dos alunos que conduziu a esta conclusão, os autores concluíram que os alunos não estavam fazendo distinção entre velocidade e variação de velocidade.

Foi proposta aos alunos uma nova tarefa, representada abaixo, em que duas bolas descem dois planos de mesma inclinação, porém com trilhos de espessuras diferentes - o que garante que as acelerações impressas às duas bolas não são as mesmas. A bola A é solta de um ponto mais alto que o ponto onde a bola B inicialmente se encontra.

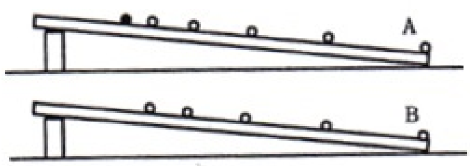


Figura 2.5: Tarefa 1 - Bolas rolando em planos de mesma inclinação. Adaptado de [4].

As bolas rolavam separadamente e, em seguida, os alunos observavam os movimentos das bolas simultaneamente com a finalidade de fazerem a comparação entre os movimentos. A bola A era liberada primeiro e após alguns instantes de movimento, esta acionava um mecanismo que liberava a bola B. Na base do plano ambas as bolas atingem a mesma velocidade final e entravam, juntas, em um túnel.

No andamento do estudo perguntou-se aos alunos se as bolas possuíam a mesma aceleração ou acelerações diferentes. A fim de garantir que a resposta dos alunos não se baseava em detalhes secundários, o entrevistador apontou que a análise dos alunos deveria levar em conta apenas os movimentos observados (não levarem em consideração a causa da aceleração, bem como não fazer suposições sobre o fato de as bolas, trilhos e inclinações serem os mesmos). O gráfico desta demonstração, que novamente não foi exposto aos alunos, pode ser encontrado na figura 2.6.

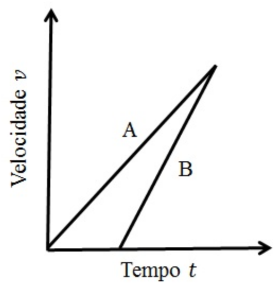


Figura 2.6: gráfico tarefa 1 - A bola B atinge a mesma velocidade final que a bola A em um intervalo de tempo menor. Adaptado de [4]

Os autores, baseado nas respostas dos alunos, puderam montar uma tabela que mostra uma hierarquia da gama de respostas fornecidas por estes, partindo da mais simples até a mais elaborada. A tabela montada pelos autores pode ser encontrada abaixo.

Procedimento	Interpretação do procedimento
1 – As bolas têm mesma aceleração porque as inclinações dos trilhos são as mesmas	Abordagem não cinemática
2 – As bolas têm a mesma ou diferentes acelerações dependendo da posição final relativa entre elas	Confusão entre posição e aceleração
3 – As bolas têm a mesma aceleração porque as velocidades finais são as mesmas	Confusão entre velocidade e aceleração
4 – A bola A tem maior aceleração porque ultrapassa a bola B	
5 – A bola A tem maior aceleração porque percorre maior distância que a bola B no mesmo tempo	
6 – As bolas podem ter mesma aceleração porque a bola A percorre maior distância que a bola B em um intervalo de tempo maior	
7 – A bola B tem maior aceleração porque sua velocidade muda da mesma quantidade que a velocidade de A em uma distância menor	Discriminação entre velocidade e mudança de velocidade negligenciando o intervalo de tempo correspondente
8 – A bola B tem maior aceleração porque sua velocidade alcança aquela de A e assim, varia de uma porção maior	
9 – A bola B tem maior aceleração porque sua velocidade muda de uma quantidade maior que a velocidade de A no mesmo tempo	Compreensão qualitativa da aceleração como sendo a razão $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$
10 – A bola B tem maior aceleração porque sua velocidade muda da mesma quantidade que a velocidade de A em um intervalo de tempo menor	

Figura 2.7: Tabela sobre algumas concepções dos alunos. Adaptado de [4].

2.3 Conclusões sobre as investigações

Nas investigações apresentadas, Trowbridge e McDermott tentaram verificar a habilidade de estudantes em aplicar o conceito de velocidade e aceleração na interpretação de movimentos simples de objetos reais. Os resultados da pesquisa mostraram que grande parte dos alunos utilizou um parâmetro de verificação da posição dos objetos para determinar a velocidade relativa destes. Previsivelmente, os estudantes não obtiveram um bom resultado nos testes sobre aceleração. Os resultados mostraram que muitos alunos cometeram erros ao confundir o conceito de aceleração com outros conceitos como posição, velocidade e variação de velocidade.

A análise feita pelos autores mostra o quanto a instrução convencional pode iludir tanto alunos quanto instrutores, pois estes são levados a acreditar, falsamente, que os alunos entenderam os conceitos abordados. Embora estes alunos pudessem, segundo os autores, fornecer definições aceitáveis dos conceitos de velocidade e de aceleração, estes não os compreendiam bem o suficiente para aplicá-los em problemas reais. A instrução tradicional, segundo McDermott [1], não desafia os alunos a adquirir uma aprendizagem significativa, mas sim tende a reforçar uma percepção sobre a física como uma coleção de fatos e fórmulas. Diante deste panorama, nos perguntamos: o que pode (ou deve) ser feito para que os estudantes se sintam mais motivados com este processo?

Apresentar os conceitos cinemáticos de um modo que despertem o interesse e a curiosidade dos alunos é, certamente, o desafio de muitos professores de física do Ensino Médio. A nosso ver, esta motivação pode começar com a introdução de problemas reais, como as demonstrações feitas por Trowbridge e McDermott em suas pesquisas, ao invés de exercícios numéricos que exigem meras manipulações matemáticas por parte dos alunos. Segundo Arons [14], é essencial engajar a mente do aprendiz no uso concreto do conceito em situações físicas, estando estes conceitos explicitamente conectados com uma experiência visual e sinestésica imediata.

Este trabalho não tem a pretensão de extirpar as inúmeras dificuldades encontradas por alunos e professores quando lidam com o ensino e aprendizagem da cinemática. Esperamos, no entanto, que ele possa servir como uma pequena colaboração em motivar nossos alunos a descobrir um tema tão interessante e fundamental da física. Desta forma, nos próximos capítulos, apresentaremos alguns problemas reais sobre como estes conceitos podem ser abordados em salas de aula do Ensino Médio.

Capítulo 3

O Paradoxo de Galileu

3.1 Introdução

Quando questionada sobre o tempo de queda de dois corpos - soltos simultaneamente a partir do repouso -, é natural que uma pessoa responda que cai em menos tempo aquele que se encontra mais perto do chão. Ou, ainda, aquele que percorre o menor caminho. Mas será que isto sempre é verdade?

Em meados do século XVII, Galileu escreveu o que viria a ser uma de suas obras mais famosas, o livro *Duas novas ciências*[1]. Nesta obra, Galileu revisou e redefiniu alguns conceitos relativos ao movimento de objetos que norteiam os princípios da mecânica. Encontramos no *terceiro dia* de seu livro um trecho que trata de um efeito muito curioso mencionado pela primeira vez a Guidobaldo del Monte em uma carta datada de 1602. Nas palavras de Galileu:

> Se a partir do ponto mais alto ou do ponto mais baixo de um círculo vertical traçarmos planos inclinados que cortam a circunferência, então os tempos de descida de corpos ao longo destes planos serão iguais.

Ou seja, é possível que corpos liberados no mesmo instante de alturas diferentes atinjam o solo ao mesmo tempo. Mas como isto é possível?

[1] As duas novas ciências às quais o título se refere são a resistência dos materiais e o estudo do movimento, ou cinemática.

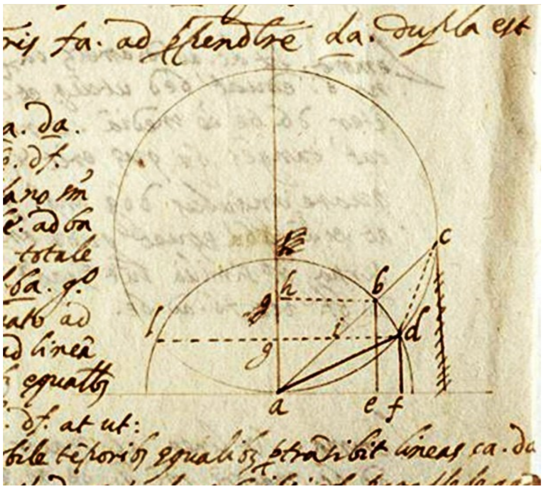


Figura 3.1: Manuscrito de Galileu a respeito da queda de corpos ao longo de planos inclinados inscritos em um círculo.

3.2 Resolução analítica do problema

Vamos dar início à discussão deste problema imaginando um círculo vertical de diâmetro D e duas cordas, BA e EA, de comprimentos D e l, respectivamente [Figura 3.2] por onde partículas poderão deslizar livremente. Podemos mostrar, com a utilização do Teorema de Thales [Apêndice B], que l e D se relacionam por meio da expressão matemática

$$l = D\ \cos(90^{\mathrm{o}} - \theta) = D\ \operatorname{sen}\theta. \tag{3.1}$$

Ao considerarmos dois corpos que deslizem por BA e por EA, simultaneamente, partindo do repouso, sabemos que o corpo a percorrer o diâmetro D está sujeito unicamente à aceleração da gravidade, g. O mesmo não ocorre com o corpo que desliza por EA: o contato com o plano inclinado faz com que sua aceleração seja diferente da aceleração da gravidade.

O módulo da aceleração à qual está submetido o corpo que desliza por EA se relaciona com g pelo mesmo fator com o qual l se relaciona com D, ou seja,

$$a = g\ \operatorname{sen}\theta. \tag{3.2}$$

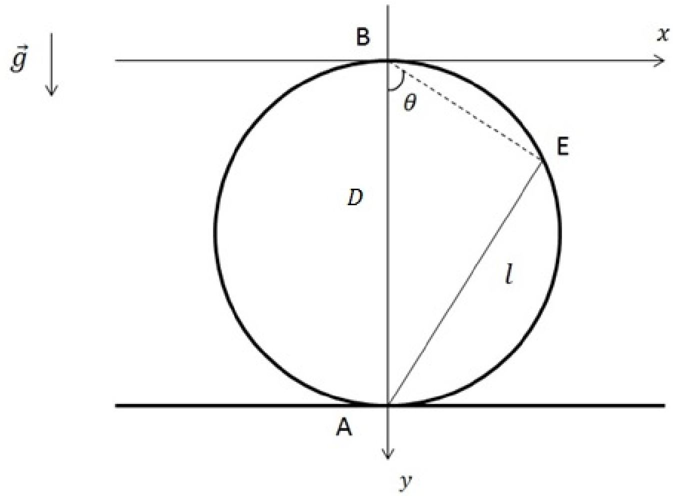


Figura 3.2: Partículas podem deslizar livremente ao longo das cordas BA e EA.

Desprezando-se as forças resistivas, podemos escrever a representação paramétrica da posição, y, da partícula que desliza ao longo do diâmetro da circunferência como

$$y = \frac{at^2}{2}, \tag{3.3}$$

onde t é o instante de tempo, dadas as condições iniciais $y_0 = 0$ e $v_{0y} = 0$. Como a partícula percorre uma trajetória de comprimento igual a D e está sujeita a uma aceleração igual a g, a igualdade (3.3) assume a forma

$$D = \frac{1}{2}gt_D^2, \tag{3.4}$$

em que t_D é o tempo de queda ao longo deste percurso. Consequentemente, podemos escrevê-lo como

$$t_D = \sqrt{\frac{2D}{g}}.$$

Da mesma maneira, para o corpo que desliza livremente por EA, temos que o comprimento, l, deste fio pode ser escrito como

$$l = \frac{1}{2}at_l^2. \tag{3.5}$$

Substituindo-se a igualdade (3.2) no resultado acima, resulta

$$l = \frac{1}{2}g\,\mathrm{sen}(\theta)t_l^2, \tag{3.6}$$

ou seja, podemos escrever o tempo de queda, t_l, do corpo que desliza por EA como sendo

$$t_l = \sqrt{\frac{2l}{g\,\mathrm{sen}\,\theta}}.$$

Aplicando-se a relação (3.1) na equação acima, encontramos facilmente que

$$t_l = \sqrt{\frac{2D\,\mathrm{sen}\,\theta}{g\,\mathrm{sen}\,\theta}}, \tag{3.7}$$

ou seja,

$$t_l = t_D. \tag{3.8}$$

Podemos generalizar o resultado encontrado em nossa demonstração. Já que a escolha do ângulo de inclinação do plano foi feita arbitrariamente, não há motivos para pensarmos que ao mudarmos esta inclinação obteremos uma resposta diferente. Sabemos que o comprimento da corda EA se relaciona com o diâmetro do círculo por um fator igual a $\mathrm{sen}\,\theta$. A aceleração do corpo que desliza por este plano também se relaciona com a aceleração da gravidade pelo mesmo fator. Ao substituirmos estes resultados nas equações paramétricas da posição das partículas, estes termos sempre se cancelam.

Apesar de o resultado acima ter sido obtido facilmente por meio das equações de posição das partículas, Galileu não dispunha destas manipulações algébricas. Galileu chegou a esta mesma conclusão baseando-se em um raciocínio em que fizera uso de razões e proporções e de médias geométricas.

3.3 Filmagem do aparato

A fim de concretizar a idealização de Galileu, montamos um aparato simples que nos permitisse observar os efeitos descritos em *Duas Novas Ciências*. Os materiais e o procedimento de montagem podem ser encontrados no Apêndice A. Com o auxílio deste aparato, um filme demonstrativo deste fenômeno foi feito por nós em outra ocasião e pode ser acessado em [7] [2].

No vídeo, dois corpos de mesma massa, forma e dimensão são postos a deslizar ao longo dos fios que chamamos de BA e EA. O vídeo apresenta duas configurações possíveis para a demonstração: na primeira situação, fazemos o ângulo de inclinação do plano EA igual a 40^o. Na configuração seguinte, muda-se a inclinação deste mesmo plano de modo que esta atinja o valor aproximado de 70^o. Do filme acima, foram extraídos cinco frames de instantes diferentes da queda (ao longo de BA e EA) das duas partículas. Com o auxílio de um programa de edição de vídeos foi feita a superposição destes frames [Figura 3.3].

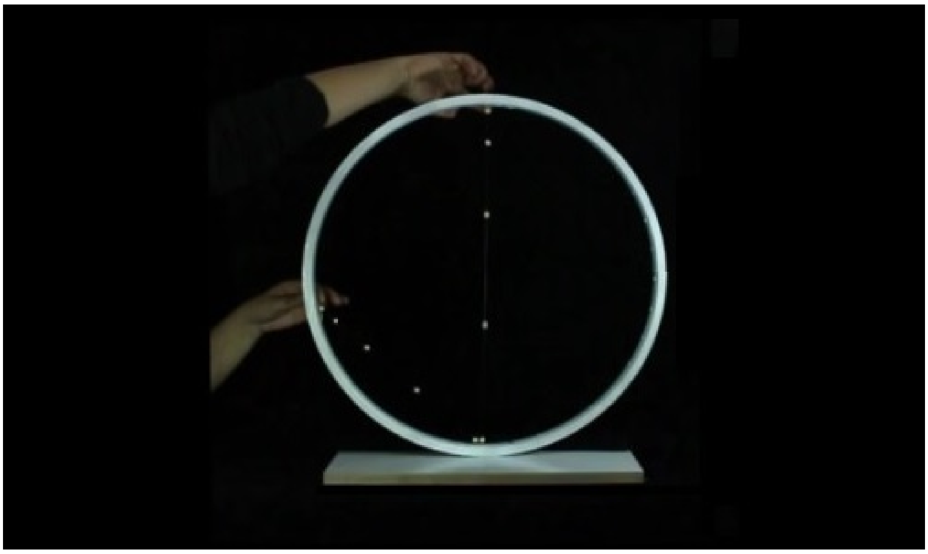


Figura 3.3: Superposição de cinco instantes do movimento de queda de duas partículas.

[2] Versão em inglês, porém com maior resolução de filmagem. Uma versão em português pode ser encontrada em [6].

Uma outra versão deste vídeo pode ser vista em [8]. Nesta configuração, aparentemente mais complexa que a anterior, é inscrito um terceiro plano inclinado [Figura 3.4] ao círculo. A seguir são liberados simultaneamente, a partir do repouso, três corpos ao longo das cordas BF, FA e BA.

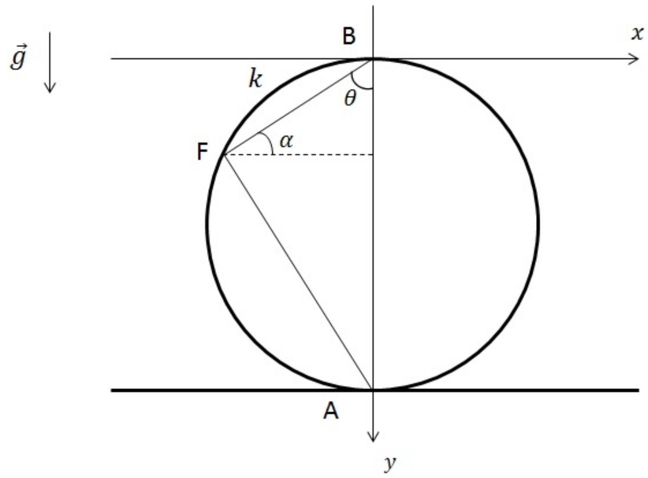


Figura 3.4: Esquema de configuração da nova montagem do aparato.

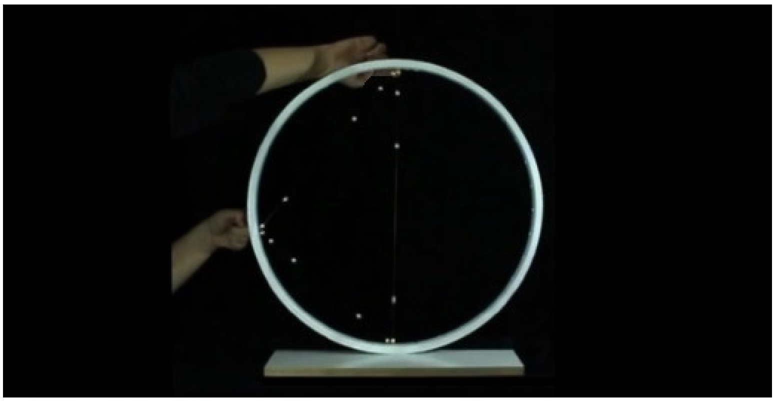


Figura 3.5: Superposição de cinco frames com a nova configuração de montagem.

Para mostrarmos que os tempos de queda ao longo destas cordas são idênticos, basta relacionarmos o comprimento k da corda BF com o comprimento D da corda BA, assim como feito para o caso anterior

$$k = D \ \cos\theta = D \operatorname{sen}\alpha. \tag{3.9}$$

Novamente, o módulo da aceleração à qual está submetido um corpo que desliza por BF pode ser escrito como

$$a_k = g \ \mathrm{sen}\, \alpha. \tag{3.10}$$

Por sua vez, a equação horária da posição de um corpo que desliza por esta corda é

$$k = \frac{1}{2} a_k t_k^2. \tag{3.11}$$

Substituindo-se as equações (3.9) e (3.10) em (3.11), chegamos à conclusão

$$t_k = t_l = t_D. \tag{3.12}$$

O mais intrigante no resultado acima é o fato de que os tempos de queda de quaisquer corpos liberados a partir do repouso ao longo de planos inscritos em uma circunferência[3] são iguais. Isto ocorre devido à geometria do círculo: os comprimentos das cordas por onde passam os corpos sempre se relacionam com o diâmetro do círculo por um fator igual ao seno do ângulo de inclinação do plano. De maneira análoga, as acelerações em cada fio sempre se relacionam com a aceleração da gravidade pelo mesmo fator. Em nossa demonstração, chegamos à conclusão de que estes dois termos sempre se cancelam. Em outras palavras, a diferença de caminho gerada pelo comprimento dos planos inclinados é sempre compensada pela diferença entre as acelerações; embora o corpo que desliza ao longo de qualquer corda inclinada percorra um caminho menor, sua aceleração é, na mesma proporção, menor.

Veremos, nos próximos capítulos, o que ocorre quando tentamos liberar simultaneamente, a partir do repouso e de uma origem comum, diversos corpos ao longo de planos de diferentes inclinações inscritos a uma circunferência. Galileu não só apresentou este novo problema como o resolveu geometricamente em seu livro.

[3]Segundo Galileu, para que ocorra este resultado, os planos que partem do corpo da circunferência não podem cortar o diâmetro desta (Teorema VIII, Proposição VIII de *Duas Novas Ciências*).

Capítulo 4

Galileu e o Círculo de Simultaneidade

4.1 A primeira menção ao círculo de simultaneidade

No Corolário III do Teorema VI, Proposição VI de *Duas Novas Ciências*, Galileu introduz - por meio de um diálogo entre *Sagredo*, *Salviatti* e *Simplício* um interessante problema cinemático. Como dito por *Sagredo*:

> [...] imaginemos [um círculo em] um plano vertical, e a partir de seu ponto mais alto desenhamos linhas inclinadas com todos os ângulos [...] Imaginemos também que partículas pesadas descem por estas linhas com um movimento naturalmente acelerado, e cada uma com uma velocidade apropriada à inclinação de sua linha. Se estas partículas móveis são sempre visíveis, qual será o lugar geométrico de suas posições a cada instante? A resposta a esta pergunta me surpreende, pois sou levado a acreditar, pelos teoremas precedentes, que estas partículas sempre estarão sobre a circunferência de um mesmo círculo, que aumenta com o tempo à medida que as partículas se afastam mais e mais do ponto de onde seu movimento se iniciou.

4.1.1 O círculo de simultaneidade

A fim de demonstrar analiticamente o resultado do raciocínio de *Sagredo*, iremos inicialmente considerar cinco corpos localizados no ponto B [Figura 4.1]. No arranjo proposto cada um dos cinco corpos poderá deslizar livremente ao longo dos planos inscritos à circunferência. Supondo que tais corpos sejam abandonados simultaneamente a partir do repouso, iremos mostrar se o lugar geométrico dos corpos que deslizam ao longo destas cordas é, de fato, um círculo como atestou *Sagredo*.

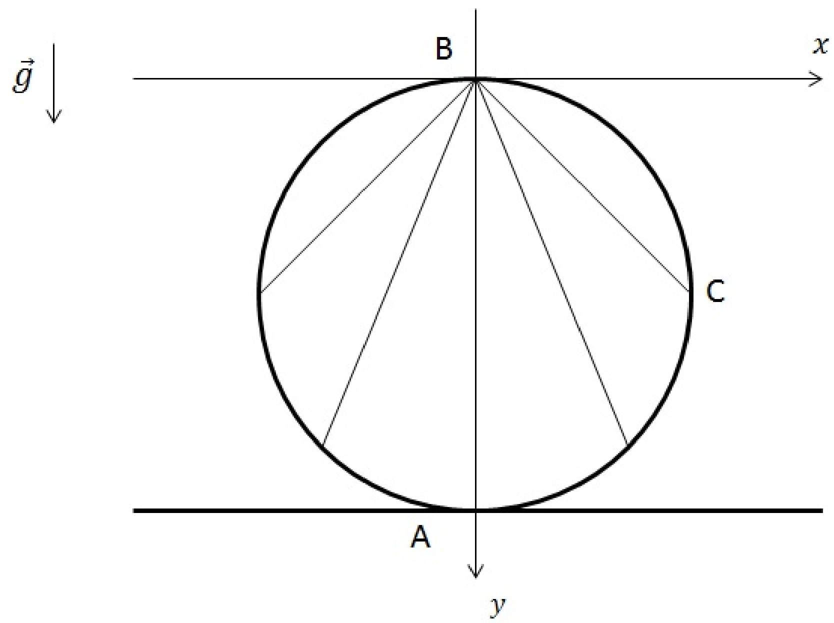


Figura 4.1: Diferentes corpos podem deslizar livremente ao longo dos planos inclinados inscritos na circunferência

Para isto, podemos considerar a queda de apenas um corpo que deslize, digamos, por BC. Se supusermos que a corda BC faz um ângulo θ com o eixo horizontal [Figura4.2], sabemos que a aceleração de quaisquer objetos que deslizem por esta corda é igual a $g \operatorname{sen} \theta$.

A aceleração do objeto nos eixos x e y podem ser escritas como

$$a_x = a \cos \theta \tag{4.1}$$

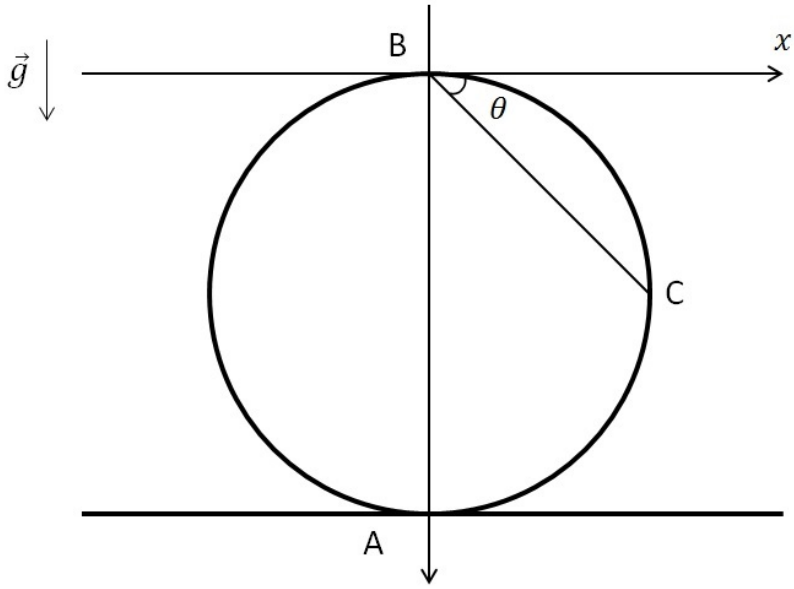


Figura 4.2: Consideraremos um corpo deslizando livremente pela corda BC.

e

$$a_y = a \operatorname{sen} \theta. \tag{4.2}$$

Mas como $a = g \operatorname{sen} \theta$, podemos substituir esta relação na equação (4.1), o que nos dá

$$a_x = g \operatorname{sen} \theta \cos \theta. \tag{4.3}$$

Já que $2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta = \operatorname{sen} 2\theta$, reescrevemos a equação (4.3) como

$$a_x = \frac{g}{2} \operatorname{sen} 2\theta. \tag{4.4}$$

Da mesma maneira, a aceleração ao longo da direção vertical, a_y, pode ser escrita como

$$a_y = g \operatorname{sen}^2 \theta. \tag{4.5}$$

Já que o movimento do corpo é acelerado em ambos os eixos, poderíamos escrever a equação paramétrica da posição deste corpo nos eixos x e y como sendo

$$S_x = \frac{g}{4}\,\mathrm{sen}(2\theta)t^2 \tag{4.6}$$

e

$$S_y = \frac{g}{2}\,\mathrm{sen}^2\,\theta t^2. \tag{4.7}$$

Utilizando a identidade trigonométrica $\cos(2\theta) = 1 - 2\,\mathrm{sen}^2\,\theta$ e isolando o termo $\mathrm{sen}^2\,\theta$, temos

$$\mathrm{sen}^2\,\theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}. \tag{4.8}$$

Substituindo o resultado (4.8) na equação (4.7), obtemos

$$S_y = \frac{g}{4}[1 - \cos(2\theta)]t^2. \tag{4.9}$$

Mantendo-se os termos dependentes de θ no lado direito desta igualdade, obtemos

$$S_y - \frac{g}{4}t^2 = -\frac{g}{4}\cos(2\theta)t^2. \tag{4.10}$$

Combinando as equações (4.6) e (4.10), obtemos

$$S_x^2 + \left(S_y - \frac{g}{4}t^2\right)^2 = \left(\frac{g}{4}t^2\right)^2. \tag{4.11}$$

A equação obtida acima representa a equação de uma circunferência com um raio dependente do tempo, $R(t)$, o qual pode ser escrito como

$$R(t) = \frac{g}{4}t^2. \tag{4.12}$$

O centro desta circunferência move-se verticalmente no sentido da aceleração da gravidade, g, porém seu módulo é igual à metade do módulo da aceleração da gravidade.

4.1.2 Filmagem do aparato

Novamente, foi feita uma filmagem demonstrativa do fenômeno cogitado por Galileu. O referido vídeo pode ser encontrado em [9]. Neste caso, foram colocados cinco corpos para deslizar ao longo de cada um dos planos inclinados inscritos ao círculo. Como há uma impossibilidade física de se liberarem todos os corpos simultaneamente de um mesmo ponto (ponto B), utilizamos um molde plástico em formato circular para a liberação destes [Figura4.3].

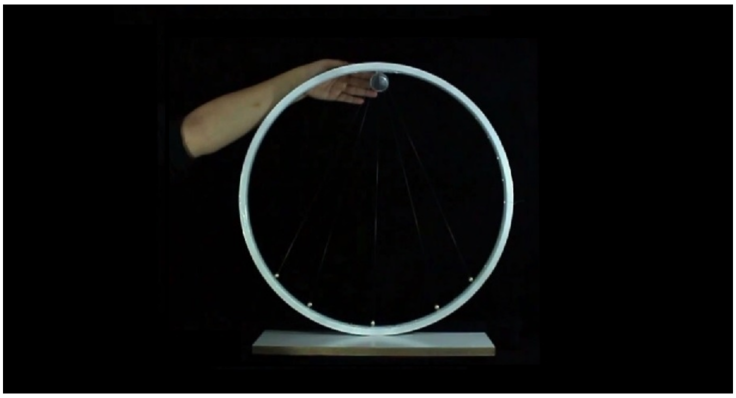


Figura 4.3: Molde em que foram apoiados os corpos antes de serem abandonados a partir do repouso.

Apesar de não serem soltas de um mesmo ponto, mas de pontos muito próximos entre si, as posições instantâneas dos corpos que deslizam ao longo destes planos assumem uma configuração que acreditamos ser satisfatoriamente circular como previu Galileu [Figuras 4.4].

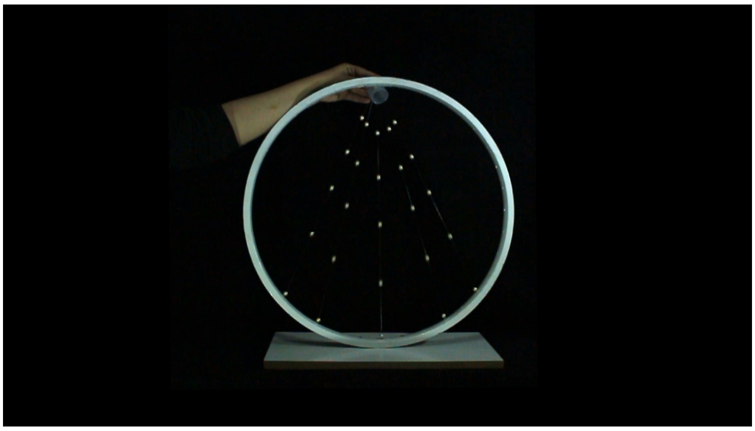


Figura 4.4: Os corpos deslizam pelas cordas em uma configuração circular.

Este efeito é uma consequência direta do exposto no capítulo precedente e pode ser apresentado em sala de aula sem a necessidade do tratamento matemático (se o professor assim desejar) aqui trazido. O argumento é simples: se os tempos de queda ao longo destes planos são iguais, então deve haver infinitas circunferências para as quais o intervalo de tempo decorrido é igual ao tempo de queda das partículas. Ou seja, ao considerarmos o movimento de queda destes corpos nos mesmos intervalos de tempo, estes corpos devem estar deslizando ao longo dos planos de modo que suas posições formem círculos cada vez maiores com o passar do tempo [Figura 4.5]. Como foi demonstrado anteriormente, se partículas forem abandonadas do ponto A no mesmo instante, então após um intervalo de tempo arbitrário, uma destas partículas estará na posição E, enquanto outra estará simultaneamente em G e a outra em I. Ao considerarmos outro intervalo de tempo a partir do anterior, estas ocuparão simultaneamente os pontos F, H e B, respectivamente. À medida que forem considerados mais intervalos de tempo, estas partículas se encontrarão sobre a superfície de uma circunferência cuja dimensão aumenta indefinidamente com o tempo.

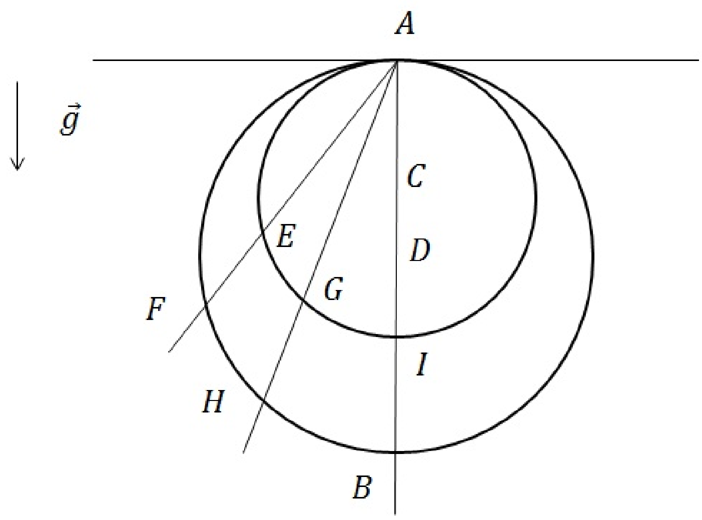


Figura 4.5: Argumento utilizado por Galileu para demonstrar o círculo de simultaneidade.

A simetria da situação nos permite explorar mais uma curiosa consequência - também mencionada por Galileu em *Duas Novas Ciências* - dos argumentos expostos no capítulo anterior e neste. Se, agora, mantivéssemos inúmeras circunferências unidas por seu diâmetro vertical, e em cada uma dessas circunferências inscrevêssemos planos inclinados em todas as direções por onde objetos pudessem deslizar livremente, qual seria o lugar geométrico ocupado pela posição instantânea destas partículas? Certamente a resolução analítica deste problema foge aos objetivos dos cursos de física do ensino médio, mas a resposta a esta pergunta conserva a mesma simplicidade utilizada no raciocínio anterior. Já que todos os planos estão sendo limitados pelas superfícies de cada uma das circunferências, à medida que as partículas deslizassem por estes planos, veríamos uma esfera em expansão a partir de um ponto comum (topo das circunferências). Além disso, o centro desta esfera teria um movimento descendente com a mesma aceleração que a obtida na situação anterior. Embora não tenhamos conseguido concretizar um aparato para demonstrar esta situação, resolvemos mencioná-la brevemente neste trabalho devido à simplicidade e à beleza dos argumentos utilizados por Galileu.

4.1.3 Um fenômeno curioso

Como mostramos nas seções anteriores, o lugar geométrico de corpos que deslizam por planos inclinados limitados por uma circunferência tem uma configuração circular [Figura 4.6].

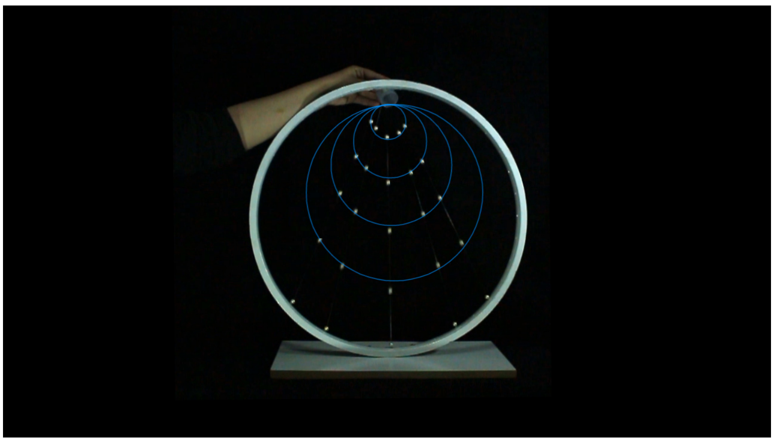


Figura 4.6: Corpos deslizando em uma configuração circular ao longo de fios inscritos em uma circunferência.

No entanto, um detalhe em todas as filmagens obtidas por nós nos chamou a atenção. O corpo que desliza ao longo do diâmetro da circunferência tem seu movimento adiantado em alguns frames quando comparado com os movimentos das partículas em sua vizinhança. Acreditamos que este efeito pode ser explicado, entre outros motivos [1], pelo fato de este corpo praticamente não estar tocando o fio vertical.

A concretização desta e de quaisquer outras situações propostas por Galileu envolve uma parte da natureza que não pode ser simplesmente eliminada: a presença de forças resistivas. Assim, na sequência deste trabalho, iremos explorar um domínio não investigado por Galileu no *Terceiro Dia* de *Duas Novas Ciências*. Procuraremos mostrar o que acontece com os efeitos descritos nos Capítulos 3 e 4 quando a influência da força de atrito é levada em consideração.

[1] O molde de plástico faz com que este corpo já esteja em uma posição privilegiada em relação aos outros. Embora todos estes corpos em um instante $t > t_0$ estivessem ocupando estas posições, cada um deles estaria nesta configuração com velocidades maiores do que zero, o que não acontece quando utilizamos este molde.

Capítulo 5

Quebrando o Paradoxo de Galileu com a Força de Atrito

5.1 O papel da força de atrito

Nos capítulos precedentes, mostramos analiticamente que corpos abandonados do topo de planos inclinados inscritos em uma circunferência têm tempos de queda iguais independentemente do ângulo de inclinação destes planos quando submetidas somente à força gravitacional. Além disso, mostramos que neste caso o lugar geométrico formado por corpos que deslizam por planos inclinados inscritos em uma circunferência, a partir de uma origem comum, é um círculo. Calculamos, ainda, que o centro deste círculo move-se verticalmente ao longo do seu diâmetro com uma aceleração igual a $g/2$. Estes resultados foram obtidos quando desprezávamos a ação de forças resistivas; não sendo, portanto, uma descrição fiel da posição instantânea destes corpos. Em uma concretização das situações propostas anteriormente, a força de atrito é uma parte inevitável do movimento destas partículas e deve ser considerada [13].

Consideremos, então, um corpo que deslize por uma corda cujo ângulo com a vertical seja dado por θ [figura 5.1]. A segunda lei de Newton para este corpo pode ser escrita como

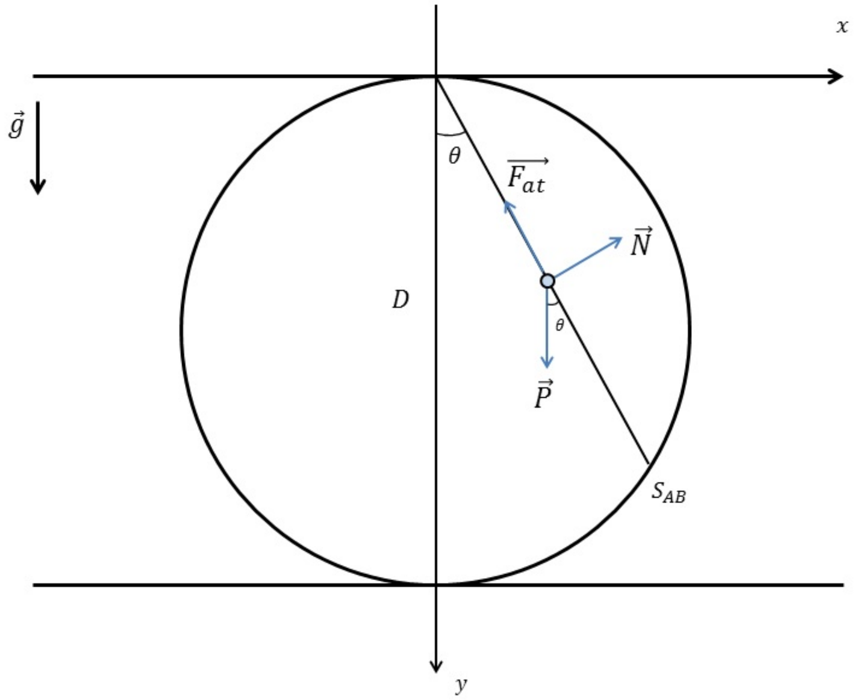


Figura 5.1: Corpo deslizando por um plano inclinado.

$$\overrightarrow{N} + \overrightarrow{P} + \overrightarrow{F}_{at} = m\overrightarrow{a}.$$

Segue da condição de equilíbrio no eixo perpendicular à corda que

$$N = mg\,\mathrm{sen}\,\theta. \tag{5.1}$$

Utilizando a componente da força peso paralela à corda, a equação de movimento do corpo torna-se

$$mg\cos\theta - F_at = ma,$$

ou seja,

$$mg\cos\theta - \mu_c N = ma. \tag{5.2}$$

A aceleração do corpo pode finalmente ser escrita como

$$g\cos\theta - \mu_c g \operatorname{sen}\theta = a, \tag{5.3}$$

quando $90^{\text{o}} < \theta < 0^{\text{o}}$. Para o caso em que $\theta < 0^{\text{o}}$, devemos mudar o sinal do segundo termo da equação (5.3) para que o vetor força de atrito não aponte para o sentido contrário.

A equação paramétrica da posição instantânea da partícula pode ser obtida com o auxílio da equação (5.3), dadas as condições iniciais $S_0 = 0$ e $v_0 = 0$. Desta forma

$$S = \frac{gt^2}{2}\cos\theta - \frac{gt^2}{2}\mu_c \operatorname{sen}\theta. \tag{5.4}$$

O tempo de queda, $t_{S_{AB}}$, para o corpo que desliza pela corda AB é dado por

$$t_{AB} = \sqrt{\frac{2AB}{g\cos\theta - \mu_c g \operatorname{sen}\theta}}. \tag{5.5}$$

Segue da geometria do problema que $AB = D\cos\theta$. Então a equação acima pode ser reescrita como

$$t_{AB} = \sqrt{\frac{2D/g}{1 - \mu_c \tan\theta}}. \tag{5.6}$$

Notemos que para valores negativos do ângulo θ (corpos que deslizam à esquerda do diâmetro da circunferência), devemos obter

$$t_{AB} = \sqrt{\frac{2D/g}{1 + \mu_c \tan\theta}}. \tag{5.7}$$

A partir das equações (5.6) e (5.7), podemos notar que o tempo de queda dos corpos será tão menor quanto menor for o ângulo de inclinação θ. Ou seja, quando considerarmos a ação de forças resistivas, os tempos de queda não são mais os mesmos independentemente da inclinação dos planos e, assim, o paradoxo de Galileu é quebrado.

Sabendo, agora, que os efeitos descritos nos capítulos 3 e 4 não são mais observados, somos levados a pensar no novo lugar geométrico ocupado a cada instante por estas partículas. Veremos que embora os tempos de queda não sejam mais os mesmos, a simetria do problema faz com que as posições instantâneas dos corpos ainda possam sejam descritas de maneira simples.

5.2 O arco de simultaneidade

A fim de obter a nova configuração das posições ocupada pelos corpos, utilizaremos as coordenadas cartesianas x e y da posição destes. Logo

$$x = S\,\mathrm{sen}\,\theta = \frac{gt^2}{2}(\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta - \mu_c\,\mathrm{sen}^2\theta), \tag{5.8}$$

ou

$$x = \frac{gt^2}{2}\left(\frac{\mathrm{sen}(2\theta)}{2} - \mu_c\,\mathrm{sen}^2\theta\right). \tag{5.9}$$

Utilizando a relação trigonométrica $sen^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$ e substituindo-a na equação acima, resulta

$$x = \frac{gt^2}{4}\left[\mathrm{sen}(2\theta) - \mu_c + \mu_c\cos(2\theta)\right]. \tag{5.10}$$

Mantendo-se todos os termos dependentes do ângulo θ do lado direito da igualdade, temos

$$\left(x + \frac{\mu_c g t^2}{4}\right) = \frac{gt^2}{4}\mathrm{sen}(2\theta) + \frac{gt^2}{4}\mu_c\cos(2\theta). \tag{5.11}$$

Analogamente, para a coordenada y da posição destes corpos podemos escrever

$$y = S\cos\theta = \frac{gt^2}{2}(\cos\theta - \mu_c\,\mathrm{sen}\,\theta)\cos\theta), \tag{5.12}$$

ou

$$y = \frac{gt^2}{2}\left[\cos^2\theta - \frac{\mu_c\,\mathrm{sen}(2\theta)}{2}\right]. \tag{5.13}$$

Utilizando a identidade trigonométrica $\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$ podemos reescrever a equação acima como sendo

$$y = \frac{gt^2}{2}\left[1 + \frac{\cos(2\theta)}{2} - \frac{\mu_c \operatorname{sen}(2\theta)}{2}\right]. \tag{5.14}$$

Da mesma maneira como foi feito para a coordenada x, mantemos todos os termos dependentes do ângulo θ do lado direito da igualdade, resulta que

$$\left(y - \frac{gt^2}{4}\right) = \frac{gt^2}{4}\cos(2\theta) - \frac{gt^2}{4}\mu_c \operatorname{sen}(2\theta). \tag{5.15}$$

Elevando-se as equações (5.11) e (5.15) ao quadrado e somando-as obtemos

$$\left(x + \frac{\mu_c g t^2}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{gt^2}{4}\right)^2 = \frac{g^2t^4}{16} + \frac{g^2t^4}{16}\mu_c^2, \tag{5.16}$$

o que nos é familiar como sendo a equação de uma circunferência de raio igual a

$$R(t) = \frac{gt^2}{4}\sqrt{1+\mu_c^2}. \tag{5.17}$$

O centro desta circunferência, contudo, não está mais se movendo na mesma direção do diâmetro do círculo – como no caso em que o atrito foi desconsiderado. À medida que o tempo t aumenta, o centro desta circunferência move-se em uma direção que faz um ângulo negativo com a direção vertical. A partir da comparação da equação (5.17) com a equação horária da posição de um móvel que possui um movimento retilíneo uniformemente variado, podemos chegar facilmente à conclusão de que o centro da circunferência formada por estes corpos move-se com uma aceleração igual a

$$a_y = \frac{g}{2}\sqrt{1+\mu_c^2}. \tag{5.18}$$

Este resultado foi obtido quando considerávamos a queda de um corpo à direita do diâmetro. Corpos em posições simétricas, à esquerda do diâmetro, fornecerão o mesmo resultado: um círculo cujo centro move-se em uma direção que faz um ângulo positivo com a direção vertical. Desta forma, o novo lugar geométrico percebido por nós será a união destas duas curvas [Figura

5.2]; formando, assim, um arco de simultaneidade.

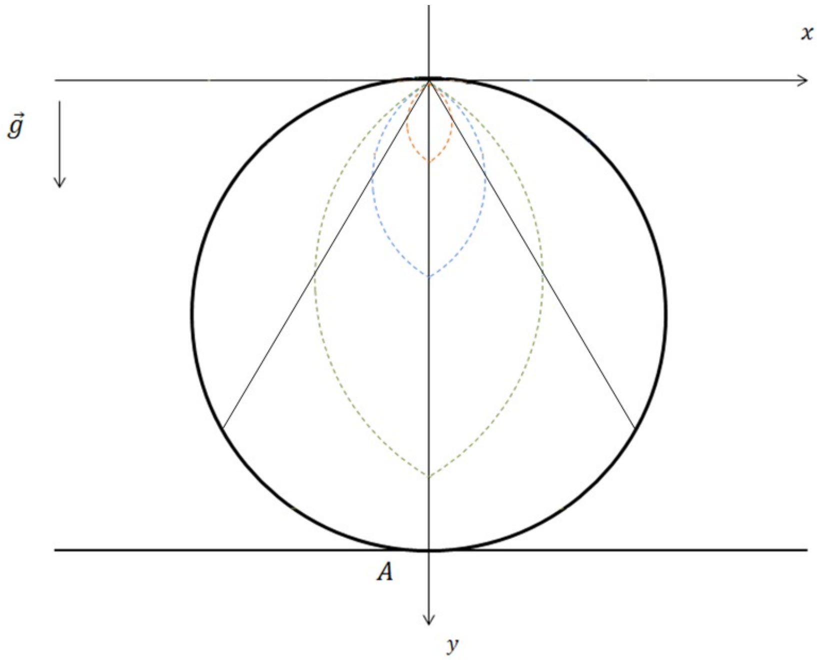


Figura 5.2: Novo lugar geométrico das posições instantâneas dos corpos. As linhas pretas à direita e à esquerda do diâmetro representam o caminho percorrido pelo centro das circunferências durante a descida dos corpos.

5.2.1 Filmagem do aparato

Uma filmagem deste fenômeno foi, novamente, feita por nós. Diferentemente das filmagens apresentadas anteriormente, esta foi feita com uma câmera de alta velocidade para que o efeito pudesse ser visto com maior riqueza de detalhes [1].

A partir de nossas filmagens, extraímos o frame abaixo [figura 5.3] que representa a posição instantânea das partículas em um instante de tempo $t > t_0$ arbitrário. Existe a impossibilidade de utilizarmos muitos planos inscritos à circunferência devido à dimensão dos corpos que deslizarão por estes planos. As dimensões destes corpos faria com que tivéssemos de abandoná-los de uma

[1] A taxa de quadros utilizada nesta filmagem foi de 2000 quadros por segundo.

posição a partir do repouso em que cada um deles já deveria estar com uma velocidade apropriada à inclinação de seu plano, assim como discutido no capítulo anterior.

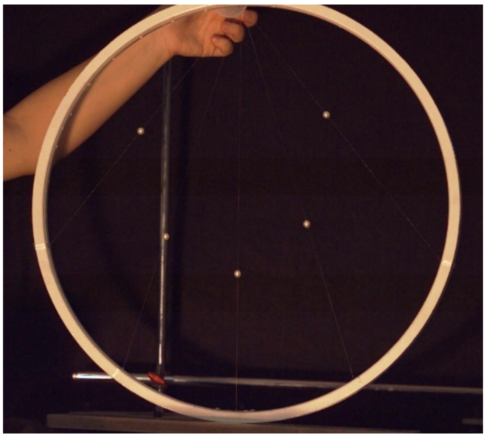


Figura 5.3: Lugar geométrico das posições instantâneas de queda das partículas quando considerada a força de atrito.

Em um programa de edição de imagens determinamos o centro de cada uma das circunferências [Figura 5.4] formadas pelos corpos em queda ao longo dos planos inclinados no mesmo instante de tempo arbitrário que o da figura acima.

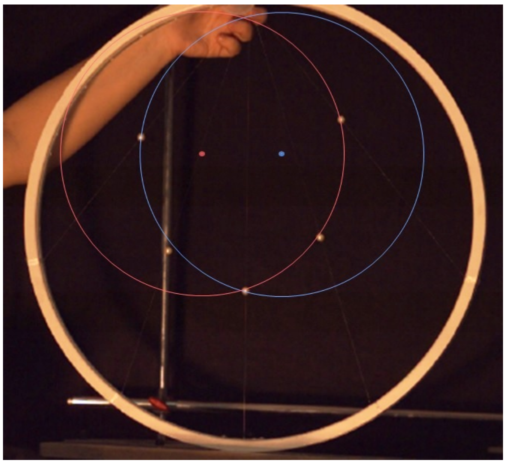


Figura 5.4: Os pontos azul e vermelho representam o centro das circunferências formadas pelo movimento de queda das partículas em um instante de tempo arbitrário.

Podemos reunir em uma só figura cinco frames do movimento destas partículas nesta configuração em que consideramos a atuação da força de atrito [Figura 5.5]. Escolhemos não desenhar os círculos formados pela posição das partículas, uma vez que este desenho dificultaria a visualização da imagem.

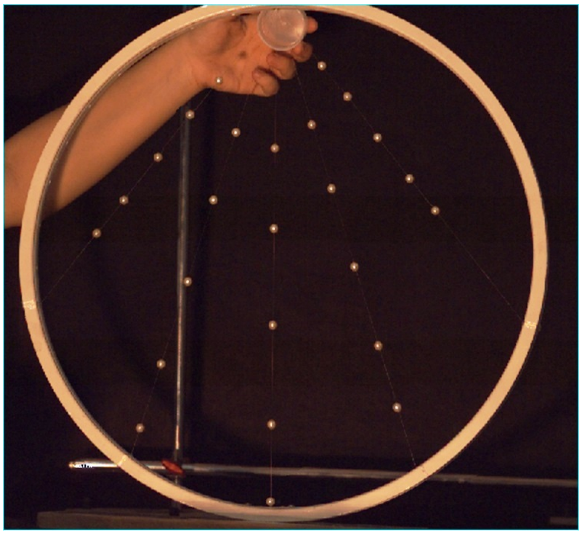


Figura 5.5: Lugar geométrico formado pela queda de partículas ao longo de planos inclinados.

Embora com algumas limitações, esperamos ter mostrado que o lugar geométrico formado por estas partículas assemelha-se com o resultado previsto em [13] e descrito neste capítulo.

Capítulo 6

Conclusões

Dentro do conteúdo da física, a cinemática é a parte da mecânica responsável pelo estudo dos movimentos, independentemente de suas causas. É por meio deste tópico que o aluno entrará em contato pela primeira vez com fenômenos físicos e com a utilização de modelos para descrever estes fenômenos. Esse estudo constitui papel fundamental na compreensão de muitas outras áreas da física.

O modo com que o conteúdo da cinemática vem sido abordado pelos livros-texto do ensino médio gera desinteresse e frustração por parte dos alunos. Neste sentido, a ciência é tratada como um conhecimento "pronto" a ser transmitido mecanicamente aos alunos por meio de exercícios numéricos. Entendemos que as aptidões dos alunos, em ciência, não podem ser resumidas apenas à resolução de exercícios que exigem a manipulação algébrica de dados. Este tratamento desestimula a curiosidade dos alunos de tentar compreender o mundo em que estão inseridos. A fim de romper com esta tradição, propusemos neste trabalho a apresentação de situações inusitadas cujo resultado desperta interesse nos alunos. Um dos objetivos deste trabalho é, mesmo que em modesta proporção, causar este efeito nos nossos alunos e torná-los curiosos acerca das situações mostradas. Para isto, o trabalho foi divido ao longo de seis capítulos.

Um panorama geral do ensino e aprendizagem em cinemática foram traçados baseado em uma pesquisa conduzida por Lilian McDermott e David

Trowbridge. Nesta pesquisa, alunos dos primeiros períodos da Universidade de Washington foram submetidos a entrevistas exploratórias para determinar o nível de entendimento destes no que diz respeito à cinemática. Os alunos eram expostos ao movimento de objetos reais e solicitados a responder perguntas em que deviam comparar velocidades e acelerações destes objetos. Como vimos, poucos alunos foram capazes de fazer as comparações desejadas com sucesso. Grande parte dos estudantes não conseguia fazer a distinção entre conceitos como velocidade e posição e velocidade e variação de velocidade. Além disso, acreditamos que a introdução de problemas reais, assim como esta iniciativa de Trowbridge e MacDermott, no estudo dos movimentos seja de extrema importância no aprendizado dos alunos.

Em seguida, apresentamos uma situação proposta por Galileu tratada em seu livro *Duas Novas Ciências*. A situação proposta leva em consideração a queda de corpos ao longo de planos inclinados inscritos em uma circunferência. Apresentamos esta situação em nosso trabalho a partir de seu enunciado e apresentamos uma resolução analítica para a situação. Além disso, construímos um aparato que pudesse nos fornecer uma experiência visual daquilo que Galileu vislumbrou em seus trabalhos. A partir deste aparato, fizemos algumas filmagens em que este fenômeno pode ser observado.

Na continuidade, fizemos um procedimento semelhante àquele feito anteriormente. Enunciamos um problema proposto por Galileu cujo resultado é consequência direta da situação exposta no capítulo anterior. Nesta sequência, Galileu propôs em seu livro através de um diálogo entre *Simplício*, *Sagredo* e *Salviatti* que corpos abandonados do topo de planos inclinados inscritos em uma circunferência, a partir do repouso e de uma origem comum, deveriam chegar juntos à base desta circunferência. Além disso, Galileu também previu que o lugar geométrico ocupado pela posição instantânea das partículas durante a queda seria um círculo. Novamente, apresentamos uma resolução analítica para este problema e, com o auxílio do mesmo aparato utilizado no capítulo anterior, produzimos uma filmagem curta demonstrativa do fenômeno.

Dando prosseguimento ao trabalho, baseamo-nos em um estudo recentemente publicadoa fim de mostrar o que ocorre com os resultados descritos anteriormente quando consideramos a presença de forças resistivas. Embora a situação analisada inclua componentes da dinâmica, acreditamos que esta análise complemente bem o nosso trabalho. As situações exploradas por Galileu nos capítulos anteriores só eram válidas quando desconsiderávamos a influência de forças resistivas. Neste capítulo, mostramos o novo lugar geométrico ocupado por partículas que deslizam ao longo de planos inclinados inscritos a uma circunferência a partir do repouso e de uma origem comum quando levamos em conta a ação da força de atrito.

De modo geral, tentamos concretizar algumas situações propostas por Galileu Galilei que consideramos ter alto valor pedagógico no estudo dos movimentos. Durante a apresentação destes fenômenos surgiram discussões que mesmo os alunos com aptidão na matéria foram levados a pensar sobre o que estava acontecendo. Acreditamos que as discussões, as reflexões, o levantamento de hipóteses em cada um dos cenários apresentados tenham trabalhado a nosso favor para tornar o assunto mais atraente aos olhos dos alunos. Tentamos abordar o assunto por meio de perguntas que convidassem os alunos a pensar: no fenômeno observado; nos conceitos pertinentes. Entendemos, acima de tudo, que nossa proposta não é uma solução à problemática concernente ao ensino deste assunto, assim como admitimos que esta deva ser aprimorada em oportunidades futuras. Este trabalho é uma modesta demonstração de que a cinemática esconde muitas surpresas e efeitos não intuitivos. Acreditamos que estes fenômenos podem ser abordados para despertar nos nosso alunos a curiosidade que consideramos ser um atributo intrínseco tão importante do ser humano.

Apêndice A

Aplicações do Paradoxo de Galileu no Ensino Médio

A.0.2 O Paradoxo de Galileu

Em uma carta datada de 29 de novembro de 1602, Galileu Galilei retrata a seu amigo e admirador Guidobaldo del Monte um efeito muito curioso acerca da queda de corpos ao longo de planos inclinados que o intrigara bastante. Mais tarde, em 1632, Galileu descreve o mesmo efeito em seu livro *Duas Novas Ciências*:

> *Se a partir do ponto mais alto ou do ponto mais baixo de um círculo vertical traçarmos planos inclinados que cortam a circunferência, então os tempos de descida de corpos ao longo destes planos serão iguais.*

A resolução deste problema é simples. Para apresentá-la, iremos considerar um círculo vertical de diâmetro D e duas cordas, BA e EA, de comprimentos D e l, respectivamente [Figura A.1] por onde partículas poderão deslizar livremente. Podemos mostrar que l e D se relacionam por meio da expressão matemática

$$l = D\ \cos(90^{\text{o}} - \theta) = D\ \operatorname{sen}(\theta). \tag{A.1}$$

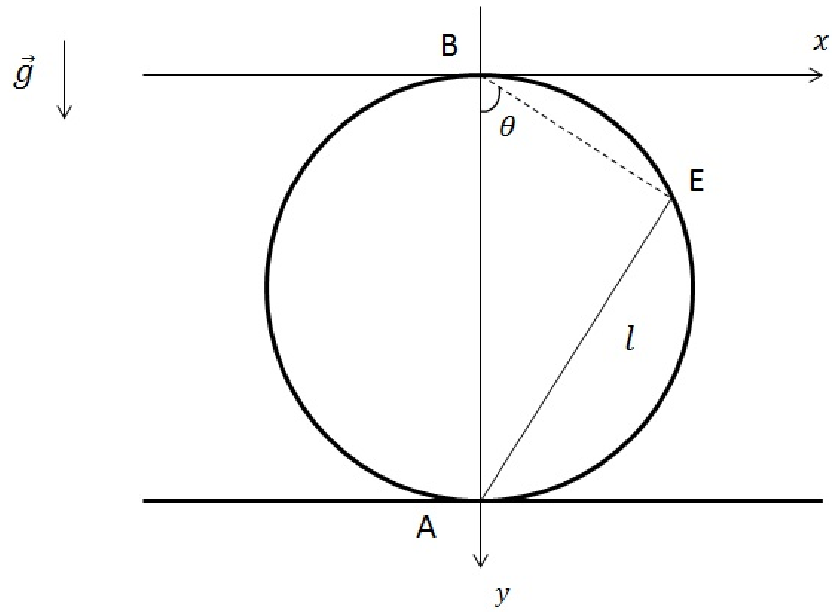


Figura A.1: Partículas podem deslizar livremente ao longo das cordas BA e EA.

Ao considerarmos dois corpos que deslizem por BA e por EA, simultaneamente, partindo do repouso, sabemos que o corpo a percorrer o diâmetro D está sujeito unicamente à aceleração da gravidade, g. O mesmo não ocorre com o corpo que desliza por EA: o contato com o plano inclinado faz com que sua aceleração seja diferente da aceleração da gravidade.

O módulo da aceleração à qual está submetido o corpo que desliza por EA se relaciona com g pelo mesmo fator que l se relaciona com D, ou seja,

$$a = g \ \operatorname{sen}(\theta). \tag{A.2}$$

Desprezando-se as forças resistivas, podemos escrever a representação paramétrica da posição, y, da partícula que desliza ao longo do diâmetro da circunferência como

$$y = \frac{at^2}{2}, \tag{A.3}$$

onde t é o instante de tempo, dadas as condições iniciais $y_0 = 0$ e $v_{0y} = 0$. Como a partícula percorre uma trajetória de comprimento igual a D e está sujeita a uma aceleração igual a g, a igualdade (A.3) assume a forma

$$D = \frac{1}{2} g t_D^2, \tag{A.4}$$

em que t_D é o tempo de queda ao longo deste percurso. Consequentemente, podemos escrevê-lo como

$$t_D = \sqrt{\frac{2D}{g}}.$$

Repetindo-se os procedimentos, para o corpo que desliza livremente por EA, temos que o tempo de queda, t_l, deste fio pode ser escrito como

$$t_l = \sqrt{\frac{2l}{g\,\mathrm{sen}(\theta)}}. \tag{A.5}$$

Substituindo-se a igualdade (A.1) no resultado acima, resulta que $t_l = t_D$. O mais intrigante neste resultado é o fato de que os tempos de queda de quaisquer corpos liberados a partir do repouso ao longo de planos inscritos em uma circunferência[1] são iguais. Isto ocorre devido à geometria do círculo: os comprimentos das cordas por onde passam os corpos sempre se relacionam com o diâmetro do círculo por um fator igual ao seno do ângulo de inclinação do plano. De maneira análoga, as acelerações em cada fio sempre se relacionam com a aceleração da gravidade pelo mesmo fator. Em nossa demonstração, chegamos à conclusão de que estes dois termos sempre se cancelam. Em outras palavras, a diferença de caminho gerada pelo comprimento dos planos inclinados é sempre compensada pela diferença entre as acelerações; embora o corpo que desliza ao longo de qualquer corda inclinada percorra um caminho menor, sua aceleração é, na mesma proporção, menor.

[1]Segundo Galileu, para que ocorra este resultado, os planos que partem do topo ou da base do círculo não podem cortar o diâmetro da circunferência (Teorema VIII, Proposição VIII de *Duas Novas Ciências*).

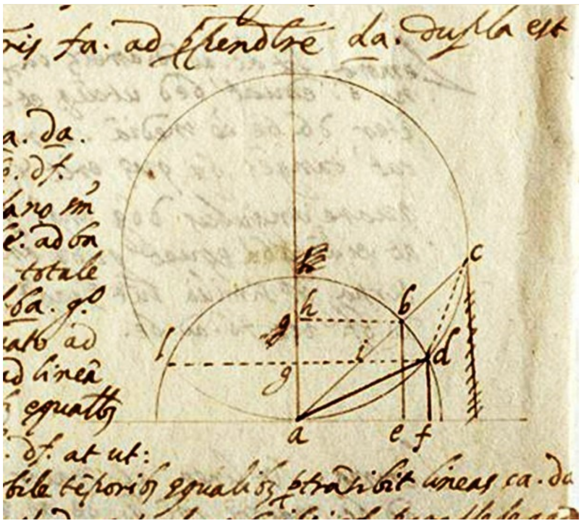


Figura A.2: Manuscrito de Galileu a respeito da queda de corpos ao longo de planos inclinados inscritos em um círculo.

A.0.3 Montagem do aparato demonstrativo

A fim de concretizar a idealização de Galileu, montamos um aparato simples que nos permitisse observar os efeitos descritos em *Duas Novas Ciências*. Os materiais e o procedimento de montagem podem ser encontrados abaixo [Figura A.3].

- 1 (um) aro de bicicleta;
- 1 (um) suporte de madeira;
- fio de nylon ou qualquer material semelhante;
- fita dupla face ou fita adesiva comum;
- bolinhas com um furo que passe pelo seu diâmetro.

Procedimento de montagem

1) Deve-se fixar o aro no suporte de madeira [2] e, em seguida, deve-se introduzir o fio de nylon no furo da extremidade inferior do suporte de madeira.

[2]Convém que o suporte de madeira tenha um furo que coincida com um dos furos do aro da bicicleta pelo qual possamos passar o fio de nylon.

Figura A.3: Materiais utilizados na construção do aparato demonstrativo.

Deve-se também passar o fio de nylon através do furo da bolinha antes de introduzi-lo no furo da extremidade superior do aro de bicicleta [Figura A.4].

Figura A.4: Primeira etapa do procedimento de montagem.

2) Em seguida, devemos introduzir o fio na extremidade oposta e, novamente, atravessá-lo em qualquer outro furo - introduzindo a segunda bolinha do fio [Figura A.5].

3) Deve-se passar o fio pelo mesmo furo por onde ele foi passado inicialmente e aplicar uma tensão mecânica para que ele fique esticado [Figura A.6]. Em seguida, utilizamos a fita dupla face para fixar o fio de nylon ao suporte de madeira.

A.0.4 Filmagem do aparato

Com o auxílio deste aparato, um filme demonstrativo deste fenômeno foi feito por nós em outra ocasião e pode ser acessado em `https://www.youtube.`

Figura A.5: Segunda etapa do procedimento de montagem.

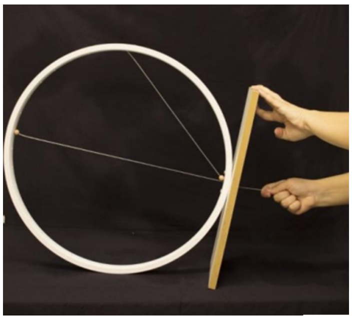


Figura A.6: Terceira etapa do procedimento de montagem.

Figura A.7: Esquematização da situação proposta por Galileu

`com/watch?v=tUnhCPGsJxw` [3].

No vídeo, dois corpos de mesma massa, forma e dimensão são postos a deslizar ao longo dos fios que chamamos de BA e EA [Figura A.1]. O vídeo

[3]Versão em inglês, porém com maior resolução de filmagem. Uma versão em português pode ser encontrada em `https://www.youtube.com/watch?v=Jdcd1lSxc0w`

apresenta duas configurações possíveis para a demonstração: na primeira situação, fazemos o ângulo de inclinação do plano EA igual a 40º. Na configuração seguinte, muda-se a inclinação deste mesmo plano de modo que esta atinja o valor aproximado de 70º. Do filme acima, foram extraídos cinco frames de instantes diferentes da queda (ao longo de BA e EA) das duas partículas. Com o auxílio de um programa de edição de vídeos foi feita a superposição destes frames [Figura A.8].

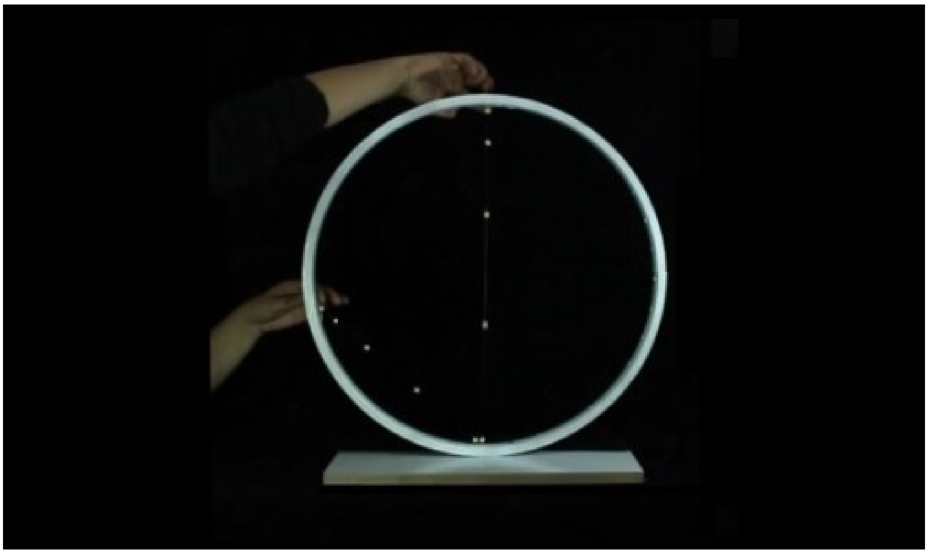


Figura A.8: Superposição de cinco instantes do movimento de queda de duas partículas.

Uma outra versão deste vídeo pode ser vista em: `https://www.youtube.com/watch?v=HRtjvm2pVm0`. Nesta configuração, aparentemente mais complexa que a anterior, é inscrito um terceiro plano inclinado [Figura A.9] ao círculo. A seguir são liberados simultaneamente, a partir do repouso, três corpos ao longo das cordas BF, FA e BA.

Para mostrarmos que os tempos de queda ao longo destas cordas são idênticos, basta relacionarmos o comprimento K da corda BF com o comprimento D da corda BA, assim como feito para o caso anterior:

$$D = k\,\mathrm{sen}(\alpha). \tag{A.6}$$

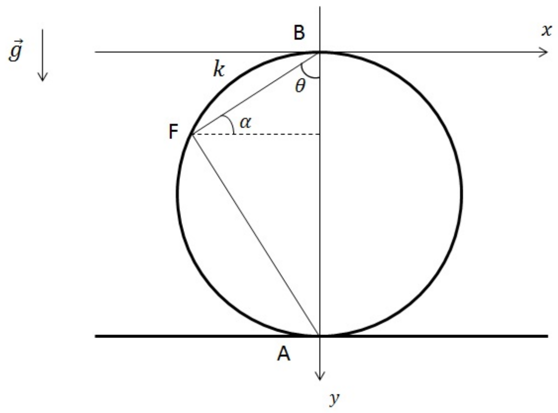


Figura A.9: Esquema de configuração da nova montagem do aparato.

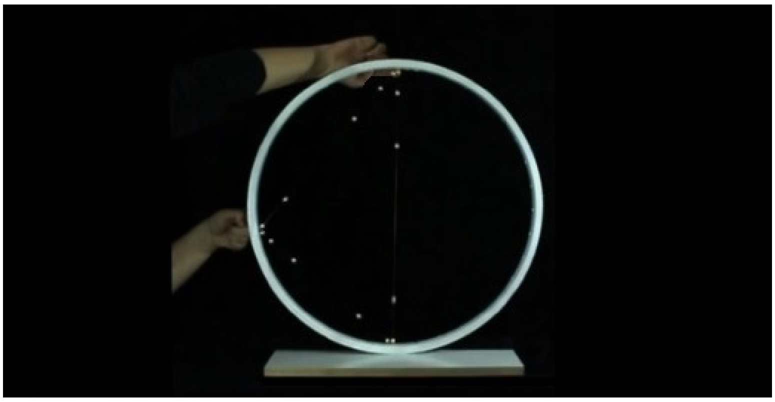


Figura A.10: Superposição de cinco frames com a nova configuração de montagem.

Como a aceleração à qual estará submetida a partícula que desliza por BF é igual a $g\,\text{sen}(\alpha)$, então podemos facilmente chegar ao resultado $t_k = t_D$.

A.1 O Círculo de simultaneidade

No Corolário III do Teorema VI, Proposição VI de *Duas Novas Ciências*, Galileu introduz - por meio de um diálogo entre *Sagredo*, *Salviatti* e *Simplício* um interessante problema cinemático. Este problema é uma consequência direta do efeito explicado na seção anterior. Como dito pelo personagem *Sagredo*:

> *[...] imaginemos [um círculo em] um plano vertical, e a partir de seu ponto mais alto desenhamos linhas inclinadas com todos os ângulos [...] Imaginemos também que partículas pesadas descem por estas linhas com um movimento naturalmente acelerado, e cada uma com uma velocidade apropriada à inclinação de sua linha. Se estas partículas móveis são sempre visíveis, qual será o lugar geométrico de suas posições a cada instante? A resposta a esta pergunta me surpreende, pois sou levado a acreditar, pelos teoremas precedentes, que estas partículas sempre estarão sobre a circunferência de um mesmo círculo, que aumenta com o tempo à medida que as partículas se afastam mais e mais do ponto de onde seu movimento se iniciou.*

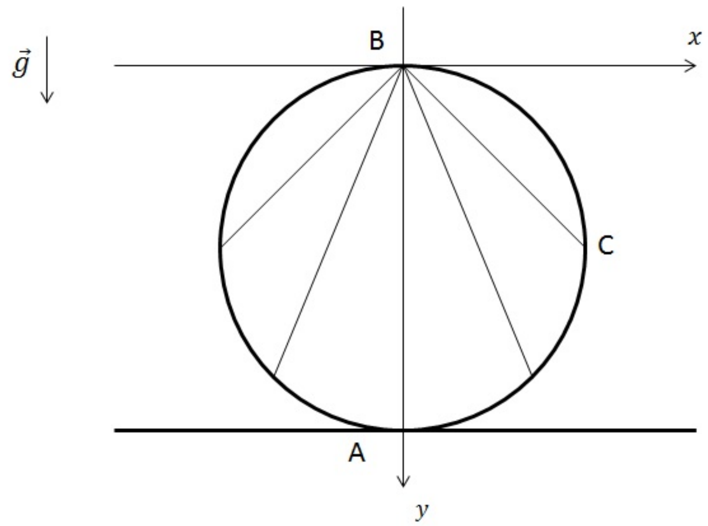


Figura A.11: Partículas podem deslizar ao longo de cada uma das cordas inscritas à circunferência.

Embora a resolução analítica deste problema seja simples, não iremos apresentá-la neste produto[4]. A fim de mostrar o efeito descrito por Galileu em *Duas Novas Ciências*, o aparato demonstrativo foi montado conforme o

[4] A resolução deste problema é apresentada com maiores detalhes no corpo da dissertação à qual este produto está associado.

esquema da Figura A.11. Nesta configuração, inscrevemos cinco cordas à circunferência por onde partículas pudessem deslizar livremente.

A.1.1 Filmagem do aparato

Novamente, foi feita uma filmagem demonstrativa da situação idealizada por Galileu. O referido vídeo pode ser encontrado em `https://www.youtube.com/watch?v=eqWQNMgk7i0`. Neste caso, cinco corpos foram colocados para deslizar ao longo de cada um dos planos inclinados inscritos ao círculo. Como há uma impossibilidade física liberarmos todos os corpos simultaneamente de um mesmo ponto (ponto B), utilizamos um molde plástico em formato circular para a liberação destes [Figura A.12].

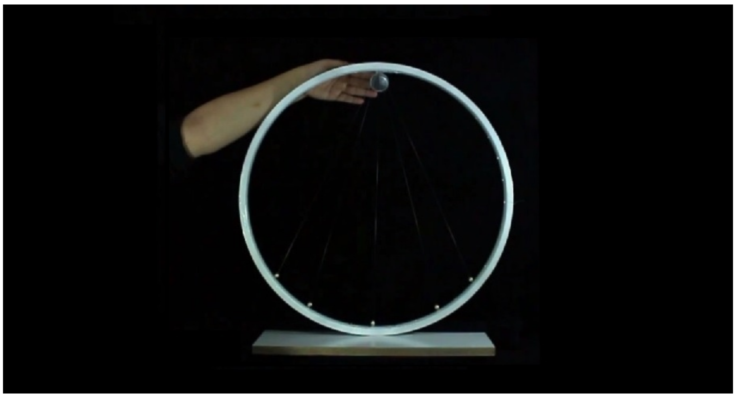


Figura A.12: Molde em que foram apoiados os corpos antes de serem abandonados a partir do repouso.

Apesar de não serem soltas de um mesmo ponto, mas de pontos muito próximos entre si, as posições instantâneas dos corpos que deslizam ao longo destes planos assumem uma configuração que acreditamos ser satisfatoriamente circular como previu Galileu [Figura A.13].

Este efeito é uma consequência direta do exposto na seção anterior e pode ser apresentado em sala de aula sem a necessidade do tratamento matemático - se o professor assim desejar -, como fazemos aqui. O argumento é simples: se os tempos de queda ao longo destes planos são iguais, então deve haver inúmeras circunferências para as quais o intervalo de tempo decorrido

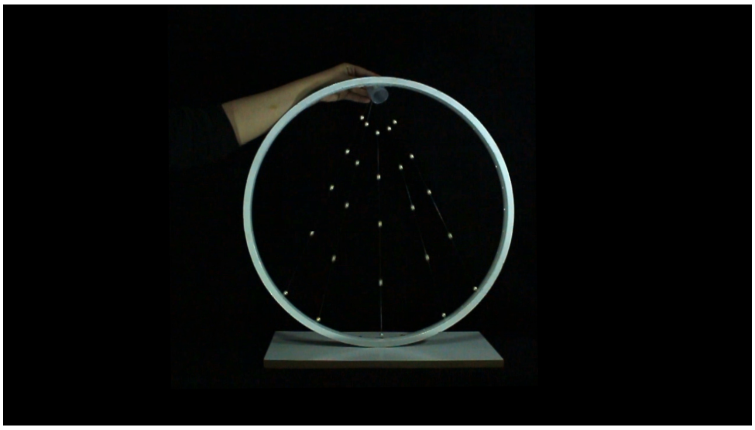


Figura A.13: Os corpos deslizam pelas cordas em uma configuração circular.

é igual ao tempo de queda (total) das partículas. Ou seja, ao considerarmos o movimento de queda destes corpos nos mesmos intervalos de tempo, estes corpos devem estar deslizando ao longo dos planos de modo que suas posições formem círculos cada vez maiores com o passar do tempo [Figura A.14].

Como foi demonstrado anteriormente, se partículas forem abandonadas do ponto A no mesmo instante, então após um intervalo de tempo arbitrário, uma destas partículas estará na posição E, enquanto outra estará simultaneamente em G e a outra em I. Ao considerarmos outro intervalo de tempo a partir do anterior, estas ocuparão simultaneamente os pontos F, H e B, respectivamente. À medida que forem considerados mais intervalos de tempo, estas partículas se encontrarão sobre a superfície de uma circunferência cuja dimensão aumenta indefinidamente com o tempo.

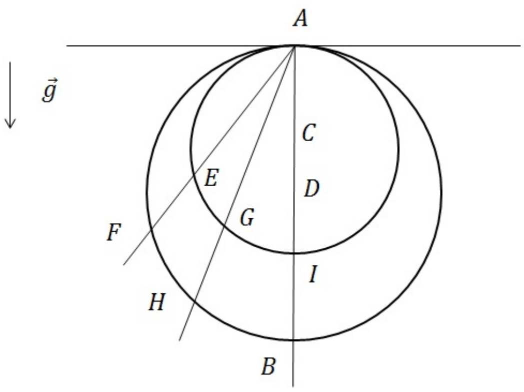


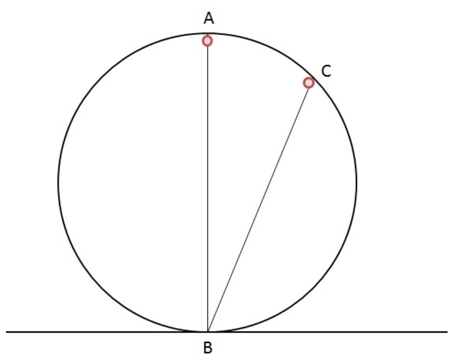
Figura A.14: Argumento utilizado por Galileu para demonstrar o círculo de simultaneidade.

A.2 Algumas atividades propostas

A.2.1 Questionário pré-instrução em cinemática

Antes de os alunos serem expostos aos conceitos cinemáticos, apresentamos a eles o questionário abaixo.

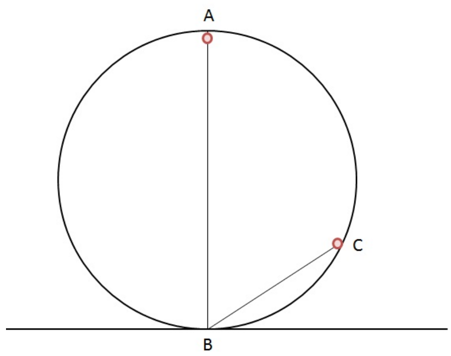
1) Observe a figura abaixo. Suponha que tenhamos dois fios AB e CB por onde dois corpos possam deslizar livremente sem atrito.



Ao serem liberadas no mesmo instante a partir do repouso, qual das duas bolinhas chegará à base do plano primeiro: a que desliza pelo fio AB ou a que desliza pelo fio CB? Explique seu raciocínio.

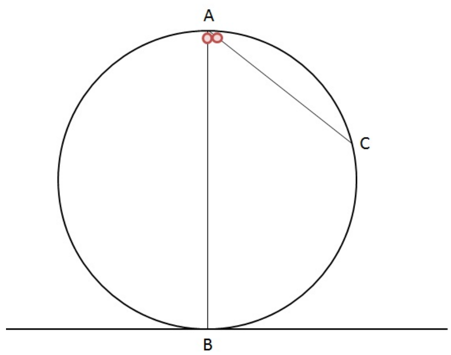
2) Se, agora, diminuirmos significativamente a inclinação da corda CB (como mostra a figura abaixo), qual das duas bolinhas irá chegar à base do

círculo primeiro?



Continue considerando que ambas são liberadas no mesmo instante a partir do repouso. Explique seu raciocínio.

3) Explique como sua resposta mudaria (ou se não mudaria) caso o esquema da questão anterior fosse colocado "de cabeça para baixo", como ilustra a figura. Nesta nova configuração, qual das bolinhas chega a tocar a circunferência primeiro? Explique seu raciocínio.

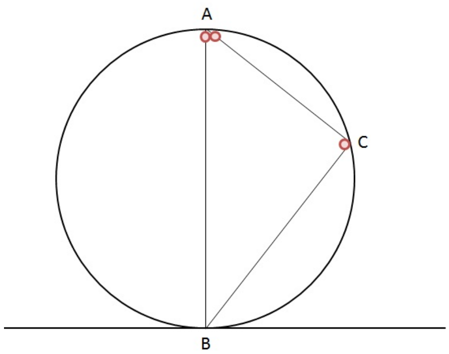


4) Agora, considere o movimento de três corpos que deslizem ao longo dos fios AB, AC e CB soltos, simultaneamente, a partir do repouso.

Relacione os tempos que queda destes corpos explicando seu raciocínio.

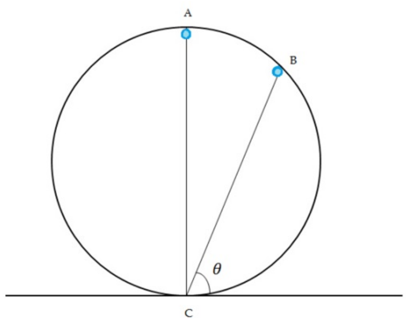
A.2.2 Questionário pós-instrução em cinemática

Depois de os alunos serem apresentados aos conceitos cinemáticos pertinentes à resolução das situações idealizadas por Galileu, o seguinte questionário foi aplicado em sala de aula.



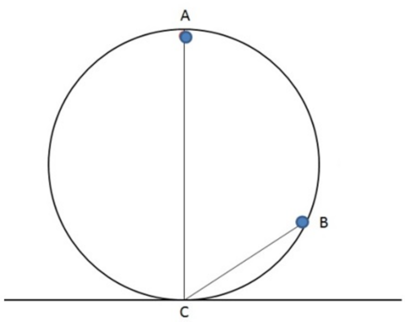
As questões devem ser respondidas com argumentos baseados nos conceitos cinemáticos que você conhece.

1) Observe o esquema e responda as questões a seguir:



a) Qual bolinha (A ou B) chega primeiro à base do círculo? Explique seu raciocínio.

b) Nesta configuração, qual bolinha (A ou B) chega primeiro à base do círculo? Explique seu raciocínio



c) A que aceleração está submetida a bolinha A na primeira configuração deste exercício?

d) A que aceleração está submetida a bolinha B na primeira configuração deste exercício?

e) Qual das duas acelerações é maior?

f) Em algum momento durante a queda as duas bolinhas têm a mesma velocidade?

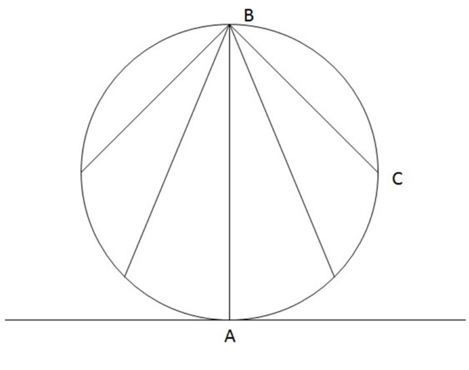
2) Apresente uma relação matemática para relacionar o comprimento D do diâmetro do círculo com o comprimento l por onde a outra bolinha desliza.

3) Determine analiticamente o tempo de queda da bolinha em queda livre.

4) Determine analiticamente o tempo de queda da bolinha que desliza pela corda l. Utilize a relação apresentada por você no exercício 2 para dar sua resposta.

5) O que podemos dizer sobre os tempos de queda? Sua resposta mudaria caso mudássemos a inclinação do plano (para mais ou para menos)?

6) Observe o esquema abaixo.

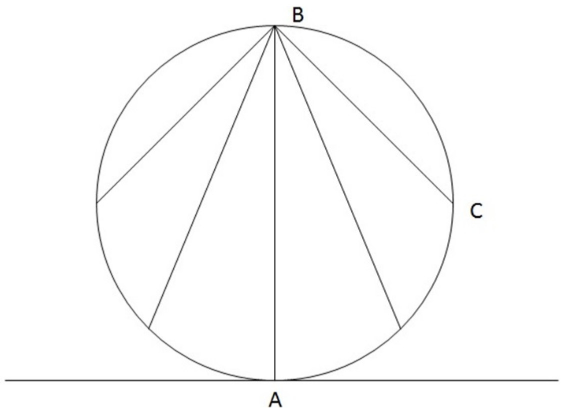


- Suponha que em cada uma das linhas inscritas à circunferência sejam colocadas bolinhas que possam deslizar por estas linhas;

- Suponha que todas estas bolinhas sejam soltas simultaneamente a partir do repouso do ponto B.

a) Levando em consideração as respostas dadas ao exercício 1, diga qual figura geométrica formada pela posição das partículas você esperaria ver durante o movimento de queda destas.

b) Faça o desenho de um instante qualquer da queda dessas bolinhas na figura abaixo tornando explícita a figura geométrica escolhida no item anterior.



A.3 Algumas respostas fornecidas pelos alunos

A.3.1 Questionário pré-instrução em cinemática

O questionário foi aplicado a 50 alunos do primeiro ano do Ensino Médio de uma escola particular. Grande parte dos alunos deste universo nunca havia tido nenhum tipo de contato com a disciplina de física até a 1º série do Ensino Médio.

Questão 1

- Porcentagem de alunos que acham que a *bolinha A* chegará à base do círculo primeiro: 56%

  Justificativas comuns: "A cairá reto", "A tem maior velocidade que B", "quanto mais vertical, maior velocidade se adquire", "A aceleração de *A* vem com maior velocidade", "*A* está em linha reta e ganha mais velocidade por causa da gravidade", "*A* está mais inclinada e por isso a velocidade é maior", "Mesmo que o corpo B esteja adiantado, o corpo A estará reto e isso o fará ir mais rápido que o inclinado", ' "A, a posição do fio faz com que a bolinha "encoste" menos nele, descendo com mais velocidade. A bolinha A também está mais no alto, descendo com mais força"'.

- Porcentagem de alunos que acham que a *bolinha B* chegará à base do círculo primeiro: 28%

  Justificativas comuns: "CB pois a bolinha B está mais baixa que a A", "CB pois sua distância é menor. Considerando o atrito, CB estaria em desvantagem por estar na diagonal", "A que desliza pelo CB pois está mais próxima do ponto B".

- Porcentagem de alunos que acham que ambas chegarão à base do círculo ao mesmo tempo: 16%

  Justificativas comuns: "Chegariam ao mesmo tempo. Por mais que a aceleração da bolinha C seja menor, seu percurso também é", "As duas chegariam ao mesmo tempo, pois a velocidade de A é maior, ela ganha mais velocidade, mas a C tem um caminho menor e chegariam ao mesmo tempo", "As duas chegam ao mesmo tempo, porque mesmo CB tendo uma inclinação maior, a reta é menor que AB", "Ao mesmo tempo, o fio AB é maior mas a velocidade será maior. O fio CB é menor e a velocidade também, logo os dois se encontrarão ao mesmo tempo", "Eles chegariam ao mesmo tempo, pois o A ganharia mais velocidade, mas a distância CB é menor", "As duas bolinhas chegarão ao mesmo tempo, pois já que a inclinação do fio AB é maior, sua aceleração também será maior; já o fio CB tem uma distância menor para percorrer, porém está menos inclinado, portanto sua aceleração será menor. Assim as duas bolinhas chegarão ao mesmo tempo".

Questão 2

- Porcentagem de alunos que acham que a *bolinha A* chegará à base do círculo primeiro: 40%

  Justificativas comuns: "A bolinha A chegaria primeiro pois sua velocidade seria bem maior que a da bolinha C", "A que passa por AB, pois mesmo que sua distância do ponto B seja maior, sua inclinação é muito maior também", "Já que a inclinação da linha CB é menor, esta vai demorar mais para chegar ao ponto final", "A bolinha A vai chegar primeiro porque pegaria velocidade mais rápido do que C", "Ainda assim A chega mais rápido posi está reta e a distância faz com que a velocidade seja mais rápida", "A, pois está mais inclinada e por isso sua velocidade é maior".

- Porcentagem de alunos que acham que a *bolinha C* chegará à base do círculo primeiro: 50%

  Justificativas comuns: "O objeto do ponto C cairá primeiro pois a distância entre ele e o ponto B é menor do que a distância entre o ponto A e o B", "A bolinha C chegará primeiro porque agora ela está muito mais perto do B", "O corpo da corda CB chega primeiro porque mesmo CB tendo inclinação maior a reta é muito menor".

- Porcentagem de alunos que acham que ambas chegarão à base do círculo ao mesmo tempo: 10%

  Justificativas comuns: "A mesma resposta da primeira questão, o tamanho do fio compensa a velocidade", "Eles chegam juntos pois AB é mais rápido mas CB está mais perto", "As duas vão chegar juntas porque CB está mais perto e AB está numa reta, então pega mais velocidade".

Questão 3

- Porcentagem de alunos que acham que a *bolinha A* chegará à base do círculo primeiro: 24%

  Justificativas comuns: “A que passa por AB pois está mais inclinada, e por isso a sua velocidade é maior do que a da AC”, “A A vai chegar primeiro pois na vertical ele vai mais rápido”, “Continua AB porque a fórmula é a mesma que a da questão anterior”.

- Porcentagem de alunos que acham que a *bolinha B* chegará à base do círculo primeiro: 64%

  Justificativas comuns: “A C porque está mais perto”, “AC chegará primeiro, por estar mais inclinado, sua aceleração será maior”, “AC chegaria primeiro pois a distância é menor, mesmo com AB tendo mais velocidade ela não conseguiria chegar antes de AC”.

- Porcentagem de alunos que acham que ambas chegarão à base do círculo ao mesmo tempo: 12%

  Justificativas comuns: “O tempo, velocidade, tamanho são os mesmos, logo não mudaria nada colocar o esquema de *cabeça para baixo*”, “Os dois caem ao mesmo tempo. AC é uma reta menor tendo que percorrer uma distância menor e sua inclinação o beneficia. AB é uma reta na vertical e o círculo está na vertical favorecendo com mais velocidade”, “Não mudaria nada. Assim como as bolinhas foram e chegaram ao mesmo tempo, elas voltaram”, “Não mudaria, vai acontecer o mesmo que a questão dois”.

Porcentagem de alunos atestando que:	Questão 1	Questão 2	Questão 3
A chega à base primeiro	56	40	24
B chega à base primeiro	28	50	64
Ambas chegam à base juntas	16	10	12

Figura A.15: Respostas ao questionário pré-instrução em cinemática em porcentagem.

A.3.2 Questionário pós-instrução em cinemática

Questão 1.a

- Porcentagem de alunos que acham que a *bolinha A* chegará à base do círculo primeiro: 83%

  Justificativas comuns: "(A). A bolinha (A) terá uma aceleração maior portanto atingirá uma velocidade máxima na base do círculo com mais rapidez", "A bolinha A pois quando há o plano inclinado, a aceleração é menor que na vertical", "A. Pois a utilização do plano inclinado faz com que a aceleração da gravidade sobre o móvel seja menor", "A bolinha A chegará primeiro pois a aceleração é maiorque a aceleração da bolinha B", "A bolinha A chegará primeiro pois ela cai em queda livre com aceleração da gravidade e a aceleração de B é menor por usar um plano inclinado".

- Porcentagem de alunos que acham que a *bolinha B* chegará à base do círculo primeiro: 2%

  Justificativas comuns: "A B chega primeiro porque está mais próxima'.

- Porcentagem de alunos que acham que ambas chegarão à base do círculo ao mesmo tempo: 15%

  Justificativas comuns: "Ao mesmo tempo porque o ângulo torna a distância e a aceleração proporcionais", "Chegam juntas porque mesmo que sua aceleração seja menor, o percurso também é menor e torna a aceleração e a distância das bolinhas proporcional", "Para mim as duas chegam ao mesmo tempo pois o circuito da bola B é menor mas parece ter velocidade menor. Já a bola A a distância é maior mas tem mais inclinação assim provavelmente a velocidade é maior".

Questão 1.b

- Porcentagem de alunos que acham que a *bolinha A* chegará à base do círculo primeiro: 57%

  Justificativas comuns: "A porque está na vertical e terá um movimento acelerado e B tem uma inclinação menor e isso fará com que sua aceleração seja menor", "A porque a B está inclinada e cada vez mais inclinado, mais lento e por isso o A chega primeiro", "A *bolinha A* chega mais rápido porque a aceleração dela é maior. A *bolinha B* tem uma aceleração menor pois a mesma está em uma linha inclinada", "A bolinha A tem mais aceleração por ter mais caminho, a bola B continua com plano inclinado".

- Porcentagem de alunos que acham que a *bolinha B* chegará à base do círculo primeiro: 15%

  Justificativas comuns: "(B). A bolinha B tem uma distância menor ao ponto C, com isso sua aceleração será correspondida com a curta distância", "B, pois possui um percurso menor, apesar da aceleração de A ser maior. A diferença de tempo na chegada é pequena", "Apesar da resposta anterior, dessa vez o comprimento de B é significativamente menor, então ela chegaria primeira", "A bolinha B, pois mesmo a velocidade sendo menor, ela está mais perto do eixo".

- Porcentagem de alunos que acham que ambas chegarão à base do círculo ao mesmo tempo: 28%

  Justificativas comuns: "Ao mesmo tempo, pois mesmo que a aceleração de B seja muito menor a distância também está proporcional", "Juntos independente da posição de A e B, eles sempre chegam juntos pois isso é um círculo e o tamanho irá compensar a aceleração", "Chegam ao mesmo tempo. Mesmo com deslocamentos diferentes, as acelerações também são diferentes", "As duas chegam ao mesmo tempo pelo mesmo motivo da questão anterior".

Porcentagem de alunos atestando que:	Questão 1.a	Questão 1.b
A chega à base primeiro	83	57
B chega à base primeiro	2	15
Ambas chegam à base juntas	15	28

Figura A.16: Respostas ao questionário pós-instrução em cinemática em porcentagem.

Questão 1.c

Dos 47 alunos que responderam ao questionário, todos identificaram que a bolinha A estava submetida à ação da aceleração da gravidade, $g = 10m/s^2$.

Questão 1.d

Dos 47 alunos que responderam ao questionário, 43 identificaram que a bolinha B estava submetida a uma aceleração igual a $a = g \operatorname{sen}\theta$ e 4 alunos não souberam responder à questão (deixando-a em branco).

Questão 1.e

Dos 47 alunos que responderam ao questionário, 44 identificaram a aceleração da gravidade como sendo maior do que a aceleração da bolinha B e 3 alunos não souberam responder à questão (deixando-a em branco).

Questão 1.f

Dos 47 alunos que responderam ao questionário, 28% responderam que as bolinhas terão mesma velocidade apenas no instante em que são soltas, enquanto 43% responderam que as bolinhas terão mesma velocidade nos instantes inicial e final. Além disso, 20% responderam que as bolinhas teriam mesma velocidade quando estivessem na mesma posição, enquanto 9% afirmaram que em nenhum momento as velocidades das bolinhas seriam iguais.

A.3.3 Questão 2

Grande parte dos alunos, apesar de já ter estudado trigonometria falhou em fornecer uma expressão correta que relacionasse estas grandezas. Cerca de 29% dos alunos forneceram a resposta correta à questão, enquanto aproximadamente 60% dos alunos forneceram uma resposta equivocada. Cerca de 10% dos alunos deixaram a questão em branco.

A.3.4 Questão 3

Mesmo o resultado desta questão não dependendo da questão anterior, muitos alunos (em torno de 36%) não conseguiram fornecer uma resposta coerente à pergunta e cerca de 10% dos alunos deixaram a questão em branco. A porcentagem de alunos que forneceu a resposta corretamente foi de aproximadamente 54%.

A.3.5 Questão 4

Dos alunos que conseguiram fornecer uma resposta correta à pergunta número 2 apenas 7 alunos (cerca de 15% do total) conseguiram chegar à resposta correta, enquanto os 40 alunos restantes não souberam desenvolver a resposta.

A.3.6 Questão 5

Todos os alunos que forneceram a resposta correta à questão anterior, obtiveram sucesso em relacionar os tempos de queda nesta questão. Porém achamos conveniente destacar a resposta dada por um aluno, pois a nosso ver, este aluno interpretou que o resultado era específico para determinada inclinação. O aluno não foi capaz de raciocinar que os tempos de queda de ambos corpos serão iguais independentemente de suas inclinações.

Eis a resposta do aluno: *Neste caso, os tempos de queda serão iguais, mas caso aumentássemos o ângulo de inclinação do plano da bolinha B ela demoraria mais tempo a cair porque o seno do ângulo não vai mais cancelar.*

A.3.7 Questão 6

Quando questionados sobre o lugar geométrico dos corpos em questão em um instante de tempo arbitrário, os alunos forneceram respostas diversas. Escolhemos apresentar abaixo exemplos das respostas mais comuns a esta pergunta por ordem de frequência.

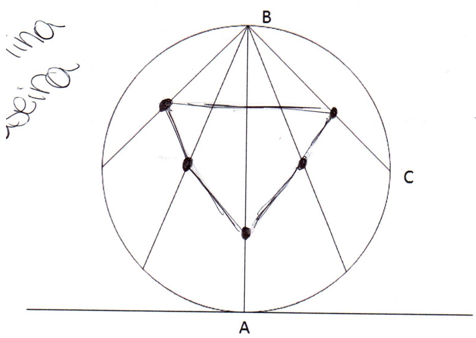


Figura A.17: O triângulo foi a forma geométrica mais frequente nas respostas, sendo apresentada por 24 dos 47 alunos.

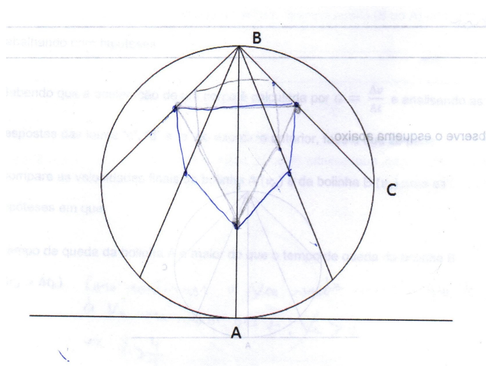


Figura A.18: O pentágono foi a figura geométrica escolhida por 11 dos 47 alunos.

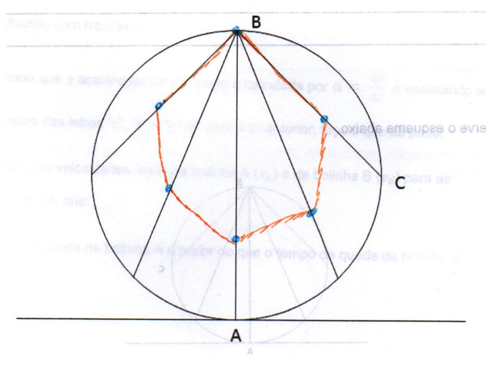


Figura A.19: O hexágono foi a terceira figura geométrica mais escolhida, estando nas respostas de 5 dos 47 alunos.

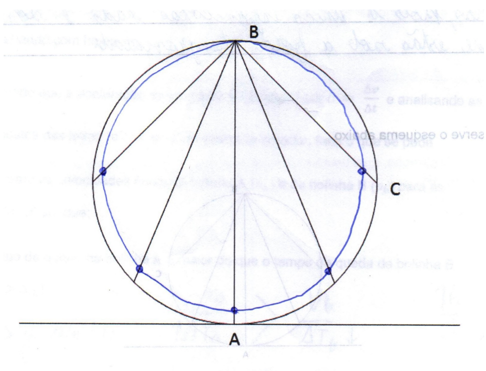


Figura A.20: O círculo foi corretamente apontado como resposta por 3 alunos.

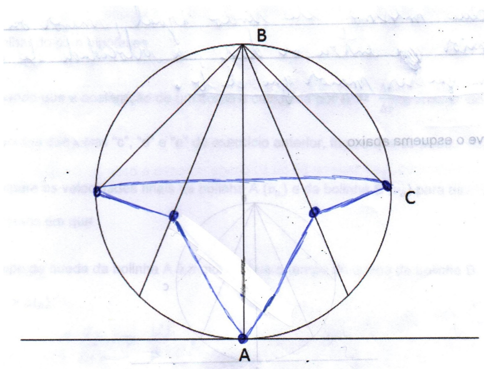


Figura A.21: Figura geométrica menos frequente, apresentada por um aluno apenas.

Apêndice B

O paradoxo de Galileu... por Galileu

B.1 Trecho original

Construamos sobre a linha horizontal GH um círculo vertical. A partir de seu ponto mais baixo - o ponto de tangência com a horizontal - tracemos o diâmetro FA e, a partir do ponto mais alto, A, tracemos planos inclinados até pontos quaisquer B e C sobre a circunferência. Então os tempos de descida ao longo destes planos são iguais. Tracemos BD e CE perpendiculares ao diâmetro. Tome AI igual à média proporcional entre as alturas dos planos AE e AD. Como os retângulos $FA.AE$ e $FA.AD$ são respectivamente iguais aos quadrados de AC e AB, enquanto o retângulo $FA.AE$ está para o retângulo $FA.AD$ assim como AE está para AD, segue então que o quadrado de AC está para o quadrado de AB assim como o comprimento AE está para o comprimento AD. Mas como o comprimento AE está para AD assim como o quadrado de AI está para o quadrado de AD, segue que os quadrados das linhas AC e AB estão um para o outro assim como os quadrados das linhas AI e AD, e assim o comprimento AC está para o comprimento AB assim como AI está para AD. Mas demonstramos anteriormente que a razão dos tempos de descida por AC e por AB é igual ao produto razão entre AC e AB pela razão entre AD e AI. Mas está última razão é igual à razão entre

AB e AC. Portanto a razão entre os tempos de descida por AC e por AB é o produto das razões entre AC e AB pela razão entre AB e AC, e assim a razão entre estes tempos é igual a um, o que demonstra a nossa proposição.

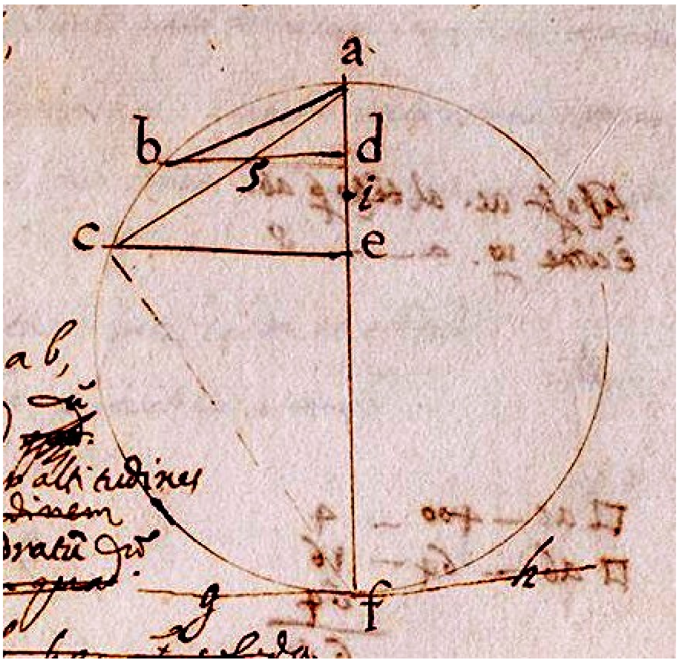


Figura B.1: Manuscrito de Galileu acerca do problema.

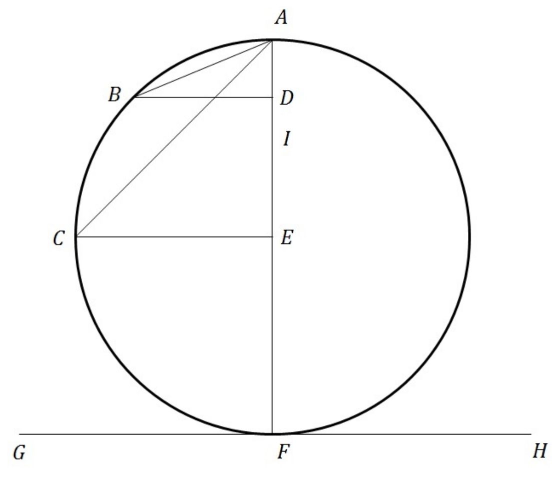


Figura B.2: Esquematização da situação proposta por Galileu

B.2 Os argumentos de Galileu em notação moderna

Em sua demonstração, Galileu introduz o comprimento AI como sendo a média proporcional (geométrica) entre os comprimentos AE e AD, ou seja

$$AI^2 = AD.AE. \tag{B.1}$$

Em seguida, afirma que os retângulos $FA.AD$ e $FA.AE$ são respectivamente iguais a AB^2 e AC^2, o que pode ser facilmente demonstrado [Figura B.2]. A partir desta figura, obtemos a relação:

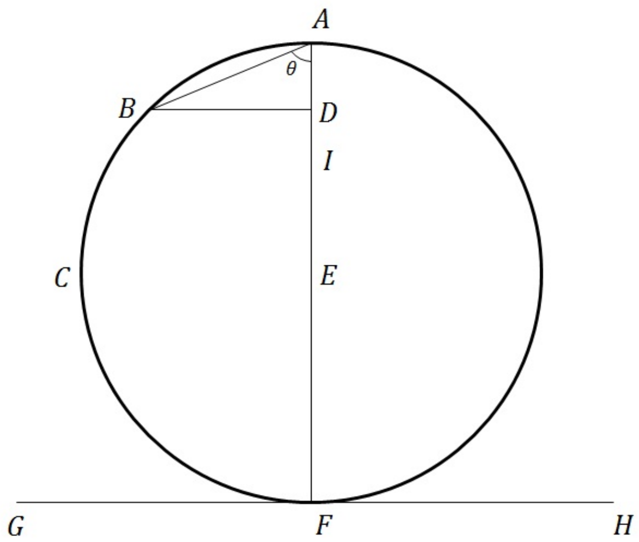


Figura B.3: Relação entre FA e BA é feita, em notação moderna, em função do ângulo θ

$$AD = AB \ \cos(\theta), \tag{B.2}$$

e

$$FAcos(\theta) = AB. \tag{B.3}$$

Ou seja,

$$FA = \frac{AB}{cos(\theta)} \tag{B.4}$$

logo

$$FA.AD = AB^2. \tag{B.5}$$

O mesmo raciocínio pode ser utilizado para mostrar que $FA.AE = AC^2$.

Fazendo-se a razão entre os retângulos $FA.AE$ e $FA.AD$, obtemos

$$\frac{FA.AE}{FA.AD} = \frac{AE}{AD}, \tag{B.6}$$

sendo que $FA.AE = AC^2$ e $FA.AD = AB^2$, ou seja,

$$\frac{AC^2}{AB^2} = \frac{AE}{AD}. \tag{B.7}$$

Dividindo-se por AD^2 ambos os lados da equação (B.1), obtemos

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AI^2}{AD^2}, \tag{B.8}$$

o que, combinada à equação (B.7), resulta

$$\frac{AC^2}{AB^2} = \frac{AI^2}{AD^2}, \tag{B.9}$$

ou seja,

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AI}{AD}. \tag{B.10}$$

Em seu livro, Galileu demonstra que os tempos de descida ao longo de AC e AB se relacionam pela equação

$$\frac{t_{AC}}{t_{AB}} = \frac{AC}{AB}\frac{AD}{AI}. \tag{B.11}$$

Segue de (B.10) que

$$\frac{t_{AC}}{t_{AB}} = \frac{AC}{AB}\frac{AB}{AC} = 1, \tag{B.12}$$

ou seja, os tempos de queda ao longo de AC e AB são exatamente iguais.

Apêndice C

Demonstração do teorema de Thales

Consideremos o triângulo ABC inscrito em uma semicircunferência, como mostra a figura abaixo. O teorema de Thales afirma que quando um triângulo possui um lado que coincide com o diâmetro da circunferência, então o triângulo inscrito a esta circunferência é reto.

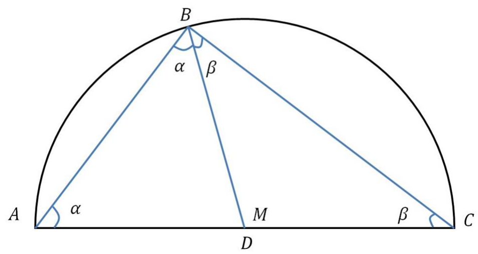


Figura C.1: Triângulo inscrito em um semicírculo

Em nossa figura, os triângulos ΔABD e ΔDBC são isósceles. Além disso, os ângulos $\angle DAB$ e $\angle ABD$ são iguais, assim como os ângulos $\angle BCD$ e $\angle DBC$. Representando o primeiro par de ângulos por α e o segundo por β, temos:

$$2\alpha + 2\beta = \pi, \tag{C.1}$$

já que a soma dos ângulos internos de um triângulo deve ser igual a π radianos. Assim, segue

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}, \tag{C.2}$$

ou seja, o triângulo ΔABC é reto.

Referências Bibliográficas

[1] L. C. McDermott, *How we teach and how students learn - A mismatch?*, American Journal of Physics, n. 61, p. 295-298, 1993.

[2] Brasil, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica, *PCN+ Ensino Médio: Orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais*, Brasília: SEMTEC/MEC, 2002.

[3] D. E. Trowbridge e L. C. McDermott, *Investigation of student understanding of the concept of velocity in one dimension*, American Journal of Physics, v. 48, n. 12, p. 1020-1028 , 1980.

[4] D. E. Trowbridge e L. C. McDermott, *Investigation of student understanding of the concept of acceleration in one dimension*, American Journal of Physics, v. 49, n. 3, p. 242-253, 1981

[5] Hawking S., *Os Gênios da Ciência: Sobre os Ombros de Gigantes*, São Paulo: Elsevier/Campos, 2005.

[6] Francisquini M. F. B., *Vídeo: o Paradoxo de Galileu no Ensino Médio*, disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=Jdcd1lSxc0w 2013.

[7] Francisquini M. F. B., *Vídeo: Galileo's Kinematical Paradox*, disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=tUnhCPGsJxw, 2013.

[8] Francisquini M. F. B., *Vídeo: Galileo's Kinematical Paradox (Part 2)*, disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=HRtjvm2pVm0, 2013.

[9] Francisquini M. F. B., *Vídeo: Galileo's Kinematical Paradox (Part 3)*, disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=eqWQNMgk7i0, 2013.

[10] Greenslade Jr. T. B.,*Galileo's paradox*, The Physics Teacher n.46, p. 294, 2008.

[11] Francisquini, M. F. B.; Soares, V.; Tort, A. , *O paradoxo cinemático de Galileu*, Revista Brasileira de Ensino de Física v. 36, n. 1, art. 1304, 2014.

[12] Francisquini, M. F. B.; Soares, V.; Tort, A. , *Galileo's kinematical paradox and the expanding circle of simultaneity*, Physics Education v. 48, n. 6, p. 702-704, 2013.

[13] Aguiar. C. E.; Soares, V.; Tort, A., *Galileo's kinematical paradox and the role of resistive forces*, European Journal of Physics v. 35, n. 6, art. 065024, 2014.

[14] Arons A.B., *Teaching Introductory Physics*, Wiley, 1997.