



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO  
Instituto de Física  
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física  
Mestrado Profissional em Ensino de Física

## **Uma abordagem geométrica à cinemática da partícula**

André da Silva Ramos de Faria

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Orientador: Vitorvani Soares

Rio de Janeiro  
Julho de 2016

# Uma abordagem geométrica à cinemática da partícula

André da Silva Ramos de Faria

Orientador: Vitorvani Soares

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Aprovada por:

---

Presidente, Prof. Vitorvani Soares

---

Prof. Victor Augusto Giraldo

---

Prof. Alexandre Carlos Tort

Rio de Janeiro  
Julho de 2016

## Ficha catalográfica

F224a Faria, André da Silva Ramos de  
Uma abordagem geométrica à cinemática da partícula /  
André da Silva Ramos de Faria. – Rio de Janeiro: UFRJ/IF,  
2016.

xi, 73 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Vitorvani Soares.

Dissertação (mestrado) – UFRJ / Instituto de Física /  
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, 2016.

Referências Bibliográficas: f. 72–73

1. Ensino de Física. 2. Cinemática. 3. Geometria. I. Soares, Vitorvani. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Física, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física. III. Uma abordagem geométrica à cinemática da partícula.

*Dedico este trabalho a meu pai, Mussolini Penna de Faria (in memoriam), que não teve a oportunidade de acompanhar a conclusão desta etapa da minha vida, mas influenciou diretamente na minha caminhada.*

## **Agradecimentos**

Agradeço à Deus por tudo.

Agradeço à minha família, em especial minha mãe Maria Angelina da Silva Ramos e minha tia Elzira Aparecida da Silva Ramos, pelo incentivo e apoio incondicionais.

Agradeço ao Professor Vitorvani Soares que por meio da orientação desse trabalho contribuiu, não só para minha formação acadêmica, mas através de sua dedicação e exemplo de profissionalismo, possibilitou meu crescimento pessoal e profissional.

Agradeço ao meu amigo Bruno Eduardo Morgado pelo incentivo e por compartilhar conhecimentos na área da Física.

Agradeço aos membros da banca, Professores Victor Augusto Giraldo e Alexandre Carlos Tort, pela leitura e apreciação deste trabalho.

E finalmente agradeço aos colegas da turma de 2014/1 juntamente com o Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Física, e a todos os seus colaboradores, pelo apoio científico e pela oportunidade de fazer parte desse projeto que acrescentou de forma significativa na minha vida profissional.

Geometry is unique and eternal, and it shines in the mind of God. The share of it which has been granted to man is one of the reasons why he is the image of God.

— JOHANNES KEPLER, *Kepler's Conversation with Galileo's Sidereal Messenger*, E. Rosen, Sources of Science, 1965, vol. 1.

## RESUMO

### Uma abordagem geométrica à cinemática da partícula

André da Silva Ramos de Faria

Orientador: Vitorvani Soares

Resumo da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Reunimos neste trabalho um material de ensino para a descrição do movimento de um corpo pontual explorando os recursos didáticos da construção geométrica. Apresentamos inicialmente uma sequência de construções com régua e compasso que servem de auxílio para a representação dos conceitos característicos da cinemática como o corpo pontual, o referencial, o deslocamento e a duração do movimento do corpo. A partir destas associações geométricas, descrevemos sob esta representação o movimento uniforme, o movimento uniformemente variado e as diferentes combinações destes dois movimentos que podem ser realizadas. Esperamos que este material auxilie o professor e o aluno na discussão das propriedades gerais do movimento de um corpo qualquer e ajude na consolidação dos conceitos físicos relevantes para a sua descrição. Essa forma de apresentar a cinemática da partícula possui a vantagem de apresentar o mesmo conteúdo algébrico usual e, ao mesmo tempo, realçar os aspectos geométricos dessa operação. Deste modo, podemos explorar visualmente o movimento realizado pelo corpo e simultaneamente colocar em evidência o caráter vetorial das grandezas físicas envolvidas no processo. Em particular, podemos destacar o papel da aceleração na imposição das diferentes trajetórias que um corpo pode realizar.

Palavras chave: Ensino de Física, Cinemática, Geometria.

Rio de Janeiro

Julho de 2016

# ABSTRACT

## **A geometrical approach to the kinematics of a particle**

André da Silva Ramos de Faria

Supervisor: Vitorvani Soares

Abstract of master's thesis submitted to Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, in partial fulfillment of the requirements for the degree Mestre em Ensino de Física.

This work provides a teaching material to describe the movement of a punctual body by exploring the didactic resources of the geometric construction. We introduce initially a sequence of constructions with a rule and compass that helps to represent the characteristic concepts of the kinematics as the punctual body, the reference frame, the displacement, and the duration of the body's movement. From these geometric associations we describe under this representation the uniform motion, the uniformly accelerated motion, and the different combinations of these motions that can be realized. We hope that this material serves as a tool to the teacher and the student in the discussion of the general properties of the motion of a body and it might be of use to consolidate the main physical concepts related to its description. This way to show the kinematics of a particle has the advantage to present the same usual algebraic content as well as to reveal the geometric aspects of this operation. Therefore, we can explore visually the actual motion of the body and simultaneously outline the role of the acceleration in the imposition of different trajectories that a body can describe.

Keywords: Physics education, Kinematics, Geometry.

Rio de Janeiro

Julho de 2016



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Um pouco de geometria</b>	<b>4</b>
2.1	Definições Euclidianas	4
2.2	Construções geométricas	8
2.2.1	Produtos notáveis	13
2.2.2	O teorema de Pitágoras	14
2.2.3	Médias da Grécia Antiga	15
2.2.4	A constante de Arquimedes	19
2.2.5	Medida de qualquer ângulo	23
<b>3</b>	<b>Uma visão geométrica do movimento</b>	<b>25</b>
3.1	A partícula	25
3.2	O referencial	26
3.2.1	O corpo	27
3.2.2	O relógio	30
3.3	O movimento da partícula	33
3.3.1	O movimento uniforme	34
3.3.2	O movimento uniformemente variado	37
3.3.3	Os movimentos uniforme e variado e o movimento parabólico	48
<b>4</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>70</b>
	<b>Referências</b>	<b>72</b>

# Lista de ilustrações

Figura 1	Definições Euclidianas . . . . .	5
Figura 2	Descrição do plano . . . . .	6
Figura 3	Construção de uma circunferência de um dado diâmetro . . . . .	7
Figura 4	Três pontos que definem uma circunferência . . . . .	9
Figura 5	Três pontos que definem uma circunferência (cont.) . . . . .	10
Figura 6	Inscrição do triângulo equilátero na circunferência . . . . .	11
Figura 7	Circunscrição do quadrado na circunferência . . . . .	12
Figura 8	Produtos notáveis. . . . .	13
Figura 9	Teorema de Pitágoras . . . . .	14
Figura 10	Representação de uma média $z$ entre dois comprimentos $a$ e $b$ . . . . .	15
Figura 11	Médias . . . . .	18
Figura 12	Área do círculo . . . . .	21
Figura 13	Perímetro da circunferência . . . . .	22
Figura 14	Medida de um ângulo qualquer . . . . .	24
Figura 15	Construção geométrica do referencial . . . . .	27
Figura 16	Construção geométrica do referencial (cont.) . . . . .	28
Figura 17	Construção geométrica do referencial (cont.) . . . . .	28
Figura 18	Construção geométrica do referencial (cont.) . . . . .	29
Figura 19	Construção geométrica do referencial (cont.) . . . . .	29
Figura 20	Construção geométrica do referencial (cont.) . . . . .	30
Figura 21	Construção do relógio. . . . .	31
Figura 22	Construção do relógio (cont.). . . . .	32
Figura 23	Construção do relógio (cont.) . . . . .	32
Figura 24	Construção do relógio (cont.) . . . . .	32
Figura 25	Construção do relógio (cont.) . . . . .	33
Figura 26	Construção do relógio (cont.) . . . . .	33
Figura 27	O movimento da partícula . . . . .	34
Figura 28	Movimento uniforme . . . . .	35
Figura 29	Movimento uniforme (cont.) . . . . .	35
Figura 30	Movimento uniforme (cont.) . . . . .	36
Figura 31	Movimento uniformemente variado . . . . .	37
Figura 32	Movimento uniformemente variado (cont.) . . . . .	38
Figura 33	Movimento uniformemente variado (cont.) . . . . .	39
Figura 34	Movimento uniformemente variado (cont.) . . . . .	39
Figura 35	Movimento uniformemente variado (cont.) . . . . .	40
Figura 36	Movimento uniformemente variado (cont.) . . . . .	41

Figura 37	Movimento uniformemente variado (cont.) . . . . .	41
Figura 38	Construção da parábola . . . . .	42
Figura 39	Construção da parábola (cont.) . . . . .	43
Figura 40	Construção da parábola (cont.) . . . . .	44
Figura 41	Construção da parábola (cont.) . . . . .	44
Figura 42	Construção da parábola (cont.) . . . . .	45
Figura 43	Construção da parábola (cont.) . . . . .	46
Figura 44	Construção da parábola (cont.) . . . . .	47
Figura 45	Construção da parábola (cont.) . . . . .	48
Figura 46	MRU na direção vertical . . . . .	49
Figura 47	MRU nas direções vertical e horizontal . . . . .	49
Figura 48	Composição de dois MRUs perpendiculares . . . . .	50
Figura 49	Composição de dois MRUs perpendiculares (cont.) . . . . .	50
Figura 50	MRUV na direção vertical . . . . .	51
Figura 51	MRUV nas direções vertical e horizontal . . . . .	52
Figura 52	Composição dos MRUVs perpendiculares . . . . .	52
Figura 53	Composição dos MRUVs perpendiculares (cont.) . . . . .	53
Figura 54	Representação do MRUV na direção vertical . . . . .	54
Figura 55	Relação entre a altura e a velocidade do móvel . . . . .	55
Figura 56	Representação do MRU na direção horizontal . . . . .	55
Figura 57	Composição do MRU e MRUV perpendiculares . . . . .	56
Figura 58	Construção da trajetória parabólica . . . . .	56
Figura 59	Construção da trajetória parabólica (cont.) . . . . .	57
Figura 60	Representação do MRU com sentido oposto em relação ao primeiro . . . . .	57
Figura 61	A trajetória parabólica . . . . .	58
Figura 62	A diretriz e o foco da parábola . . . . .	58
Figura 63	A diretriz e o foco da parábola (cont.) . . . . .	59
Figura 64	Orientação da velocidade e da aceleração sobre a trajetória . . . . .	59
Figura 65	Movimento parabólico com diferentes focais . . . . .	60
Figura 66	Movimento parabólico com diferentes focais (cont.) . . . . .	61
Figura 67	Movimento parabólico com diferentes focais (cont.) . . . . .	61
Figura 68	Movimento parabólico com diferentes focais (cont.) . . . . .	62
Figura 69	Movimento parabólico com diferentes focais (cont.) . . . . .	62
Figura 70	Movimento parabólico com diferentes focais (cont.) . . . . .	63
Figura 71	Lugar geométrico dos pontos focais . . . . .	64
Figura 72	Lugar geométrico dos pontos focais (cont.) . . . . .	64
Figura 73	Lugar geométrico dos pontos focais (cont.) . . . . .	65
Figura 74	Lugar geométrico dos vértices . . . . .	66
Figura 75	Lugar geométrico dos vértices (cont.) . . . . .	66

Figura 76	Lugar geométrico dos vértices (cont.) . . . . .	67
Figura 77	A parábola de segurança . . . . .	68
Figura 78	A parábola de segurança (cont.) . . . . .	69

# 1 Introdução

Apresentamos nesta dissertação uma proposta didática para um conjunto de aulas relacionadas à construção dos conceitos cinemáticos por meio de diferentes construções geométricas. Esperamos que a combinação entre esta atividade prática combinada com a discussão teórica em uma mesma proposta de aula seja uma estratégia a mais para o professor motivar os seus alunos e despertá-los para a ciência ao revelar para eles como ela é trabalhada: a observação e a investigação dos fenômenos, a escolha dos parâmetros físicos relevantes em um dado problema, a relação entre as grandezas físicas eleitas através de análises gráficas e dimensionais e, por fim, o reconhecimento e a aplicação das leis e princípios científicos já conhecidos.

De fato, como aprendemos nas aulas de história da física, as bases da ciência moderna, em geral, e as leis do movimento, em particular, foram estabelecidas por Galileu Galilei, no início do século 17, por intermédio de uma feliz combinação de experiências e análise matemática. Através de seus trabalhos, como ele escreve em seu livro *O Ensaaiador*, de 1623, Galileu conclui que as leis da natureza são matemáticas:

“A filosofia encontra-se escrita neste grande livro que continuamente se abre perante nossos olhos (isto é, o universo), que não se pode compreender antes de entender a língua e conhecer os caracteres com os quais está escrito. Ele está escrito em língua matemática, os caracteres são triângulos, circunferências e outras figuras geométricas, sem cujos meios é impossível entender humanamente as palavras; sem eles nós vagamos perdidos dentro de um obscuro labirinto.” (BRUNO; GALILEI; CAMPANELLA, 1983)

Em 1638, Galileu publica clandestinamente o seu *Discurso a Respeito de Duas Novas Ciências*, onde na Terceira e Quarta Jornada ele apresenta a sua teoria cinemática para a descrição matemática (geométrica) do movimento de um corpo que se tornaria peça fundamental na consolidação da dinâmica newtoniana (GALILEI, 1988). Pela sua maneira peculiar de abordar um problema científico, a observação do fenômeno, a sua reprodução em situações controladas e, finalmente, a descoberta da sua representação matemática, Galileu realiza uma das maiores contribuições para o desenvolvimento da física e é considerado por estas contribuições o fundador da física clássica. Apoiados nestas diretrizes, exploramos neste trabalho o emprego da geometria e a sua correspondência com a linguagem da natureza por meio de gráficos e construções geométricas simples como as ferramentas pedagógicas principais para o aprendizado dos conceitos físicos básicos da cinemática.

Também pretendemos com o presente trabalho apoiar o ensino de cinemática nos estudos do ensino médio através de diferentes exercícios de construção geométrica associados aos conceitos físicos envolvidos no tema. Atualmente, na maioria das grades curriculares

do ensino médio, o estudo da geometria não é contemplado o que provavelmente faz com que os professores não a lecionem também por falta de apoio do recurso didático do livro adotado. Neste sentido, as monografias de final de curso de Silva Netto (2013) e Faria (2012), do Curso de Licenciatura em Física aqui do IF-UFRJ, serviram de grande apoio e estímulo para o desenvolvimento do presente projeto.

O trabalho de Faria (2012) chama a atenção para as várias figuras geométricas que se materializam nas diferentes expressões algébricas que descrevem o movimento parabólico. Por sua vez, o trabalho de Silva Netto (2013) analisa diferentes livros de Física Básica da do nosso ensino médio e observa que quase nada é apresentado sobre o movimento que explore de forma explícita as suas características essencialmente geométricas. A análise apresentada neste trabalho, ainda que parcial, revela que entre os livros contemporâneos de física adotados pelo Programa nacional do Livro Didático (PNLD) nenhum deles emprega a geometria como base para a descrição do movimento da partícula. Todas as equações da cinemática são apresentadas de forma algébrica e particularizadas para cada tipo de movimento. Assim, o aluno ao aprender esse conteúdo é induzido a somente se preocupar em memorizar as expressões algébricas correspondentes ao movimento sob consideração e resolver os exercícios numéricos correspondentes. Em nenhum momento é chamada a atenção para as propriedades geométricas associadas à cinemática, de maneira a integrar a descrição dos movimentos mais complexos como uma combinação de movimentos mais simples e fornecer ao aluno ferramentas para uma representação mental de qualquer problema cinemático. Desta forma, o aluno termina o estudo da cinemática com a impressão de não existir uma lei fundamental para a descrição de todos os movimentos possíveis.

Esperamos que a abordagem geométrica que aqui apresentamos forneça, com a orientação do professor, instrumentos ao aluno para que ele reconheça padrões de similaridade entre os diferentes movimentos da natureza e que também ofereça a este mesmo aluno condições para realizar as interpretações físicas correspondentes a partir das representações geométricas de diferentes trajetórias. Com este propósito, sugerimos neste trabalho um procedimento que apresenta a geometria como uma ferramenta de análise para a descrição de qualquer movimento. Acreditamos, assim, que essa metodologia servirá de apoio para o professor explorar geometricamente a cinemática da partícula e paralelamente construir com o aluno todos os conceitos físicos relevantes para a descrição do movimento de um corpo. Esperamos também que este recurso ofereça ao professor a possibilidade de uma atuação complementar entre as abordagens algébrica e geométrica da cinemática do movimento.

Com estes propósitos, reunimos o material didático desenvolvido nesta dissertação na seguinte ordem: No segundo capítulo recuperamos alguns dos diferentes métodos de construção de conceitos e figuras geométricos. No terceiro capítulo construímos as associações dos diferentes conceitos físicos e suas representações geométricas correspondentes tais

---

como, por exemplo: a partícula, o referencial, o deslocamento e o intervalo de tempo. Com isso definimos velocidade escalar. Ainda neste capítulo descrevemos geometricamente o movimento retilíneo e uniforme e definimos o conceito de aceleração escalar para construção do movimento retilíneo uniformemente variado. Completando esta etapa, construímos geometricamente a trajetória parabólica a partir da combinação dos movimentos retilíneo uniforme e retilíneo uniformemente variado. Ao final, mediante alguns conceitos básicos de geometria destacamos o caráter vetorial da posição, da velocidade e da aceleração do corpo e exploramos geometricamente as propriedades cinemáticas da curva obtida. No último capítulo apresentamos as nossas considerações finais.

## 2 Um pouco de geometria

Neste capítulo relembramos as noções básicas da geometria euclidiana, como descrito em Kiselev (2006). Em nosso projeto, estas noções formam a base para a discussão dos conceitos físicos relevantes para a descrição do movimento de uma partícula.

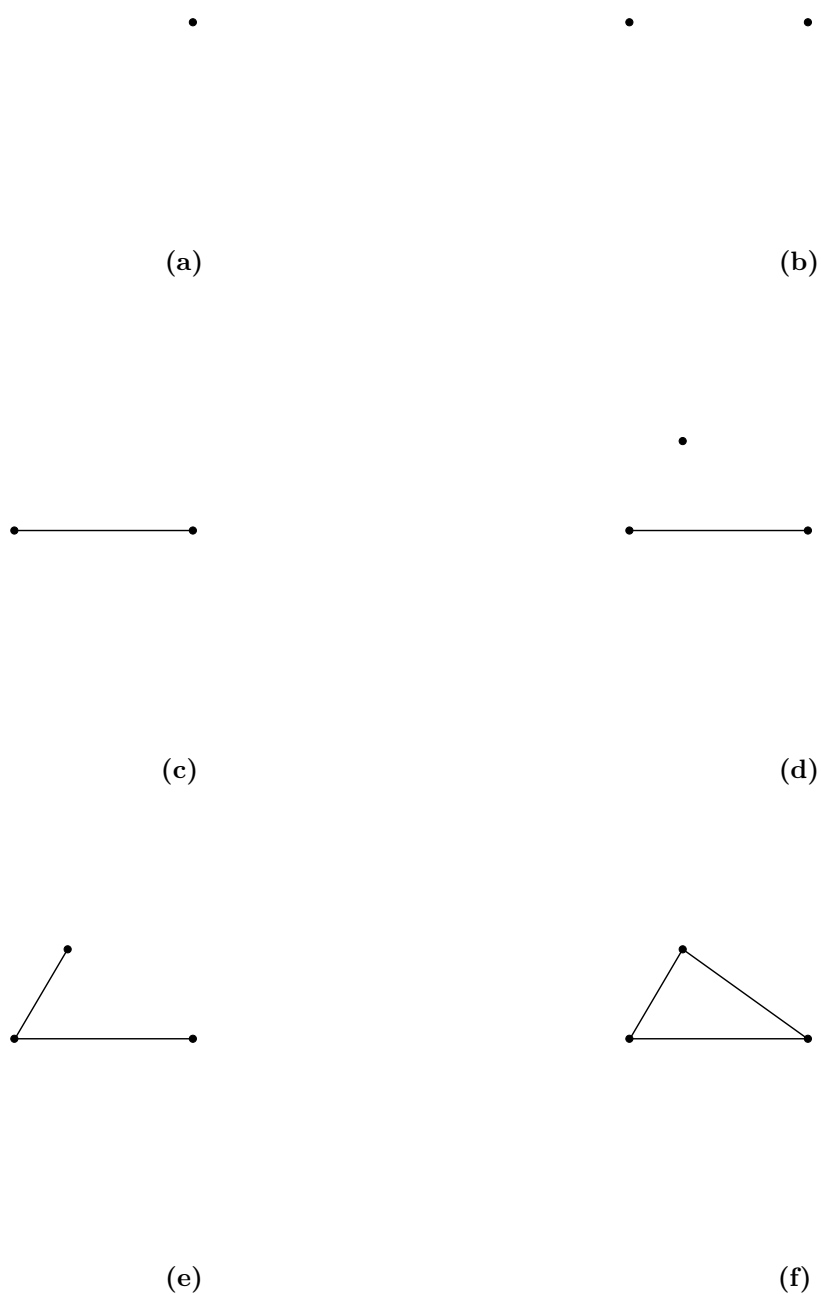
### 2.1 Definições Euclidianas

Em sua obra *Os Elementos*, o matemático grego Euclides (2009) apresenta as definições básicas de geometria. No Livro I são definidos os objetos geométricos cujas propriedades desejamos estudar. São 23 definições, dentre as quais destacamos: o ponto, a reta, o círculo, o triângulo, as retas paralelas e o ângulo. Acrescenta-se ainda cinco axiomas e nove noções comuns que são afirmações admitidas como verdades óbvias. Iniciamos esta seção com algumas das definições dadas por Euclides, em sua obra.

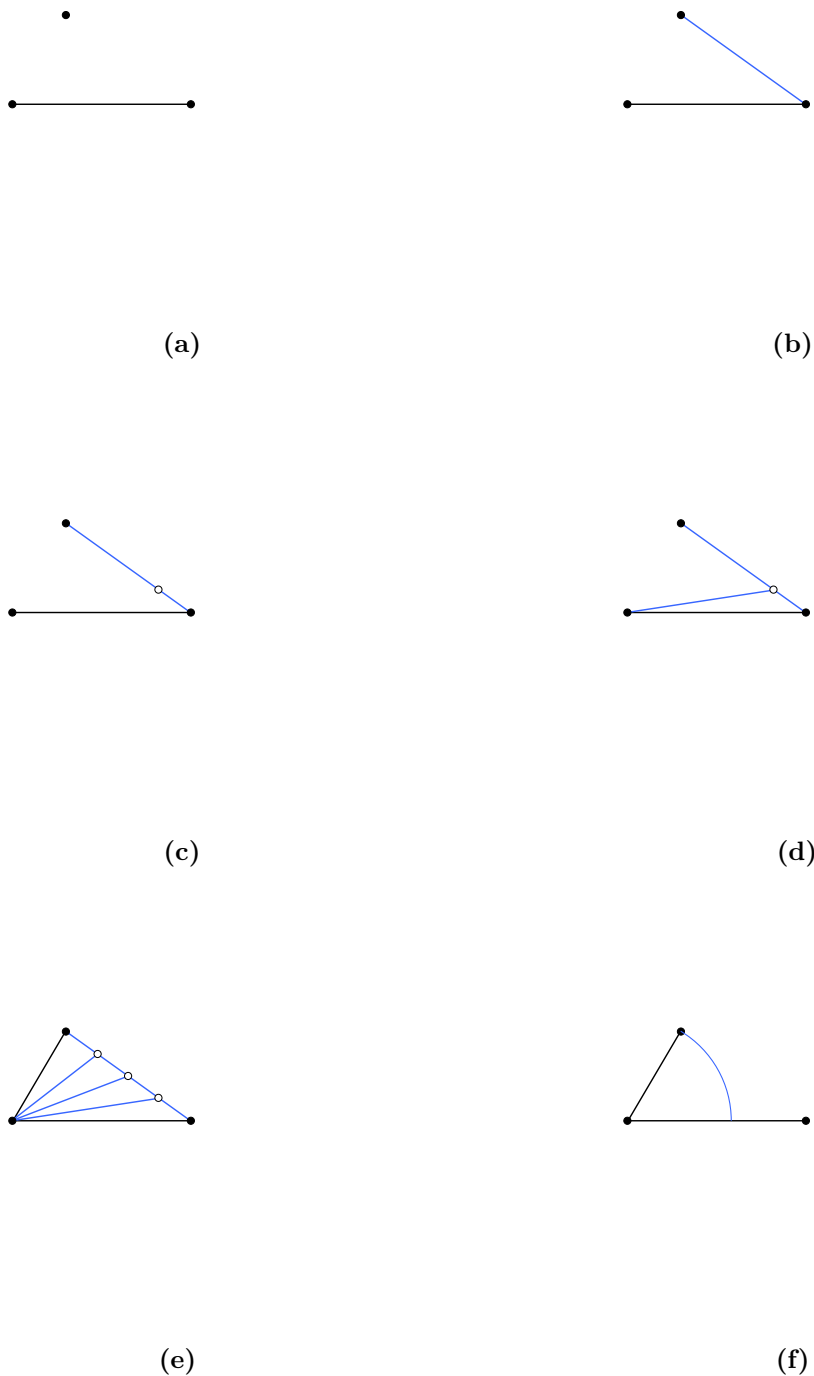
#### Definições

1. Um ponto é aquilo de que nada é parte.
2. E linha é comprimento sem largura.
3. E linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma.
- ...
6. E superfície é aquilo que tem somente comprimento e largura.
7. Superfície plana é a que está posta por igual com as retas sobre si mesma.
8. E ângulo plano é a inclinação, entre elas, de duas linhas no plano, que se tocam e não estão postas sobre uma reta.
- ...
15. Círculo é uma figura plana contida por uma linha [que é chamada circunferência], em relação à qual todas as retas que se encontram [até a circunferência do círculo], a partir de um ponto dos postos no interior da figura, são iguais entre si.
- ...
17. E diâmetro do círculo é alguma reta traçada através do centro, e terminando, em cada um dos lados, pela circunferência do círculo e que corta o círculo em dois.

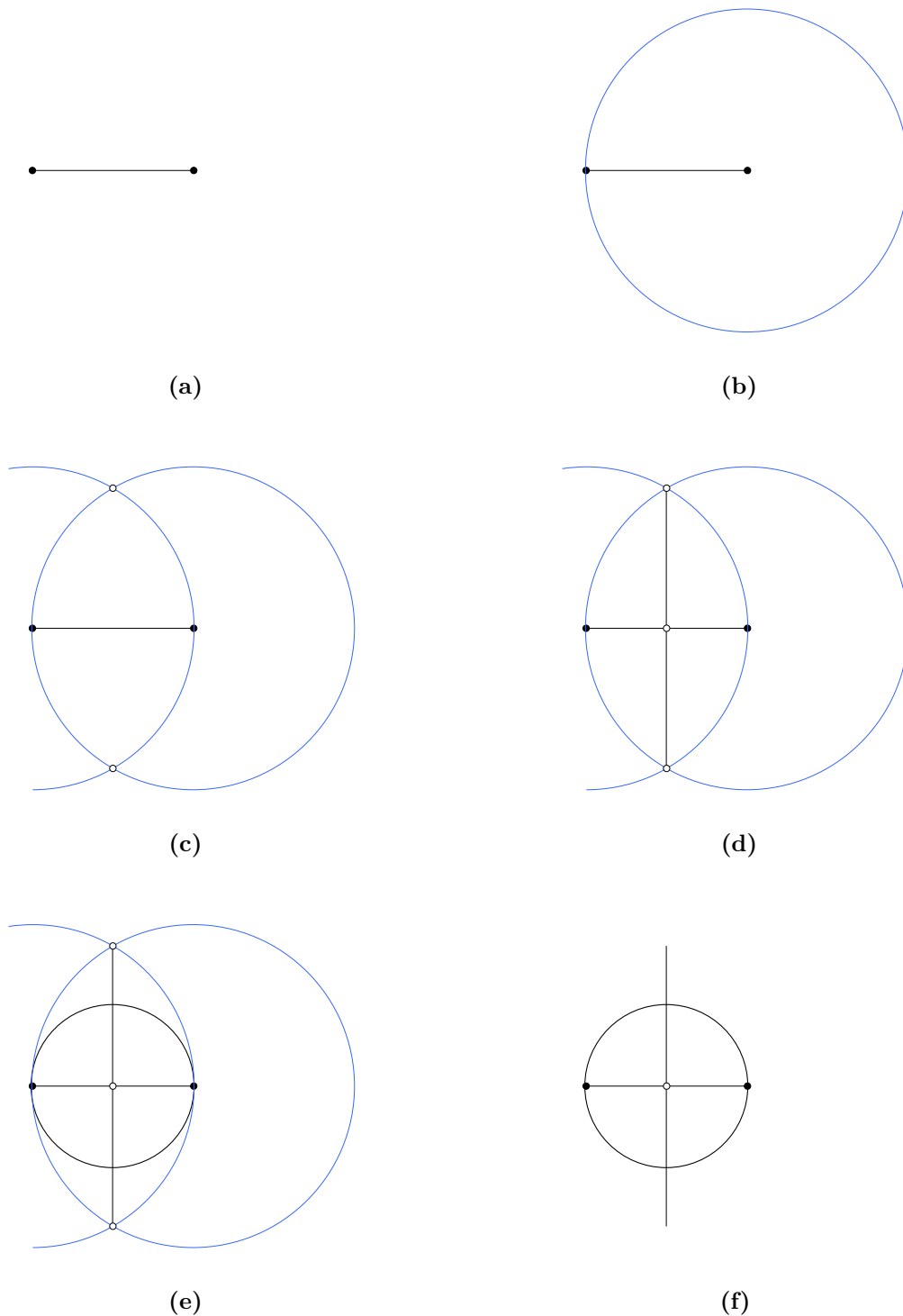




**Figura 1.** – Definições Euclidianas. (a) Ponto; (b) Dois pontos; (c) Dois pontos que definem uma reta; (d) Três pontos não colineares entre si e um segmento de reta que liga dois pontos; (e) Ligação dos pontos para definir o plano; (f) O plano, área definida pelo perímetro do triângulo.



**Figura 2.** – Descrição do plano. (a) Indicamos três pontos não colineares entre si e um segmento de reta que liga dois pontos; (b) Traçamos outro segmento de reta do ponto extremo direito ao terceiro ponto; (c) Marcamos um quarto ponto neste segmento de reta; (d) Traçamos um outro segmento de reta que une o quarto ponto ao ponto extremo esquerdo do primeiro segmento; (e) Ao ligar os pontos, estamos deslizando os infinitos pontos sobre a segunda reta, isso mostra uma inclinação entre as retas traçadas; (f) Ângulo em relação às duas retas contidas no mesmo plano, representando a inclinação relativa ao segmento de reta original.



**Figura 3.** – Construção de uma circunferência de um dado diâmetro. (a) Dado o diâmetro construímos uma circunferência auxiliar de centro na extremidade do diâmetro e raio igual ao diâmetro dado; (b) Com o compasso traçamos outra circunferência auxiliar similar a anterior; (c) Traçamos a mediatriz e marcamos com pontos as interseções das circunferências; (d) Marcamos o ponto médio do diâmetro dado; (e) Traçamos uma reta que divide este diâmetro em duas partes iguais; (f) Apagamos as construções e temos a circunferência que está dividida em quatro partes iguais. Chamamos de ângulo reto o ângulo que corresponde a inclinação entre as duas retas que divide qualquer circunferência em quatro partes iguais.

## 2.2 Construções geométricas

De posse das definições euclidianas discutidas em 2.1, apresentamos agora uma sequência de construções geométricas que utilizam somente régua e compasso que exploraremos mais adiante neste trabalho.

### Três pontos que definem uma circunferência

Como primeira demonstração, vamos mostrar que a partir de quaisquer três pontos não colineares, ou seja um triângulo, podemos construir uma circunferência que passa por esses pontos.

Na construção do plano, definição 7 de Euclides, utilizamos três pontos não colineares entre si. A partir dessa construção, escolhemos um dos pontos, como indicado nas figuras 4 e 5, e com o compasso traçamos uma circunferência de origem nesse ponto.

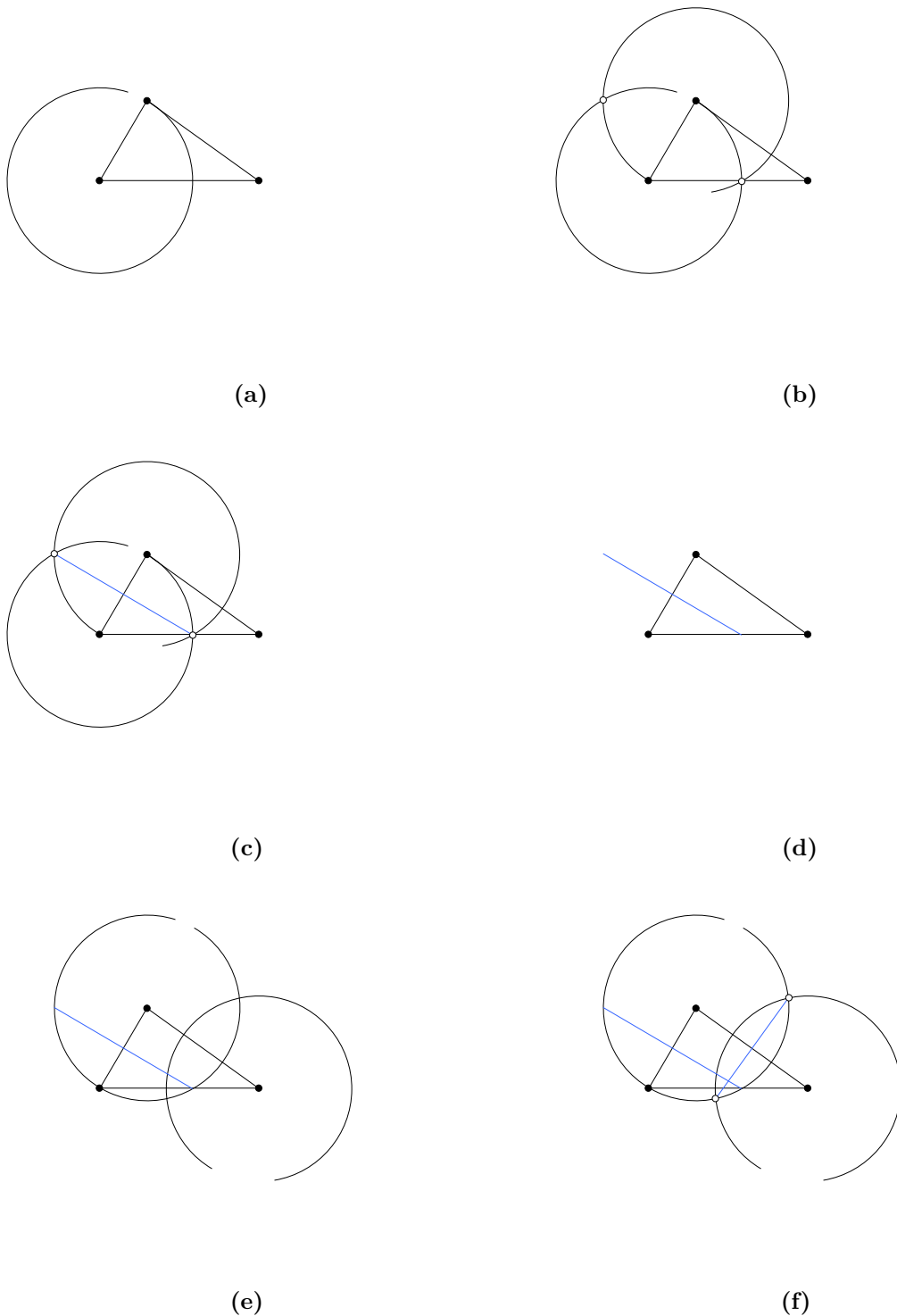
O raio dessa circunferência é a distância até outro ponto que denominamos de ponto lateral direito. Em seguida traçamos outra circunferência de origem no ponto lateral direito que passa pelo ponto lateral esquerdo; marcamos as interseções das circunferências e traçamos um segmento de reta que une as interseções.

Apagamos as circunferências auxiliares e ficamos com o segmento que passa pela reta que une os pontos laterais. Esse segmento de reta é chamado de mediatriz, uma vez que ela divide a reta que liga os pontos laterais em duas partes iguais. Em seguida, realizamos o mesmo procedimento: traçamos a mesma circunferência com centro no ponto lateral direito e que passa pelo ponto lateral esquerdo.

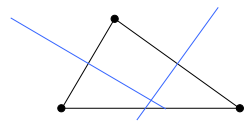
Agora traçamos outra circunferência de mesmo raio que a circunferência precedente, com centro no ponto não colinear aos laterais. O ponto não colinear aos laterais é o ponto que ainda não havíamos usado. Marcamos novamente as interseções das circunferências. Traçamos um segmento de reta que une estes dois pontos. Apagamos as circunferências e ficamos com o segmento de reta que passa pela reta que une o ponto não colinear ao ponto lateral direito. Esse segmento de reta também é uma mediatriz.

Traçamos uma outra circunferência, com centro no ponto lateral esquerdo e que passa pelo ponto lateral direito. Traçamos também uma circunferência de mesmo raio que a circunferência precedente, com centro no ponto não colinear aos laterais. Marcamos as interseções das circunferências. Traçamos então a mediatriz do segmento. Em seguida, apagamos as circunferências e ficamos com os três segmentos de reta.

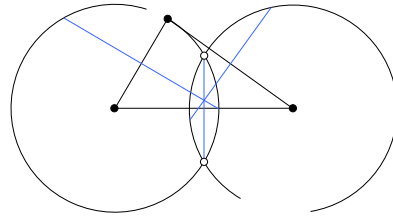
Para finalizar a construção marcamos a interseção dos três segmentos de reta, apagamos as retas mediatrizes e ficamos com o raio da circunferência. Ao traçarmos essa circunferência podemos notar que os três pontos iniciais estão contidos sobre ela.



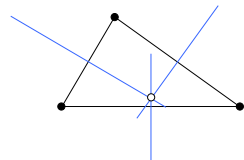
**Figura 4.** – Três pontos que definem uma circunferência. (a) Os três pontos definem o plano e uma circunferência de origem em um ponto que passa pelo outro ponto; (b) Traçamos outra circunferência de origem de mesmo raio que da circunferência anterior com origem no outro ponto e marcamos com pontos as interseções das circunferências; (c) Traçamos um segmento de reta que une os dois pontos; (d) Apagamos as circunferências e ficamos com o segmento de reta que passa pela reta que une dois dos pontos e divide a mesma em duas partes iguais; (e) Traçamos outras duas circunferências de mesmo raio da anterior com centro nos pontos não colineares ao lateral e ao central; (f) Marcamos as interseções das circunferências e traçamos um segmento de reta que une os dois pontos.



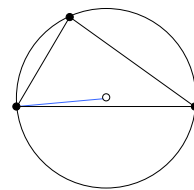
(a)



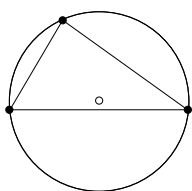
(b)



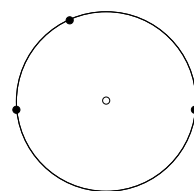
(c)



(d)



(e)

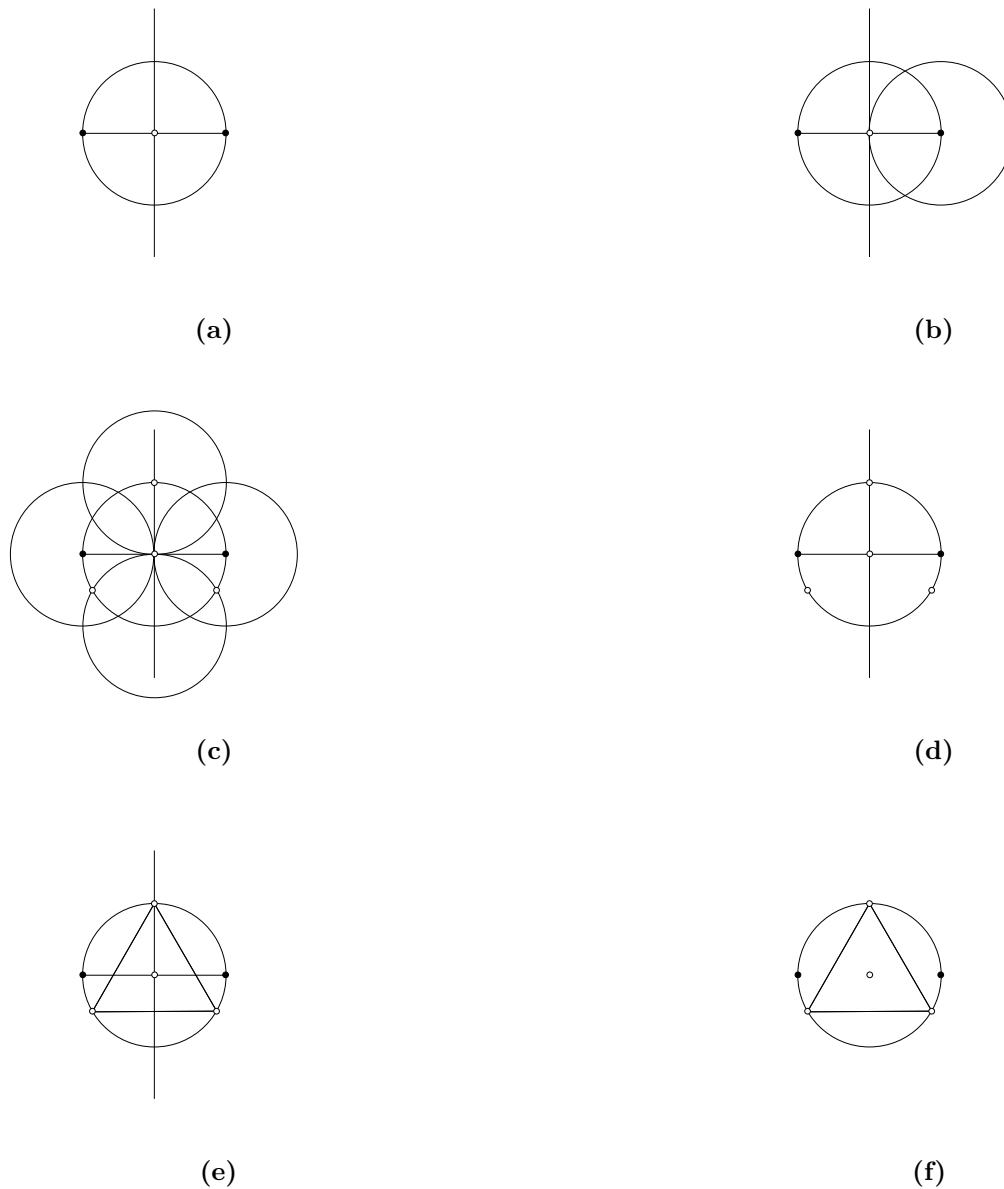


(f)

**Figura 5.** – Três pontos que definem uma circunferência (cont.). (a) Apagamos as circunferências e ficamos com os dois segmentos de reta. (b) Repetimos outra vez as mesmas construções das circunferências e determinamos uma terceira reta e temos, assim, três segmentos de reta que se interceptam em um ponto; (c) Marcamos um ponto no encontro dos três segmentos de reta e apagamos as circunferências auxiliares; (d) Determinamos o raio e traçamos com um compasso a circunferência que passa pelos três pontos iniciais; (e) Apagamos o raio; (f) Obtemos finalmente a circunferência que passa pelos três pontos dados.

### Inscrição do triângulo equilátero na circunferência

A figura 6 representa a inscrição de um triângulo equilátero em uma circunferência.



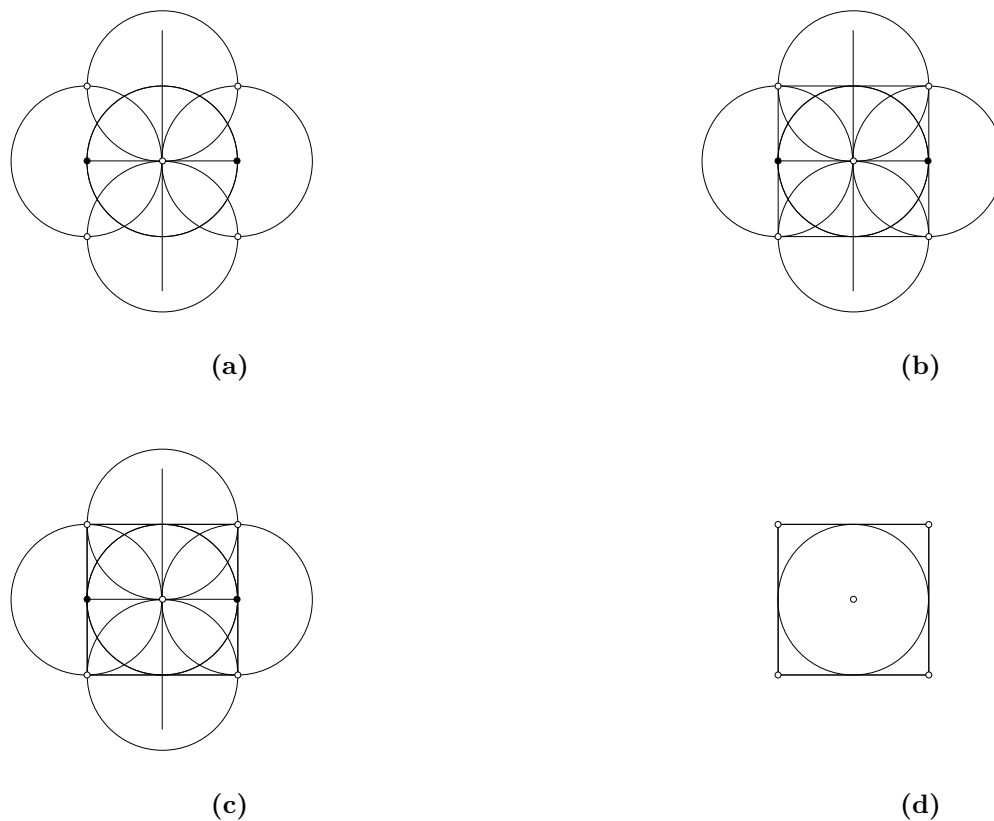
**Figura 6.** – Inscrição do triângulo equilátero na circunferência. (a) Circunferência dividida em quatro partes iguais; (b) Traçamos outra circunferência com centro na outra extremidade; (c) Traçamos mais três circunferências. marcamos com pontos duas das quatro interseções das circunferências auxiliares com a circunferência principal e a interseção superior da circunferência principal com a vertical; (d) Apagamos as circunferências auxiliares e ficamos com a circunferência dividida em quatro partes iguais e os três pontos das interseções; (e) Traçamos com a régua as retas que ligam os três pontos das interseções; (f) Apagamos as retas perpendiculares para ressaltar o triângulo equilátero. Temos assim um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência.

Como descrito na figura 6, traçamos nova circunferência com centro em uma das extremidades e de mesmo raio da circunferência original e outra circunferência com centro

na extremidade oposta e de mesmo raio da primeira circunferência. Marcamos com dois pontos as duas interseções da circunferência central com a reta vertical. Traçamos uma circunferência com centro em uma das extremidades onde marcamos com um ponto e outra circunferência com centro na outra extremidade onde marcamos com outro ponto. Marcamos com dois pontos as interseções das circunferências em seguida apagamos as circunferências auxiliares. Traçamos em seguida as retas necessárias para obtermos o triângulo equilátero inscrito na circunferência.

### Circunscrição do quadrado na circunferência

Como terceira demonstração vamos construir na figura 7 um quadrado, a partir das construções utilizadas na demonstração anterior.



**Figura 7.** – Circunscrição do quadrado na circunferência. (a) A partir das construções feitas na figura anterior marcamos os quatro pontos das interseções das circunferências auxiliares; (b) Traçamos os quatro segmentos de reta que formam o quadrado circunscrito a circunferência principal; (c) Ressaltamos os traços para ficarem mais escuros; (d) Apagamos as construções auxiliares e obtemos o quadrado circunscrito desejado.

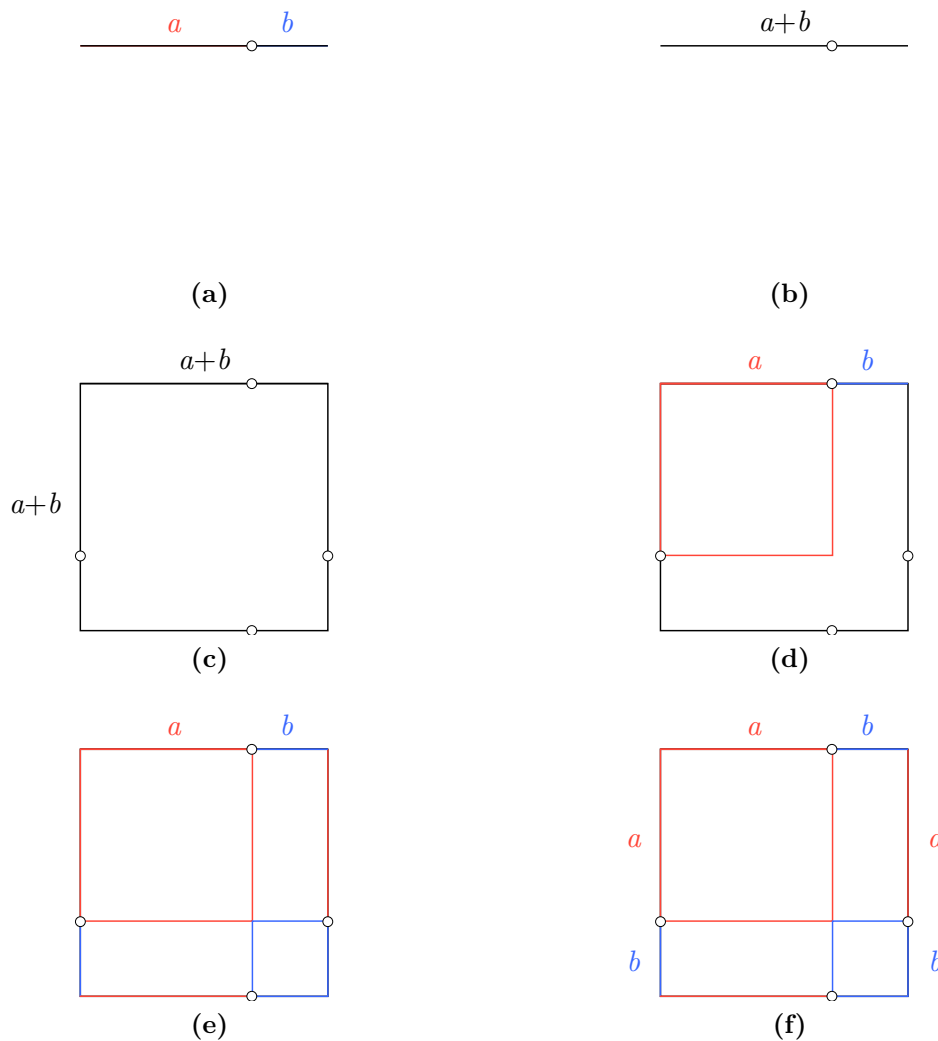
Como indicado na figura 7, onde temos a circunferência central e as quatro circunferências auxiliares, marcamos os quatro pontos das interseções das circunferências auxiliares e traçamos os quatro segmentos de reta que formam o quadrado circunscrito a circunferência principal, apagamos as circunferências auxiliares, clareamos a circunferência principal



e apagamos as retas perpendiculares para então obtermos o quadrado circunscrito a circunferência principal.

### 2.2.1 Produtos notáveis

Nesta etapa vamos mostrar as propriedades geométricas dos produtos notáveis, representadas na figura 8, que também serão úteis para a modelagem do movimento.



**Figura 8.** – Produtos notáveis. (a) União dos segmentos de reta  $a$  e  $b$ ; (b) Traçamos uma reta para que os dois segmentos se tornem um único segmento representado por  $a+b$ ; (c) Representação do quadrado de lado  $a+b$ ; (d) Dentro desse quadrado, desenhamos outro, um quadrado de lado  $a$ ; (e) Em seguida um quadrado de lado  $b$ ; (f) Temos uma figura com dois quadrados e dois retângulos. Chamando o lado de um dos quadrados internos de  $a$  e o do outro quadrado de  $b$ , o lado do quadrado original será  $a+b$ .

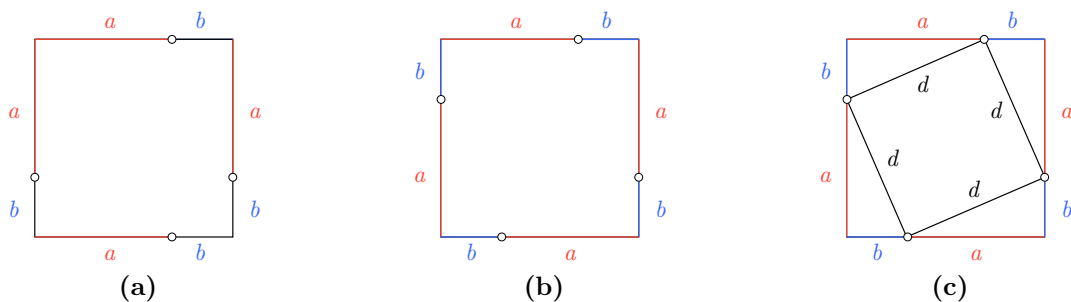
Iniciamos a construção unindo dois segmentos de reta de tamanhos diferentes e marcamos o ponto que une os dois. Traçamos uma reta para que os dois segmentos se tornem um único segmento, igual a  $(a+b)$ . Em seguida desenhamos um quadrado de lado igual a este segmento. Dentro desse quadrado, desenhamos dois quadrados e dois retângulos,

que compõem o quadrado original, mas de lados diferentes. A área do quadrado maior pode ser representada através da soma das áreas:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2. \quad (2.1)$$

### 2.2.2 O teorema de Pitágoras

Começamos novamente com a construção de um quadrado, igual ao da figura 8(f), como indicado na figura 9.



**Figura 9.** – Teorema de Pitágoras. (a) De posse da construção da figura 8, apagamos as linhas perpendiculares que dividem o quadrado em dois retângulos e dois quadrados. (b) Invertemos os dois segmentos. (c) Agora conectamos os pontos extremos de  $a$  e  $b$ . Deste modo, construímos um quadrado interno ao inicial. Nessa construção, além do quadrado interno, existem quatro triângulos, semelhantes entre si.

Entretanto, dessa vez, representamos seus lados como  $c = a + b$ . Em seguida conectamos os pontos extremos de  $a$  e  $b$  assim temos a construção de um quadrado inscrito, de lado  $d$ , através da união dos pontos extremos  $a$  e  $b$ . Deste modo, construímos um quadrado interno ao inicial. Nessa construção, além do quadrado interno, existem quatro triângulos, semelhantes entre si. Chamamos o lado do quadrado maior de  $c$ , o lado do quadrado menor de  $d$ , a base dos triângulos de  $b$  e a altura dos mesmos de  $a$ . A área do quadrado maior pode ser escrita como

$$c^2 = d^2 + 4 \left( \frac{ab}{2} \right). \quad (2.2)$$

Analogamente a (2.1), temos que

$$c^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2. \quad (2.3)$$

Logo, o lado direito de (2.3) é igual ao lado direito de (2.2) e, deste modo,

$$d^2 + 4 \left( \frac{ab}{2} \right) = a^2 + 2ab + b^2. \quad (2.4)$$

Podemos então concluir que

$$d^2 = a^2 + b^2, \quad (2.5)$$

onde  $d$  é a hipotenusa do triângulo retângulo e  $a$  e  $b$  são os seus respectivos catetos.

### 2.2.3 Médias da Grécia Antiga

De acordo com os registros, a Grécia Antiga existiu de 2000 a 146 anos a.C. e foi o berço de nossa civilização ocidental. Ela foi habitada por Tales, Sócrates, Platão e tantos outros personagens que nos deixaram um legado em diversas áreas do conhecimento. Os gregos antigos tiveram a capacidade de desenvolver grandes ideias que influenciaram diretamente a nossa sociedade e uma delas, especial para esse trabalho, é a representação geométrica, a forma de ver geometricamente a natureza como um todo. Nesta seção, faremos as construções geométricas de três das diferentes médias da Grécia Antiga que nos serão muito úteis na descrição do movimento.

Existem diversas médias e diferentes formas de apresentá-las. Porém, de forma bem simples, podemos representar geometricamente a média entre dois comprimentos de acordo com a figura 10.



**Figura 10.** – Representação de uma média  $z$  entre dois comprimentos  $a$  e  $b$ .

#### Média aritmética $z_A$

Sejam os três seguimentos de comprimentos  $a$ ,  $z_A$  e  $b$ , representados pela figura 10, tais que a diferença entre os comprimentos  $a$  e  $z_A$  é igual à diferença entre os comprimentos  $z_A$  e  $b$ . A construção geométrica dessa média está representada nas figura 11(b) e algebricamente é expressa por

$$\frac{z_A - a}{b - z_A} = 1. \quad (2.6)$$

Solucionando (2.6) para  $z_A$ , obtemos a média aritmética de  $a$  e  $b$ :

$$z_A = \frac{a + b}{2}. \quad (2.7)$$

#### Média geométrica $z_G$

Sejam os três seguimentos de comprimentos  $a$ ,  $z_G$  e  $b$ , representados pela figura 11(a), tais que a razão entre os comprimentos  $z_G$  e  $a$  seja igual à razão entre os comprimentos  $b$  e

$z_G$ . A raiz quadrada do produto dos dois comprimentos corresponde à média geométrica. Algebricamente este resultado é obtido a partir da relação

$$\frac{z_G}{a} = \frac{b}{z_G}. \quad (2.8)$$

Solucionando (2.8) para  $z_G$ , obtemos a média geométrica de  $a$  e  $b$ :

$$z_G = \sqrt{ab}. \quad (2.9)$$

Portanto, uma das formas de calcular a raiz quadrada de um número  $a$  é através da sua média geométrica com a unidade ( $b = 1$ ).

Utilizando o método dos gregos antigos, sem o uso de números e somente pelas construções geométricas representadas pelas figuras 11(b) até 11(f) podemos demonstrar (2.9). De posse das construções geométricas indicadas na figura 11, temos um triângulo retângulo cuja hipotenusa é a média aritmética entre os comprimentos iniciais  $a$  e  $b$ . Da figura, se um cateto for  $(a - b)/2$  o outro cateto será a média geométrica entre os comprimentos  $a$  e  $b$ . De fato, aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo da figura e chamando de  $x$  o segmento de reta perpendicular a reta  $ab$ , obtemos que

$$\begin{aligned} x^2 &= \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \\ &= ab. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Logo, o comprimento perpendicular a  $a$  e igual a  $x$  corresponde a media geométrica  $z_G$ :

$$x = \sqrt{ab}. \quad (2.11)$$

### Média harmônica $z_H$

A média harmônica está relacionada às situações envolvendo as grandezas inversamente proporcionais. Para os dois comprimentos dados inicialmente, a média harmônica deles é sempre a menor das três médias, enquanto que a média aritmética é sempre a maior das três e a média geométrica está sempre em um valor intermediário. Sua representação algébrica é

$$\frac{z_H - a}{a} = \frac{b - z_H}{b} \quad (2.12)$$

ou também na forma

$$\frac{2}{z_H} = \frac{a+b}{ab}. \quad (2.13)$$

Logo, podemos escrever que

$$\frac{2}{z_H} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}. \quad (2.14)$$

Também podemos determinar  $z_H$  através das construções geométricas representadas nas figuras 11(e) e 11(f). Algebricamente, temos que

$$\frac{ab}{z_H} = \frac{a+b}{2} \quad (2.15)$$

ou, ainda,

$$\frac{\sqrt{ab}\sqrt{ab}}{z_H} = \frac{a+b}{2}. \quad (2.16)$$

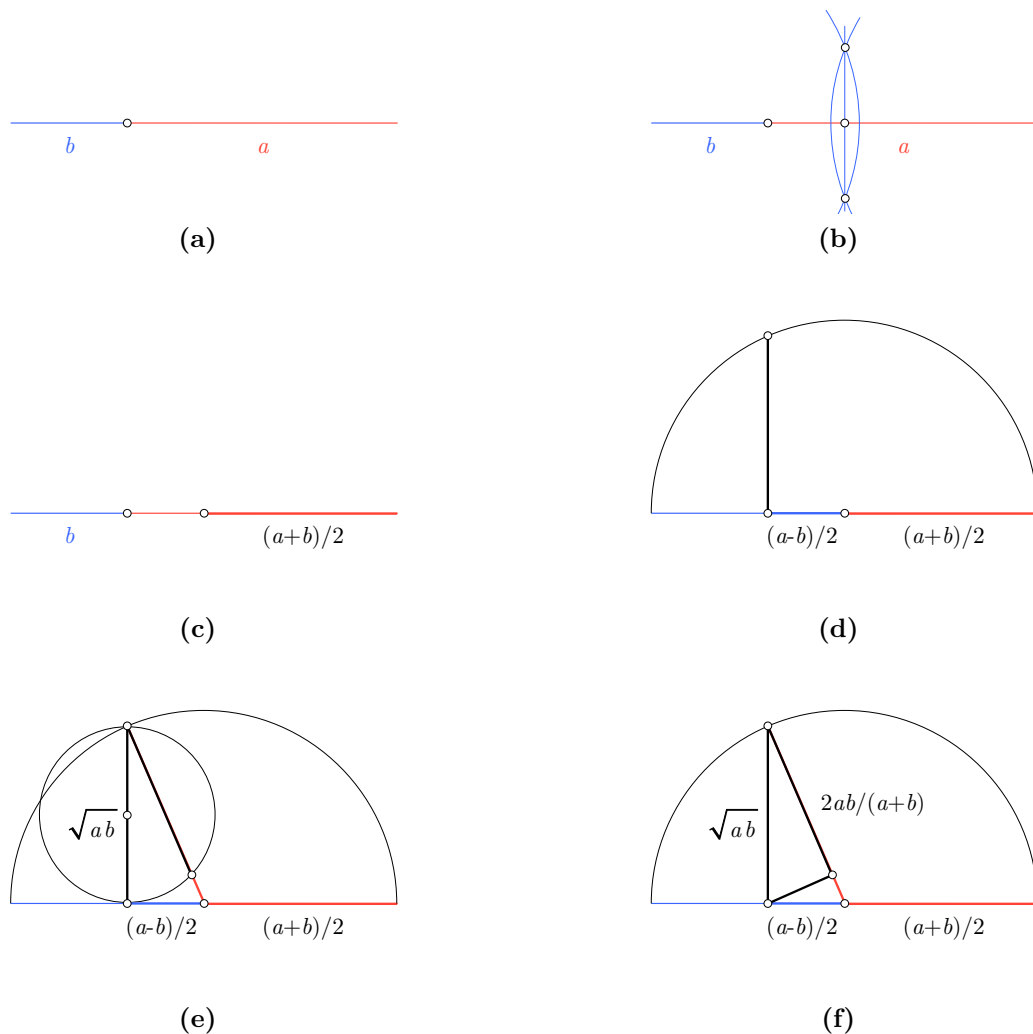
Observamos que (2.16) pode ser reescrita na forma

$$\frac{\sqrt{ab}}{z_H} = \frac{(a+b)/2}{\sqrt{ab}}. \quad (2.17)$$

Finalmente, podemos concluir que

$$\frac{z_G}{z_H} = \frac{z_A}{z_G}. \quad (2.18)$$

Estas três médias eram as médias à época de Pitágoras, e as suas construções geométricas são discutidas por Eves (2003) e estão representadas na figura 11. Mais tarde, outras médias foram adicionadas pelos pitagóricos e, de fato, hoje temos uma lista de médias empregadas em matemática bastante extensa. Para o nosso trabalho nos limitaremos as três médias pitagóricas.



**Figura 11.** – Médias. (a) União dos segmentos de reta  $a$  e  $b$ ; (b) Com o compasso traçamos dois arcos de circunferência nas extremidades, marcamos os pontos as interseções dos arcos, traçamos um segmento de reta que une os dois pontos e marcamos com outro ponto a interseção da reta traçada; (c) Apagamos as construções e temos o ponto que divide o segmento original em duas partes iguais, ou seja, a média aritmética; (d) Traçamos em seguida um arco de circunferência cujo raio coincide com a média aritmética, marcamos o segmento de reta  $(a - b)/2$  e traçamos uma reta perpendicular ao segmento original  $ab$  na união dos segmentos; (e) Traçamos também o raio da circunferência de modo a formar um triângulo retângulo e geometricamente temos a média geométrica representada pelo segmento perpendicular ao segmento original  $ab$ ; (f) Pelas construções apresentadas anteriormente achamos o ponto médio desse segmento, em seguida traçamos uma circunferência cujo raio tem metade do valor da média geométrica e marcamos com um ponto a interseção dessa curva com o raio da circunferência. Apagamos a circunferência para melhor visualização e por fim podemos determinar geometricamente a relação entre as médias nos triângulos retângulo.

### 2.2.4 A constante de Arquimedes

O número  $\pi$ , também conhecido como a constante de Arquimedes, é uma das descobertas mais fascinantes da matemática. O cálculo do valor exato de  $\pi$  ocupou os matemáticos por muitos séculos, desde os babilônicos que já conheciam a relação entre a circunferência de um círculo e seu diâmetro onde a razão era maior do que 3. Para os egípcios, no entanto, o valor era outro, mais exato,

$$\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = \frac{256}{81} = 3,16 . \quad (2.19)$$

Existem varias hipóteses sobre como os egípcios obtiveram este valor. Struve (1930 apud COOLIDGE, 2003) reconstrói a história desta descoberta a partir da comparação do perímetro do círculo de raio  $R$  com o perímetro do quadrado circunscrito a este mesmo círculo. De algum modo os egípcios chegam a conclusão que esta razão corresponde a razão  $64/81$  e, portanto,

$$\frac{2\pi R}{8R} = \frac{64}{81}. \quad (2.20)$$

Como (2.19) indica, esta é uma boa aproximação para o valor de  $\pi$ .

Os gregos foram os primeiros a mostrar por quais motivos é sempre a mesma a razão entre o perímetro e o diâmetro das circunferências de círculos de tamanhos distintos. Trata-se de uma simples propriedade das figuras semelhantes. Na Antiguidade, Arquimedes foi quem mais aproximou o valor de  $\pi$  ao seu valor real, representando o perímetro da circunferência pelo perímetro de polígonos regulares de 12, 24, 48 e 96 lados. Por este seu método, Arquimedes estabelece uma limitação para  $\pi$ :

$$223/71 < \pi < 22/7, \quad (2.21)$$

ou seja, o valor de  $\pi$  está no intervalo compreendido pela relação

$$3,141 < \pi < 3,143 . \quad (2.22)$$

#### Área da circunferência

Nesta etapa das demonstrações geométricas, utilizamos o método descrito por Beckmann (1976) e por Coolidge (2003) que consiste na obtenção de uma relação entre a área de um quadrado de lado  $R$  e a área  $A$  de um círculo. Começamos o processo desenhando um círculo, de raio  $R$ , e um quadrado também de lado igual  $R$ , como indicado na figura 12(a). Em seguida, para facilitar a visualização do método, utilizamos apenas o quadrante onde se encontram o quadrado e o arco de circunferência de comprimento  $P/4$ . Podemos escrever, então, uma relação entre a área do quarto de círculo,  $A/4$ , com a área do quadrado de lado  $R$ . Da figura 12(b) temos que

$$A/4 \lesssim R^2 \quad (2.23)$$

ou

$$A \lesssim 4R^2. \quad (2.24)$$

Dividimos agora a área desse quadrado em nove partes iguais, como indicado na figura 12(c). Dessa forma, a área do quadrado equivale a nove divisões, enquanto que a área do quarto de círculo equivale à, aproximadamente, sete divisões. Podemos escrever então que

$$A \approx 4(7/9)R^2. \quad (2.25)$$

Assim, em uma primeira aproximação, podemos escrever

$$A \approx 3,11R^2. \quad (2.26)$$

Aumentamos o número de divisões para 36, como indicado na figura 12(d). A área do quadrado passa a equivaler agora a 36 divisões, enquanto que a área do quarto de círculo equivale agora à, aproximadamente, 28 divisões. Podemos escrever, então, que a área do círculo corresponde agora a

$$A \approx 4(28/36)R^2 \quad (2.27)$$

ou, ainda, nesta nova aproximação, que

$$A \approx 3,11R^2, \quad (2.28)$$

Aumentando novamente o número de divisões, agora para 81, ficamos com a imagem indicada na figura 12(e). Temos agora 81 divisões equivalentes à área do quadrado e, aproximadamente, 64 divisões equivalentes à área do quarto de círculo. Portanto, a área  $A$  do círculo corresponde à

$$A \approx 4(64/81)R^2 \quad (2.29)$$

ou, ainda,

$$A \approx 3,16R^2. \quad (2.30)$$

Este resultado é semelhante ao resultado dos egípcios antigos para valor de  $\pi$ . Dizemos então que, no limite, a área do círculo é linearmente proporcional à área do quadrado. Vamos agora extrapolar as divisões para 324, como indicado na figura 12(f). Dessa forma, serão 324 subdivisões equivalentes à área do quadrado e, aproximadamente, 255 subdivisões equivalentes à área do quarto de círculo. Deste modo, podemos determinar a constante de proporcionalidade com maior precisão:

$$A \approx 4(255/324)R^2. \quad (2.31)$$

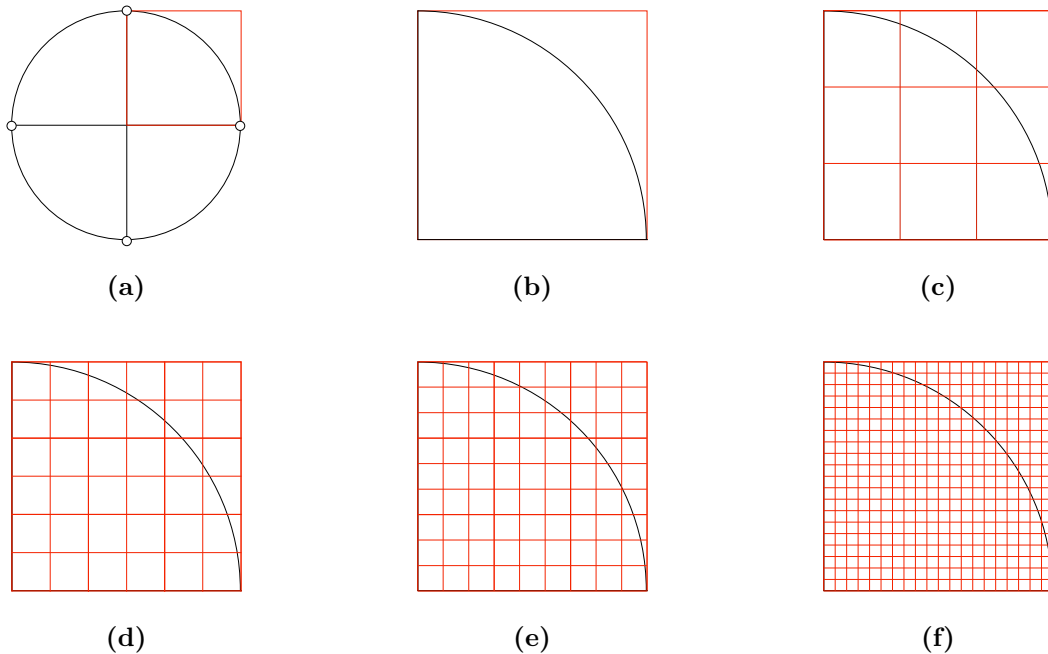
Finalmente, conhecido o raio  $R$  do círculo podemos determinar a sua área pela expressão

$$A \approx 3,14R^2. \quad (2.32)$$



Se denominarmos essa constante pela letra grega  $\pi$ , estabelecemos o seguinte resultado:

$$A = \pi R^2. \quad (2.33)$$



**Figura 12.** – Área do círculo. (a) Primeira etapa do processo para obtenção da área de um círculo de raio  $R$  e um quadro também de lado  $R$ . (b) Segunda etapa: representação do quadrado de lado  $R$  que contém o arco de circunferência de tamanho  $A$  com representação de apenas um quadrante para facilitar a visualização do procedimento. (c) Continuação do processo: divisão do quadrado de lado  $R$  em nove partes iguais. (d) Quarta etapa: aumento da divisão do quadrado para 36 partes iguais. (e) Quinta etapa: ampliação das divisões do quadrado para 81 partes iguais. (f) Etapa final: extrapolação da divisão do quadrado em 324 partes iguais.

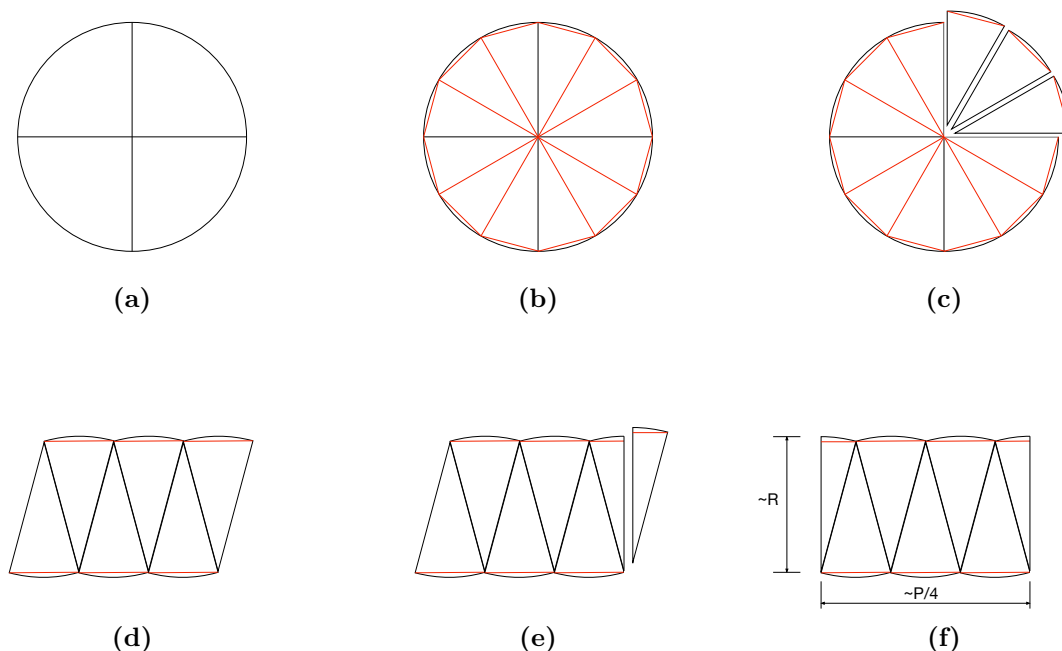
### Perímetro da circunferência

O comprimento  $P$  da circunferência de raio  $R$  também pode ser determinado através de uma construção geométrica. Para obtê-lo, iremos relacionar a área e o perímetro de um polígono regular com a área círculo, que agora conhecemos.

Começamos o processo como da forma anterior, desenhando um círculo, de raio  $R$ . Com o compasso, traçamos os arcos de circunferência de mesmo raio  $R$  de maneira a dividir a circunferência principal em doze partes iguais. Assim, construímos um dodecágono regular, inscrito na circunferência. Observamos que a área deste polígono é bastante próxima à área do círculo. Com uma régua, uniremos os pontos do polígono diametralmente opostos e, dessa maneira, formamos 12 triângulos idênticos.

Na etapa seguinte, “recortamos” seis desses triângulos contidos no primeiro quadrante. Eles são suficientes para o nosso objetivo. O próximo passo é agrupá-los, da maneira

indicada na figura 13(d). Em seguida recortamos metade de um dos triângulos da extremidade. Esta fatia pode ser encaixada no triângulo da outra extremidade, formando assim, uma figura que se assemelha à um retângulo.



**Figura 13.** – Perímetro da circunferência. (a) Representação do círculo de raio  $R$  dividido em quatro partes iguais; (b) Divisão do círculo em doze partes iguais. Representação de um dodecágono regular inscrito no círculo de raio  $R$ ; (c) Recorte dos triângulos semelhantes; (d) Agrupamento dos seis triângulos recortados; (e) Recorte de um dos triângulos da extremidade; (f) Acoplamento do triângulo recortado na outra extremidade, formando uma figura que se assemelha à um retângulo. Ficamos com um retângulo de altura semelhante ao raio da circunferência e de comprimento semelhante à um quarto do perímetro do polígono.

Considerando-se um polígono com um número muito maior de lados, a altura do retângulo composto pelos triângulos recortados corresponde praticamente ao raio da circunferência inicial, enquanto que o comprimento desta figura – que equivale à um quarto do perímetro do polígono –, em um polígono de muitos lados corresponde praticamente ao perímetro  $P$  da circunferência. Como representação do final do processo ficamos com um “retângulo” de altura semelhante ao raio da circunferência e de comprimento semelhante à um quarto do perímetro da circunferência.

A partir da figura 13, podemos escrever então uma relação entre a área do retângulo e a área da metade circunferência:

$$\left(\frac{P}{4}\right) R = \frac{A}{2}. \tag{2.34}$$

Deste modo, conhecido o raio  $R$  e a área  $A$  do círculo, o perímetro da sua circunferência também é determinado a partir da expressão

$$P = \frac{2A}{R}. \tag{2.35}$$

Substituindo (2.33) em (2.35), concluímos então, que o perímetro  $P$  de uma circunferência é linearmente proporcional ao seu raio  $R$  e o fator de proporcionalidade é igual a  $2\pi$ :

$$P = 2\pi R. \quad (2.36)$$

### 2.2.5 Medida de qualquer ângulo

Nesta seção definimos geometricamente a forma de medir o ângulo  $\theta$ , ou seja, o grau de inclinação de uma reta em relação à outra. Observamos na seção 2.2.2 que podemos determinar o comprimento de um segmento de reta conhecendo-se as coordenadas euclidianas dos seus extremos. Como indicado na figura 14(a). Traçamos, com o auxílio de um compasso, um arco de circunferência de raio  $u$ . Novamente, com o compasso, traçamos um arco de circunferência de tamanho  $R$ , que passa por um ponto  $M$ , como indicado nas figura 14(b) e 14(c). Com uma régua traçamos os catetos  $a$  e  $b$  de um triângulo retângulo, como representado na figura 14(d). Em seguida, procedemos de forma similar, descrevendo uma outra circunferência de raio  $R$  e cujos catetos são  $x$  e  $y$ , representados na figura 14(e). Por último, traçamos os arcos de comprimento  $L$  e  $S$ , representados na figura 14(f).

A partir dessa construção podemos, pela semelhança entre as figuras, concluir que

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y}. \quad (2.37)$$

Logo,

$$\frac{S}{R} = \frac{L}{u}; \quad (2.38)$$

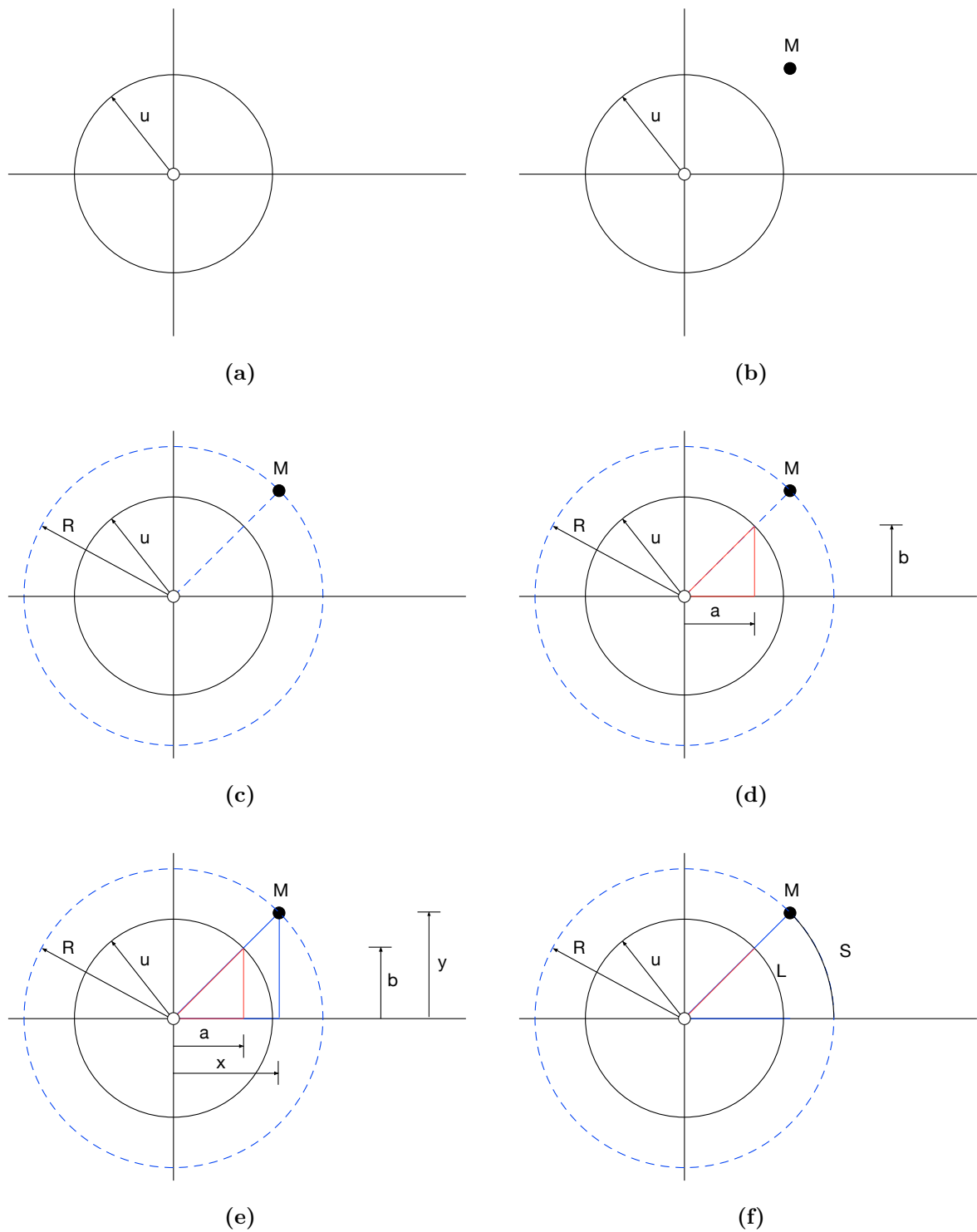
ou, ainda, que

$$S = \frac{RL}{u}. \quad (2.39)$$

Podemos escolher  $u$  como unidade de medida e expressar  $R$ ,  $L$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $x$  e  $y$  em unidades de  $u$ . Definimos o ângulo  $\theta$  como a razão  $\theta = L/u$ . Lembramos que o angulo definido desta maneira é expresso em radianos. Desta forma, o comprimento do  $S$  do arco de circunferência é dado por

$$S = R\theta. \quad (2.40)$$

Finalmente, determinamos a orientação do ponto  $M$  em relação a reta orientada colinear a  $x$ , em função da “inclinação”  $\theta = L/u$ .



**Figura 14.** – Medida de um ângulo qualquer. (a) Circunferência de raio  $u$ ; (b) Circunferência de raio  $u$  e o ponto  $M$ ; (c) Circunferência de raio  $R$  que passa pelo ponto  $M$ ; (d) Triângulo retângulo que possui catetos iguais a  $a$  e  $b$ ; (e) Triângulo retângulo que possui catetos iguais a  $x$  e  $y$ ; (f) Arcos de circunferência de comprimentos  $L$  e  $S$ .

## 3 Uma visão geométrica do movimento

### 3.1 A partícula

É comum ao ensinarmos Física, na parte de cinemática, fazermos a descrição de um objeto sem fazer referência às suas dimensões. Afirmamos simplesmente que ele é um ponto material. Mas o que vem a ser algo sem dimensão? Tudo o que conhecemos possui, mesmo que mínimo, um certo tamanho. De onde vem a ideia de um objeto ter dimensão desprezível?

O primeiro registro desse tipo foi escrito pelo filósofo e matemático grego Euclides como definição 1 no livro I de sua obra, onde ele escreve que “um ponto é aquilo de que nada é parte”; ou seja, a Física traz essa definição geométrica em uma situação específica para descrever a cinemática de uma partícula. Assim, qualquer corpo pode ser considerado uma partícula desde que as suas dimensões não sejam relevantes na descrição que queremos realizar.

Uma motocicleta pode ser considerada como uma partícula se desejamos descrever uma viagem sua do Rio de Janeiro a Minas Gerais: indicamos as duas cidades em um mapa, traçamos sua trajetória e cada ponto desta linha é associado a posição da motocicleta. Por outro lado, se quisermos estudar os movimentos de ultrapassagem dessa mesma motocicleta em um horário de bastante engarrafamento na cidade do Rio de Janeiro, não podemos considerá-la como uma partícula. Nesta nova situação suas dimensões são relevantes para o problema, uma vez que é preciso desviá-la dos carros sem causar acidentes. Deve ficar claro com esse exemplo que um corpo pode ou não ser considerado como partícula, dependendo da situação em questão. Por esse motivo é que não afirmamos simplesmente que uma partícula é um corpo de dimensões desprezíveis, mas que é um corpo de dimensões desprezíveis em uma dada situação. De posse dessa definição, iniciamos o estudo sobre o movimento dessa partícula.

A cinemática se ocupa em descrever o movimento de um corpo sem levar em consideração as suas causas. Desta maneira, para construirmos a cinemática de uma partícula, precisamos observar a mudança de posição do corpo pontual em um dado instante de tempo. Entretanto, a determinação de posição de um corpo e a sua variação dependem do observador. A experiência nos revela que podemos ter diversos observadores e cada um deles observa diferentes trajetórias associadas ao movimento do mesmo corpo. Assim, a descrição de uma trajetória particular associada ao movimento da partícula está associada a um dado referencial.

## 3.2 O referencial

Nesta seção definimos o referencial: um observador munido de réguas e relógios. Para que possamos descrever o movimento de um corpo precisamos observá-lo. Mas isso não faz com que o observador seja necessariamente uma pessoa. Ele pode ser representado por um corpo, um ser sem vida. Como Tonnelat (1971) descreve em seu livro:

“Neste livro usaremos frequentemente a palavra “observador”. Mas não nos iludamos. Esta expressão não estará comportando a ideia de um ser pensante, suscetível de dispor suas percepções em opiniões subjetivas e eventualmente deformá-las.

O observador é o suporte desencarnado, porém, no entanto, material, ao qual está ligado um sistema de referência e, com isto, uma possibilidade de mensuração. O observador é munido de réguas e relógios, mas desprovido de paixões. Ele efetua medidas com o auxílio dos seus instrumentos; ele observa coincidências. Sua “humanidade” termina aí.

Empregaremos sempre a palavra “observador” nesse sentido, que não comporta nem subjetivismo nem julgamento de valor. E não falaremos mais sobre a ausência de todo caráter antropomórfico de tais observadores.”

As réguas e relógios mencionados por Tonnelat fazem parte de um sistema de referência que possibilita ao observador do movimento de um corpo, ou partícula, mensurar sua mudança de posição em um dado intervalo de tempo, em relação a um referencial. Como Einstein (2003) observa:

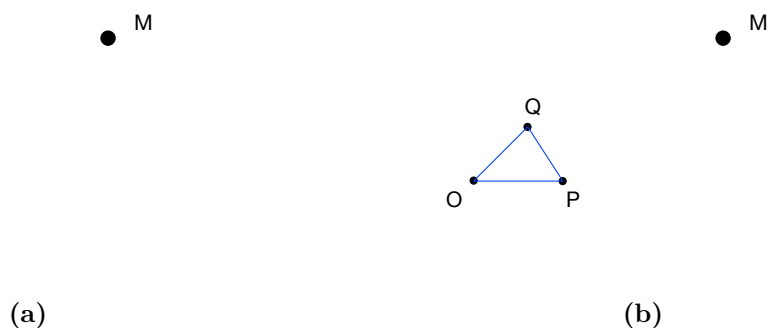
“A Mecânica tem que descrever como corpos, com o tempo, modificam sua posição no espaço. Neste caso estaria onerando minha consciência com alguns pecados graves contra o espírito da santa clareza; esses pecados precisam logo ser desmascarados.

Não está claro o que devemos compreender aqui por posição e espaço. Suponhamos que eu me encontre junto à janela do vagão de um trem que viaja uniformemente e que deixe cair uma pedra sobre o leito da estrada, sem lhe conferir nenhum impulso inicial. Então (abstraindo do efeito da resistência do ar) eu vejo a pedra cair em linha reta. Um pedestre que esteja observando minha ação a partir do solo observa que a pedra cai à terra percorrendo um arco de parábola. Pergunto, então: as “posições” seguidas pela pedra estão situadas, na realidade, sobre uma reta ou sobre uma parábola? Além disto, o que significa aqui movimento no espaço? Começamos, portanto, por deixar de lado está obscura palavra espaço, com a qual, para sermos sinceros, não somos capazes de imaginar coisa alguma; em lugar de espaço falaremos em movimento em relação a um corpo de referência praticamente rígido. Introduzindo, em lugar de corpo de referência, o conceito de sistema de coordenadas, que é mais vantajoso para a descrição matemática, podemos dizer: em relação a um sistema de coordenadas rigidamente ligado ao vagão, a pedra descreve uma reta; em relação a um sistema de coordenadas rigidamente ligado ao solo, a pedra descreve uma parábola. Com este exemplo, vemos claramente que não existe uma trajetória em si, mas apenas uma trajetória em relação a um determinado corpo de referência.”

### 3.2.1 O corpo

A partir das definições e construções geométricas apresentadas no capítulo 2, construímos geometricamente um sistema de referência e os instrumentos necessários para a localização de uma partícula. Em um espaço qualquer, simbolizado por uma folha em branco, construímos o referencial usado nos livros textos de física, utilizando as definições geométricas de Euclides e instrumentos de desenho, tais como régua e compasso.

Começamos a nossa construção representando um corpo  $M$  por um ponto, no espaço (plano do papel), como mostra a figura 15(a). Para localizarmos sua posição neste sistema, precisamos de um ponto de referência  $O$  (origem), situado em uma região qualquer da folha. Contudo, apenas o ponto  $O$  não é suficiente para caracterizar completamente a posição de  $M$  em relação a  $O$ . Para nos auxiliar na localização do corpo  $M$  usaremos mais dois pontos no plano, indicados por  $P$  e  $Q$ . Existem apenas duas exigências para esses pontos: que a distância entre eles seja invariante e que eles sejam não-colineares, como indicado na figura 15(b).

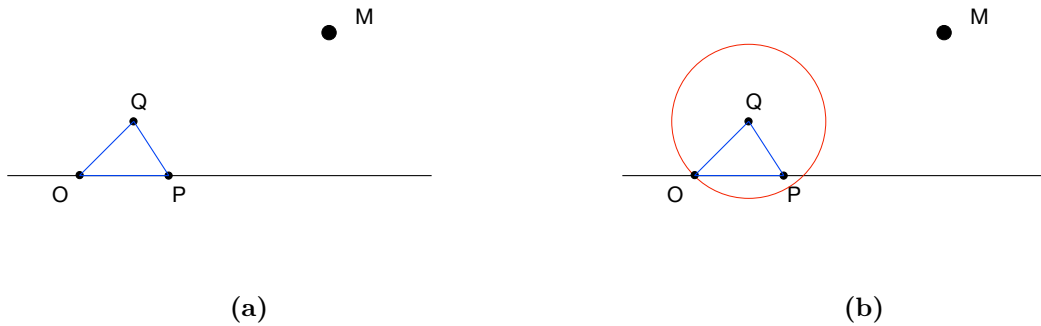


**Figura 15.** – Construção geométrica do referencial. (a) Representação do ponto  $M$  no plano da folha de papel; (b) Representação do ponto  $M$  e do corpo de referência  $OPQ$  no plano da folha.

O conjunto desses três pontos define o nosso “corpo de referência”. Com os pontos  $P$  e  $Q$ , e utilizando uma régua, traçamos uma linha entre dois desses pontos, como ilustrado na figura 16(a). esta construção revela a necessidade dos pontos  $O$ ,  $P$  e  $Q$ : pelo axioma 1 de Euclides, para definirmos uma reta precisamos de, pelo menos, dois pontos. Para a definição de um plano no qual o corpo está inserido precisamos, contudo, pela definição 6, de duas retas concorrentes.

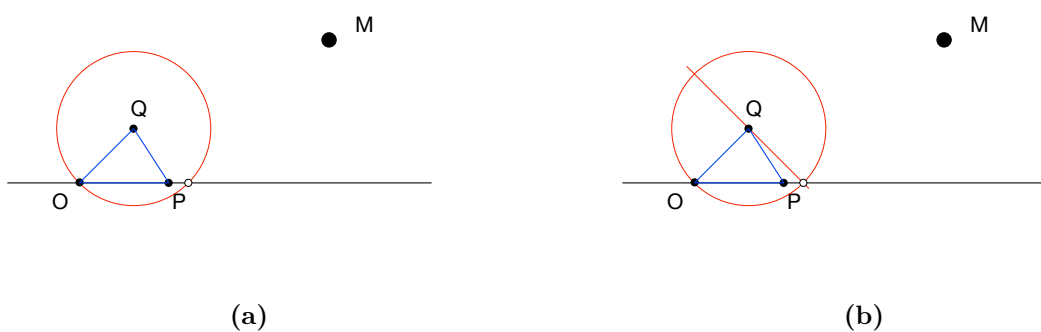
Para chegarmos ao plano construído por Descartes precisamos de duas retas que sejam perpendiculares entre si. Com um compasso, traçamos um arco de circunferência e seguimos a definição 15: utilizamos o ponto  $Q$  como centro da figura e a distância entre os

pontos O e Q como o raio desse arco de circunferência. O resultado deste procedimento está ilustrado na figura 16(b).



**Figura 16.** – Construção geométrica do referencial (cont.). (a) Construção da reta OP segundo o corpo OPQ, pelo axioma um de Euclides; (b) Descrição do arco de circunferência de raio QO e centro em Q.

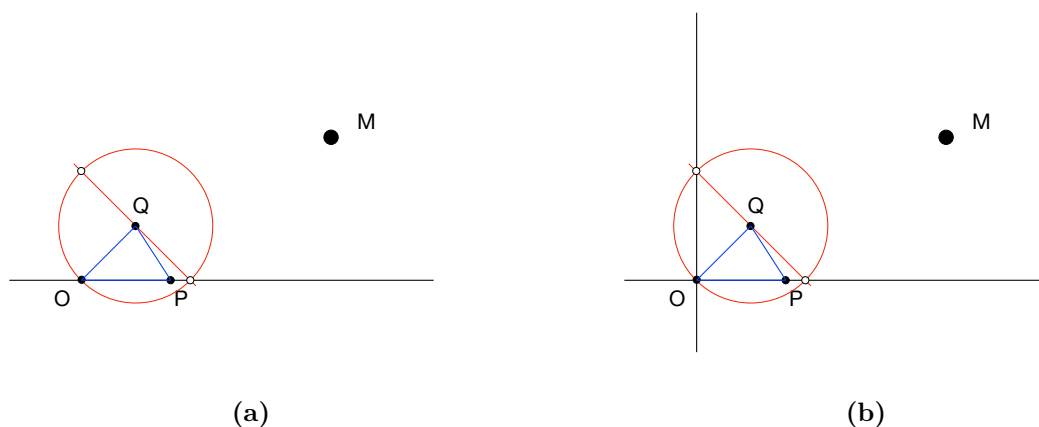
Em seguida marcamos com um ponto a interseção do arco de circunferência com a reta que passa pelos pontos O e Q, como representado na figura 17(a). Usamos esse arco de circunferência auxiliar para criar uma reta perpendicular à primeira. Traçamos assim um segmento de reta que passa pelo ponto Q e pelo ponto da interseção do arco de circunferência com a reta que passa pelos pontos O e Q. Marcamos com mais um ponto a outra interseção do último segmento de reta traçado, como indicado na figura 17(b).



**Figura 17.** – Construção geométrica do referencial (cont.). (a) Representação da interseção do arco de circunferência com a reta que passa pelos pontos O e Q; (b) Segmento de reta que passa pelo ponto Q e pelo ponto da interseção do arco de circunferência com a reta que passa pelos pontos O e Q.

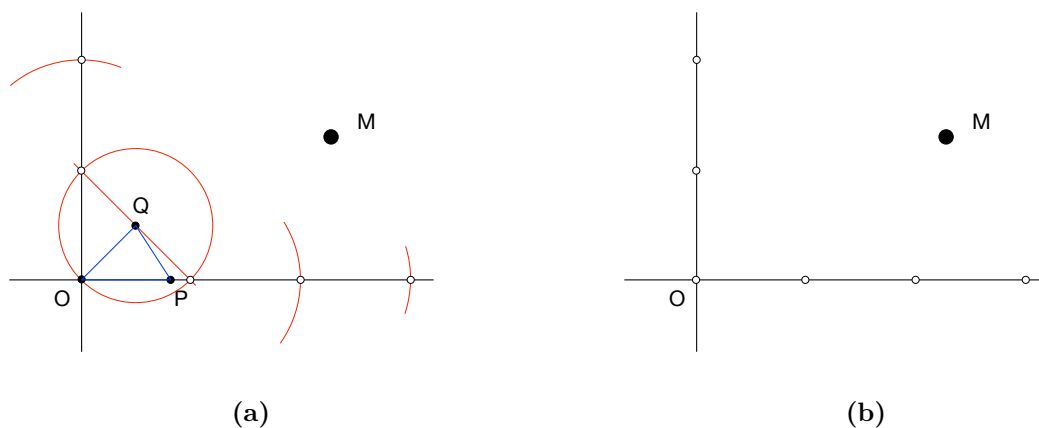


Como representado na figura 18(a), traçamos um segmento de reta que passa por esse ponto e pelo ponto  $O$ . Deste modo, construímos uma segunda reta  $e$ , com ela, o “comprimento” e a “largura” de um plano ortogonal onde podemos localizar o corpo  $M$  em relação à  $O$ . O resultado está ilustrado na figura 18(b).



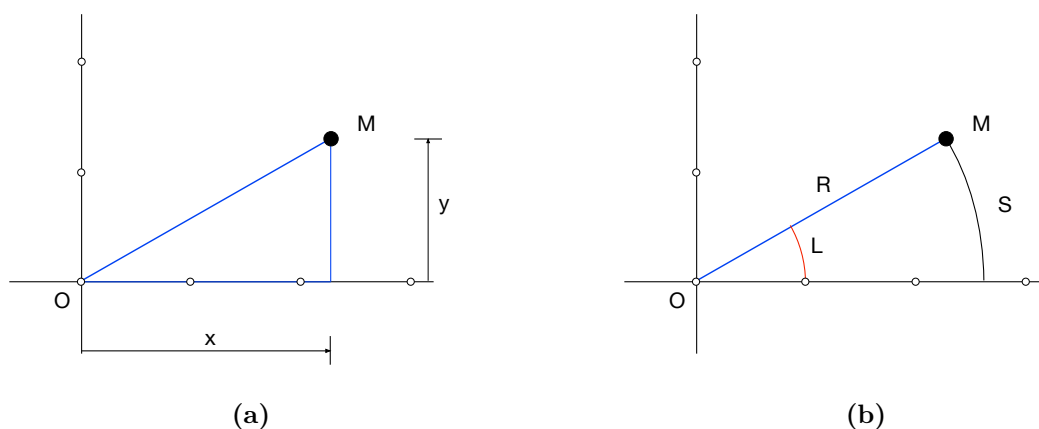
**Figura 18.** – Construção geométrica do referencial (cont.). (a) Interseção da reta com a circunferência; (b) Construção da reta congruente a  $OP$ : construção da reta perpendicular à reta  $OP$ .

Para a localização do corpo  $M$ , uma unidade de medida de comprimento se faz necessária. Para tal, usamos a distância entre dois pontos da circunferência auxiliar como unidade de medida  $e$ , como representado na figura 19(a), mapeamos todo o espaço utilizando um compasso. Apagamos as construções auxiliares e temos agora um sistema de referência euclidiano, representando as abscissas, na horizontal e as ordenadas, na vertical. A figura 19(b) ilustra esta última etapa.



**Figura 19.** – Construção geométrica do referencial (cont.). (a) Representação do mapeamento do espaço; (b) Sistema de referência euclidiano, representando as abscissas, na horizontal e as ordenadas, na vertical.

Através dessa construção geométrica, somos capazes de localizar o corpo em qualquer região do plano (euclidiano) em relação ao observador  $O$ . A maneira com a qual descrevemos essa posição é que pode variar. Podemos localizar o ponto  $M$ , também geometricamente, por pelo menos duas maneiras conhecidas: as coordenadas cartesianas, associadas aos catetos de um triângulo retângulo cuja hipotenusa corresponde à distância ao ponto móvel, e as coordenadas polares, que adota a distância o ponto móvel e a medida da sua inclinação à uma reta de referencia, ambos discutidos no capítulo 2. A localização do corpo  $M$  em coordenadas cartesianas está representada na figura 20(a) e em coordenadas polares na figura 20(b).



**Figura 20.** – Construção geométrica do referencial (cont.). (a) Localização do ponto  $M$  em coordenadas cartesianas, medidas de latitude e longitude do corpo  $M$ ; (b) Localização do ponto  $M$  em coordenadas polares, circunferência de raio unitário e representação dos comprimentos  $L$ ,  $R$  e  $S$  que localizam o ponto  $M$ .

### 3.2.2 O relógio

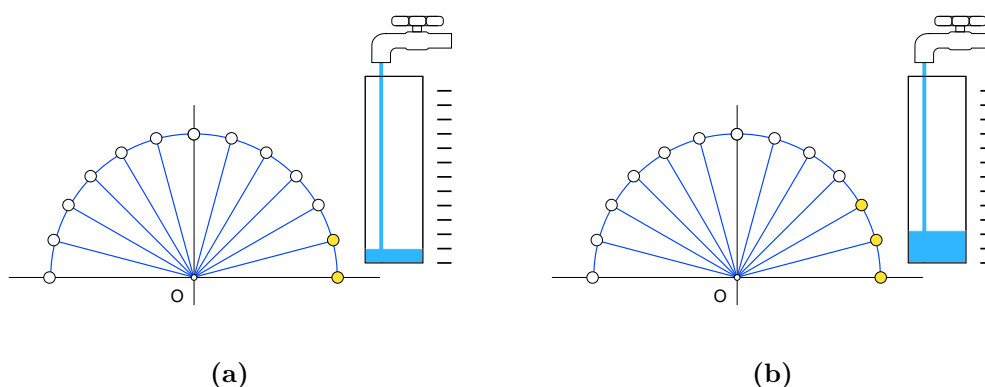
Para completar a descrição do movimento de uma partícula precisamos estabelecer uma relação entre os deslocamentos que ela realiza, descrito na seção 3.2.1, com a sua duração. Para isso precisamos definir o que vem a ser a duração de um evento para podermos estabelecer a duração do movimento dessa partícula.

#### Construção do relógio

Para calibrarmos um medidor de intervalos de tempo precisamos montar um aparato que combine seu funcionamento com algo natural e que possua um ciclo regular como, por exemplo, o movimento do Sol. Aprendemos com Feather (1961) e Savoie (2009) que um dos primeiros marcadores de duração de tempo foi o relógio de Sol. Aprendemos também que seu movimento relativo não se dá com uma regularidade perfeita porém com uma aproximação. Podemos então apresentar ao aluno uma forma de medir geometricamente

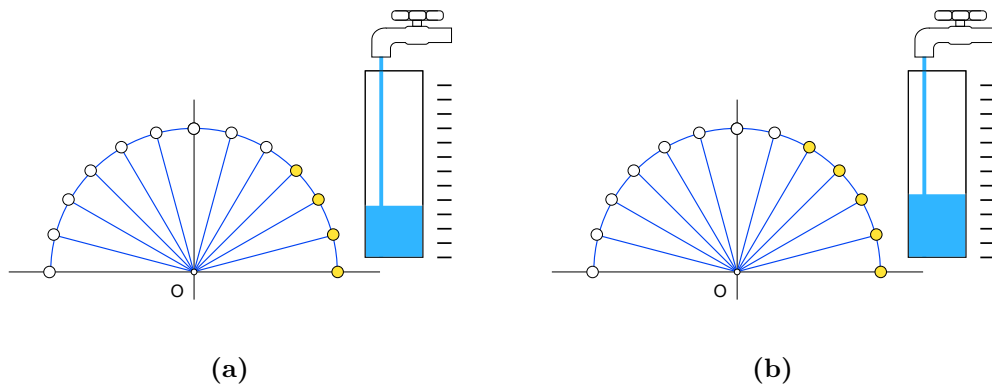
uma duração temporal do movimento do Sol ao longo de um dia, por exemplo. Para isto, construímos um aparato conhecido mas bem intuitivo de observação do movimento solar e explorado ainda na época de Galileu.

Temos uma torneira que possui uma vazão. Combinamos o fluxo de água através da torneira com o movimento do Sol e observamos que, conforme o dia transcorre, podemos registrar simultaneamente as orientações do Sol no céu e a quantidade de água que a torneira libera. Assim, como indicado na figura 21(a), registramos que entre os instantes do nascer do Sol até ele se por, a torneira libera uma quantidade de água que pode ser determinada por uma régua. Este movimento está indicado nas figuras 22, 23, 24, 25 e 26. A duração do movimento relativo do Sol, ao longo do primeiro  $1/12$  avos de sua trajetória, é comparado com a duração para preencher este primeiro volume da água jorrada da torneira. Este primeiro avo da trajetória solar é definido como a unidade de tempo. Ao observarmos a figura 21(b) percebemos que o Sol varre a mesma área relativa da figura anterior. Porém, a quantidade de água que foi liberada pela torneira não é a mesma quantidade de água liberada anteriormente.<sup>1</sup>

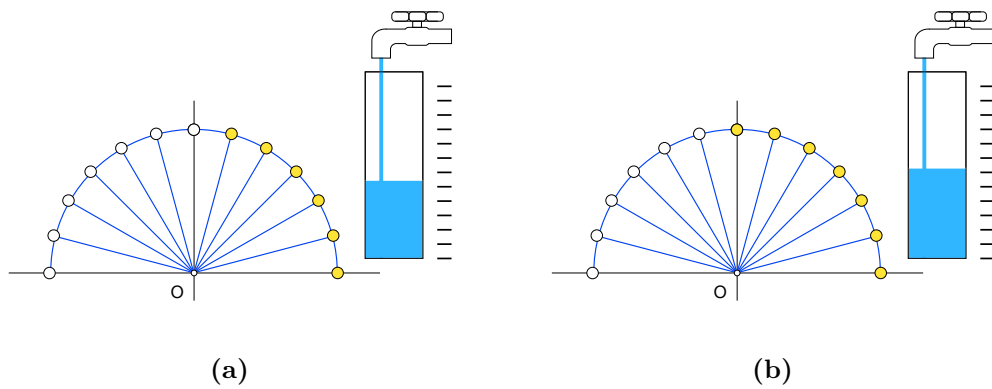


**Figura 21.** – Construção do relógio a partir do movimento relativo do Sol desde o nascente até o poente e a altura correspondente da coluna de água. (a) O movimento relativo do Sol ao longo do primeiro  $1/12$  avos de sua trajetória, comparado com a vazão de água da torneira. Este primeiro avo é definido como a unidade de tempo; (b) O movimento relativo do Sol, ao longo de  $2/12$  avos de sua trajetória, comparado com a altura da coluna de água da mesma torneira.

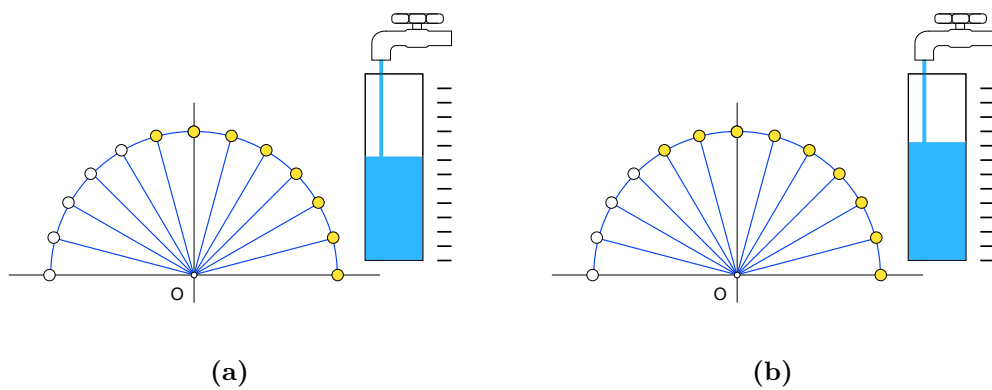
<sup>1</sup> Savoie (2009, p. 34) chama a atenção para o fato dos antigos relógios registrarem horas de duração variável até a Idade Média. O dia era dividido em doze partes iguais não importando a estação do ano.



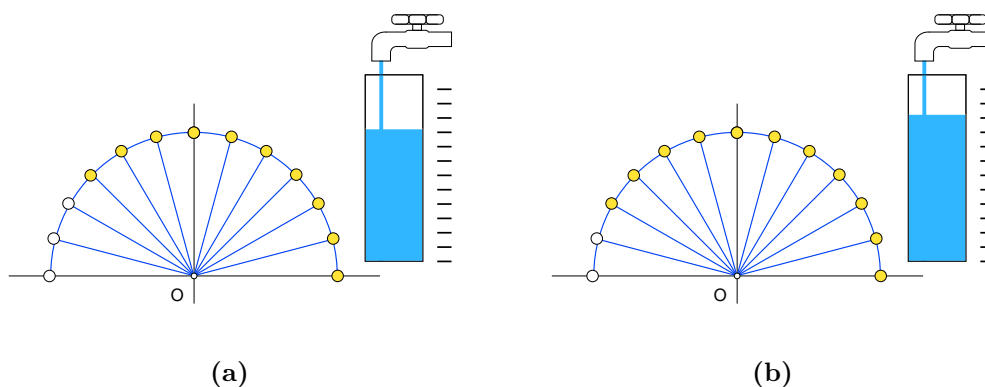
**Figura 22.** – Construção do relógio (cont.). (a) O Sol continua varrendo a mesma área e a torneira liberando uma certa quantidade de água; (b) O Sol realiza seu movimento e torneira continua a liberar água.



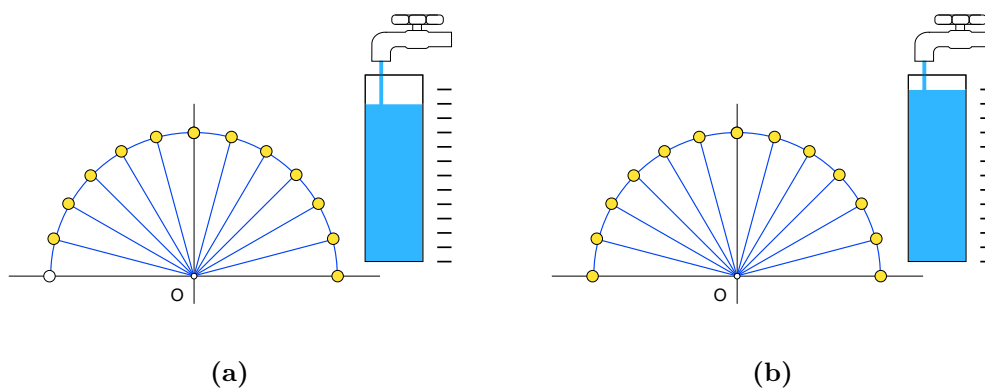
**Figura 23.** – Construção do relógio (cont.). (a) A água segue preenchendo o reservatório e o sol continua realizando seu movimento relativo ; (b) O Sol percorreu metade do seu percurso enquanto a torneira liberou uma certa quantidade de água.



**Figura 24.** – Construção do relógio (cont.). (a) Como a torneira possui vazão constante, os deslocamento relativos do Sol ao longo da circunferência deixam claro que seu movimento não é sempre constante; (b) O Sol continua seu movimento enquanto a água continua a preencher o recipiente.



**Figura 25.** – Construção do relógio (cont.). (a) O recipiente está quase todo preenchido e o Sol está quase terminando o seu percurso; (b) O recipiente continua sendo preenchido pela água que sai da torneira enquanto o Sol está quase terminando o seu percurso.

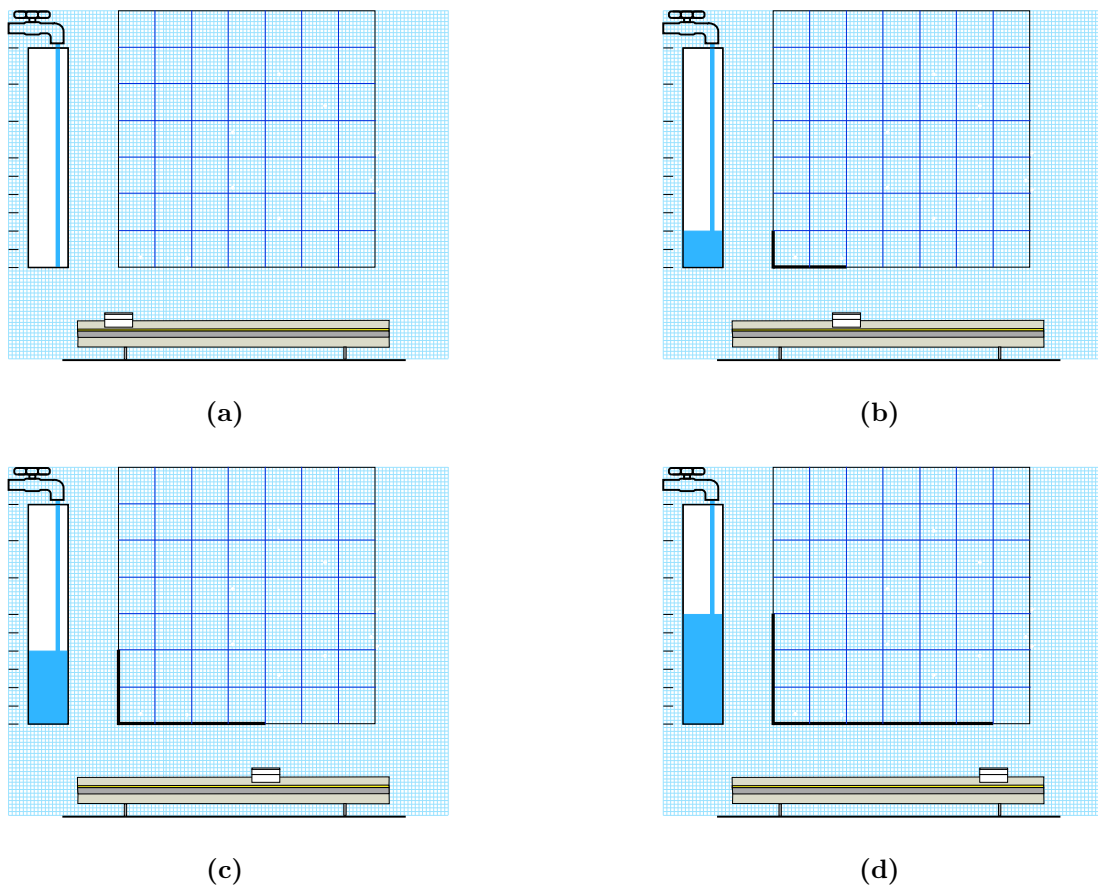


**Figura 26.** – Construção do relógio (cont.). (a) O Sol chega próximo ao final do seu percurso e o recipiente com o nível de água aumentando; (b) O Sol termina o seu percurso e o recipiente está com o seu nível registrado para um dia.

### 3.3 O movimento da partícula

Observamos na figura 27 o movimento de uma corpo ao longo de um trilho retilíneo e o descrevemos em relação ao trilho. Consideramos nosso móvel um corpo pontual, e construímos um diagrama representando os seus deslocamentos sucessivos e as respectivas durações desses deslocamentos.<sup>2</sup> Deste modo, as sucessivas posições da partícula são registradas no eixo horizontal do diagrama e os intervalos de tempo correspondentes, medidos com o “nosso relógio de água produzido pela nossa torneira”, são registrados na orientação vertical do mesmo diagrama.

<sup>2</sup> Clagett (1968) chama a nossa atenção para o fato desta técnica de representação do movimento já ter sido definida por Oresme 250 anos antes dos trabalhos de Galileu.



**Figura 27.** – O movimento da partícula. (a) Início do movimento da partícula ao longo de um trilho; (b) Primeiro deslocamento da partícula ao longo de um trilho; (c) Segundo deslocamento da partícula ao longo de um trilho; (d) Terceiro deslocamento da partícula ao longo de um trilho.

### 3.3.1 O movimento uniforme

Traçamos retas paralelas que fazem uma relação entre  $\Delta s$  e  $\Delta t$ , como ilustrado na figura 28. A partir desta figura, definimos como velocidade média a razão entre essas duas grandezas, ou seja:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (3.1)$$

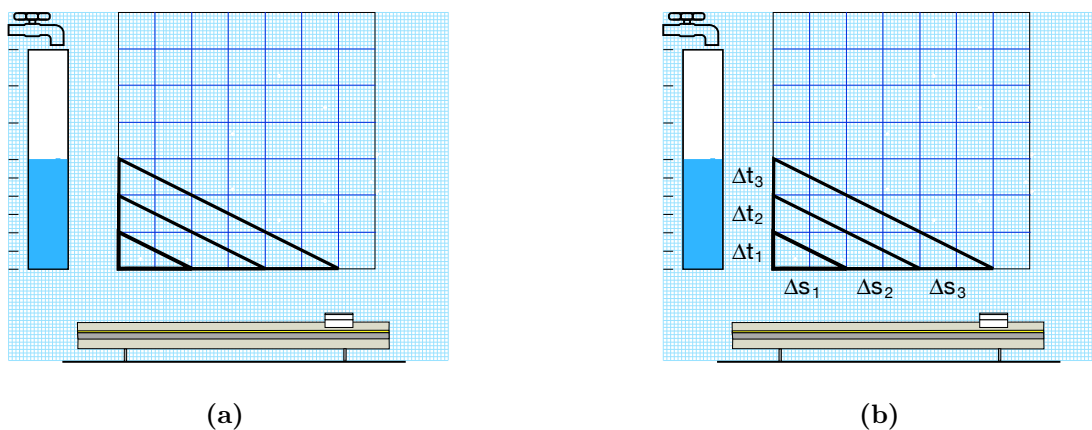
Durante a análise desse movimento observamos também que os deslocamentos realizados pela partícula e pelo preenchimento da coluna de água são constantes e, assim, podemos concluir que essa partícula percorre distâncias iguais em intervalos de tempos iguais, ou seja:

$$\frac{\Delta s_1}{\Delta t_1} = \frac{\Delta s_2}{\Delta t_2} = \frac{\Delta s_3}{\Delta t_3}. \quad (3.2)$$

Definimos então como movimento uniforme aquele movimento em que a velocidade média da partícula é a mesma em qualquer intervalo de tempo considerado ou que o módulo do deslocamento realizado em um dado intervalo de tempo é igual a distância percorrida pela partícula nesse mesmo intervalo de tempo. Por consequência para um movimento

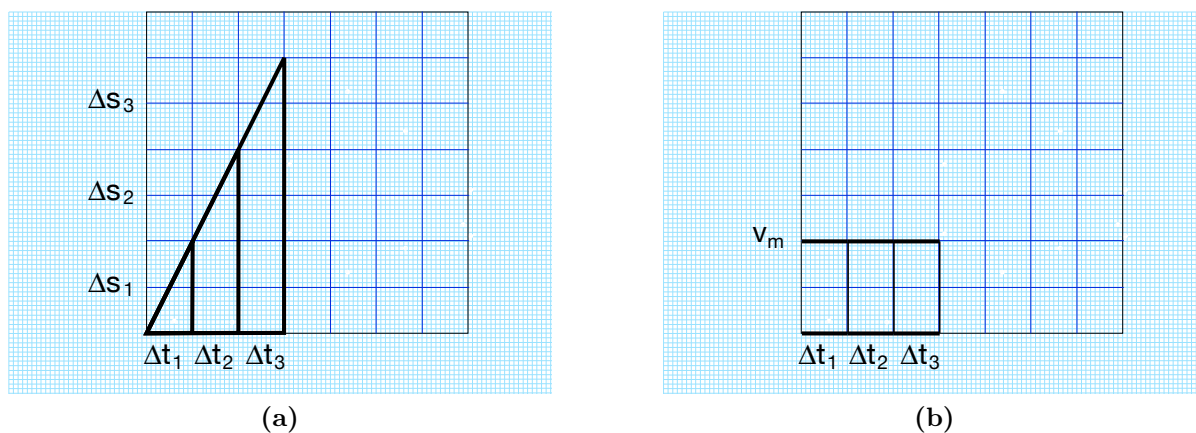
uniforme podemos concluir que

$$v_m = v_0 = \text{constante.} \quad (3.3)$$



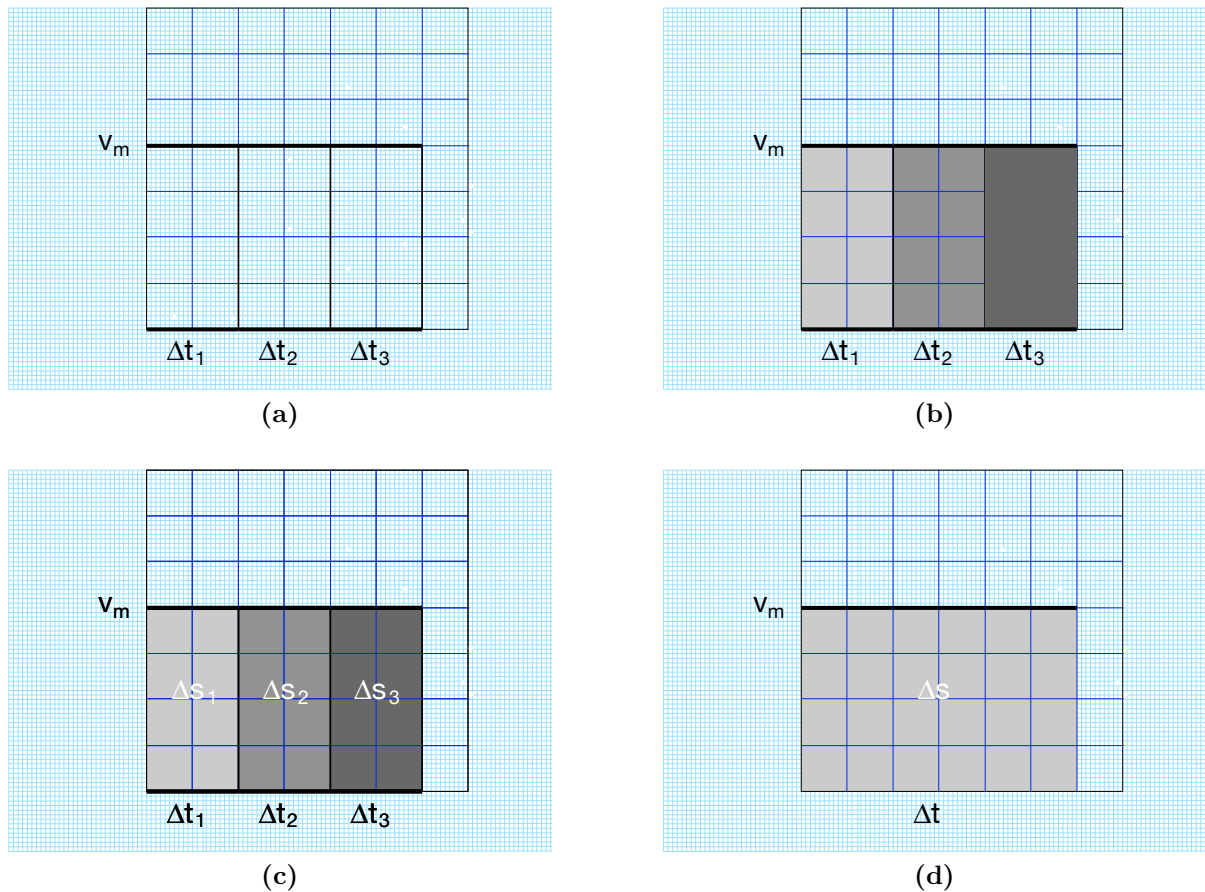
**Figura 28.** – Movimento uniforme. (a) Composição do deslocamento horizontal da partícula com o preenchimento da coluna de água na vertical; (b) Marcação dos deslocamentos horizontais com os intervalos de tempo na vertical.

Em seguida, como indicado na figura 29(a), construímos um gráfico com os deslocamentos da partícula em função dos intervalos de tempos e traçamos os segmentos de reta correspondentes. Podemos então determinar, a partir da representação gráfica ilustrada na figura, qual a posição da partícula em determinado instante de tempo a partir da adição dos diferentes deslocamentos realizados. Denominamos por velocidade a taxa de variação da posição do corpo e construímos, na figura 29(b), o gráfico da velocidade média em função do intervalo de tempo transcorrido.



**Figura 29.** – Movimento uniforme (cont.). (a) Gráfico dos deslocamentos em função do intervalo de tempo transcorrido; (b) Gráfico da velocidade média em função deste mesmo intervalos de tempo.

Na figura 30(a) temos a ampliação do gráfico da figura 29(b) e nas figuras 30(b), (c) e (d) temos o gráfico da velocidade média em função do tempo transcorrido na realização do movimento.



**Figura 30.** – Movimento uniforme (cont.). (a) Ampliação do gráfico da velocidade média em função do intervalo de tempo transcorrido na realização do movimento; (b) Área do gráfico definida pela velocidade média em função deste intervalo de tempo; (c) Cálculo geométrico dos deslocamentos da partícula nos três intervalos de tempo considerados; (d) Determinação geométrica do deslocamento total da partícula através da área do gráfico.

Uma análise mais detalhada da figura 30 também nos revela que a área sob a curva indicativa da velocidade média corresponde ao deslocamento realizado pelo móvel no intervalo de tempo considerado:

$$\Delta s = v_0 \Delta t = \text{área da curva sob o gráfico.} \quad (3.4)$$

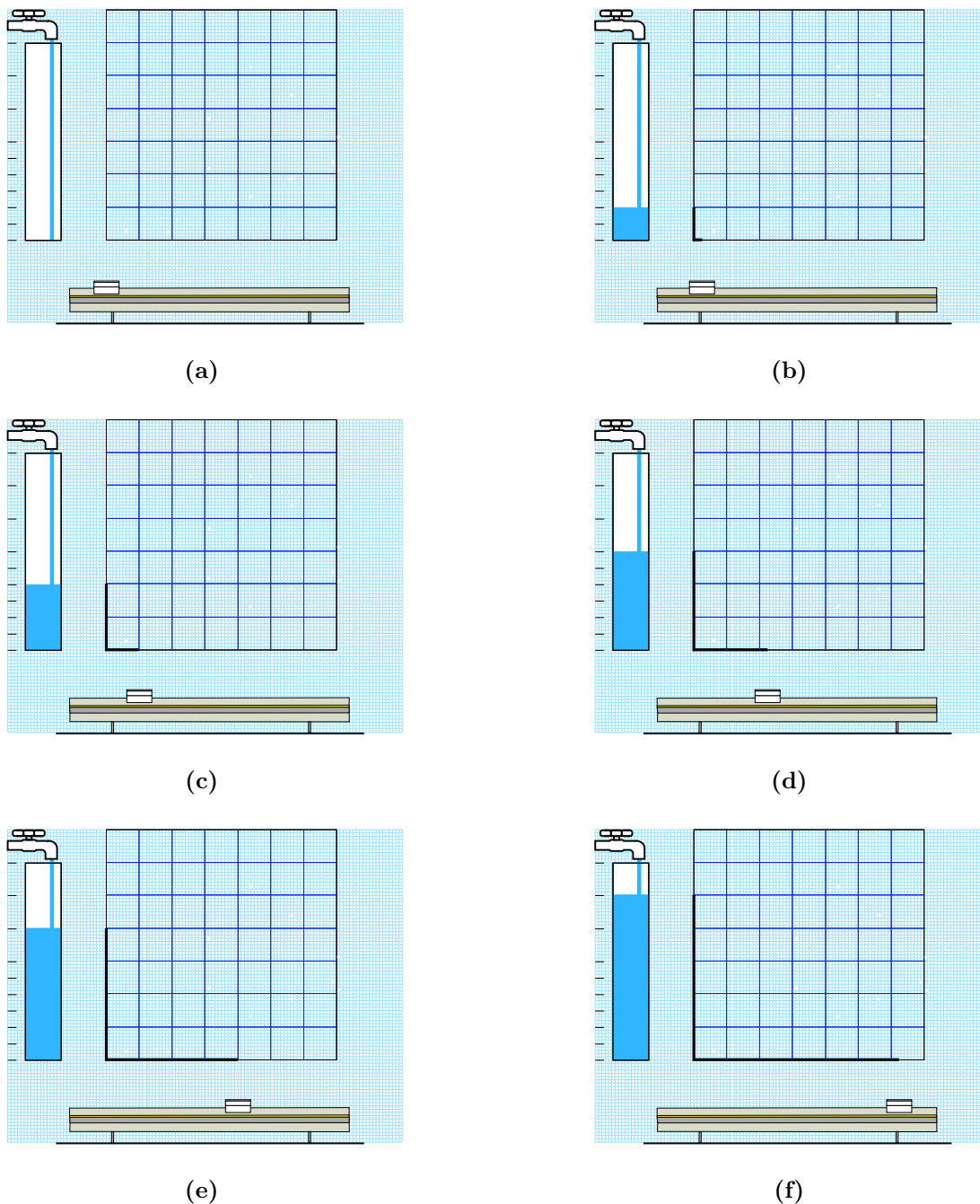
Deste modo, a partir a figura geométrica da figura podemos obter a expressão algébrica para descrever a posição do corpo em função do tempo:

$$s - s_0 = v_0 \Delta t. \quad (3.5)$$



### 3.3.2 O movimento uniformemente variado

Descrevemos na figura 31 o movimento uniformemente variado realizado por uma partícula.



**Figura 31.** – Movimento uniformemente variado. (a) Início do movimento da partícula ao longo de um trilho; (b) Primeiro deslocamento da partícula ao longo de um trilho; (c) Posição da partícula após o segundo deslocamento ao longo do trilho, que é três vezes maior que o seu deslocamento no primeiro intervalo de tempo; (d) Partícula no terceiro deslocamento ao longo do trilho, cinco vezes maior que o primeiro deslocamento realizado; (e) Posição da partícula após o quarto deslocamento ao longo do trilho, que é sete vezes maior que o seu primeiro deslocamento; (f) Posição final da partícula no quinto instante de tempo. Esta última posição corresponde a nove unidades de deslocamento.

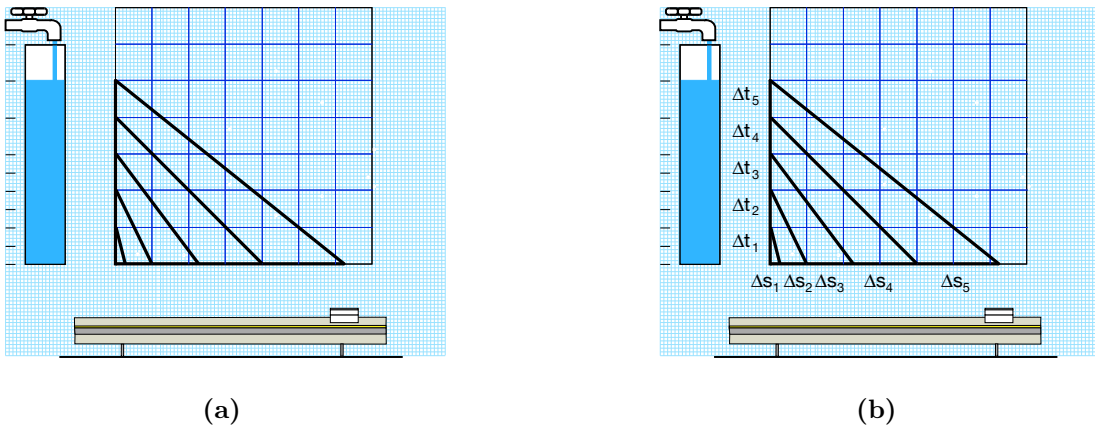
Representamos na figura 31 o diagrama posição vs. tempo de modo que as sucessivas posições da partícula ao longo do trilho são registradas na horizontal. O nosso relógio ainda é o relógio de água, onde esses intervalos de tempo são registrados na csua coluna vertical.

Ao analisarmos o movimento dessa partícula, de acordo com nosso referencial, podemos concluir que ela descreve um movimento em linha reta e seus deslocamentos estão em proporção com os números ímpares a partir da unidade, a saber, 1, 3, 5, 7 e 9, de modo que, da figura, podemos escrever

$$\frac{\Delta s_1}{\Delta s_1} = 1, \frac{\Delta s_2}{\Delta s_1} = 3, \frac{\Delta s_3}{\Delta s_1} = 5, \frac{\Delta s_4}{\Delta s_1} = 7, \dots, \frac{\Delta s_n}{\Delta s_1} = 2n - 1. \quad (3.6)$$

Na figura 32 representamos as velocidades médias desse movimento:

$$v_{m1} = \frac{\Delta s_1}{\Delta t_1}, v_{m2} = \frac{\Delta s_2}{\Delta t_2}, v_{m3} = \frac{\Delta s_3}{\Delta t_3}, v_{m4} = \frac{\Delta s_4}{\Delta t_4}, v_{m5} = \frac{\Delta s_5}{\Delta t_5}, \dots, v_{mn} = \frac{\Delta s_n}{\Delta t_n}. \quad (3.7)$$



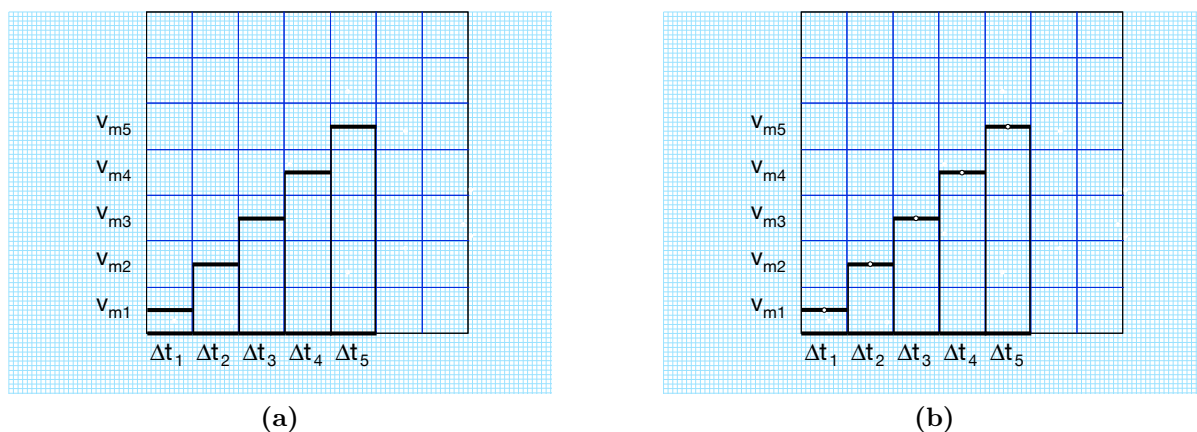
**Figura 32.** – Movimento uniformemente variado(cont.). (a) Composição do deslocamento horizontal da partícula com o preenchimento da coluna de água na vertical; (b) Representação das velocidades médias desse movimento de acordo com os deslocamentos horizontais e os intervalos de tempo registrados pela coluna de água.

De acordo com os deslocamentos horizontais e os intervalos de tempo registrados pela coluna de água, podemos perceber que essas retas não são paralelas. Deste modo, observamos também que as velocidades médias aumentam na mesma proporção dos deslocamentos:

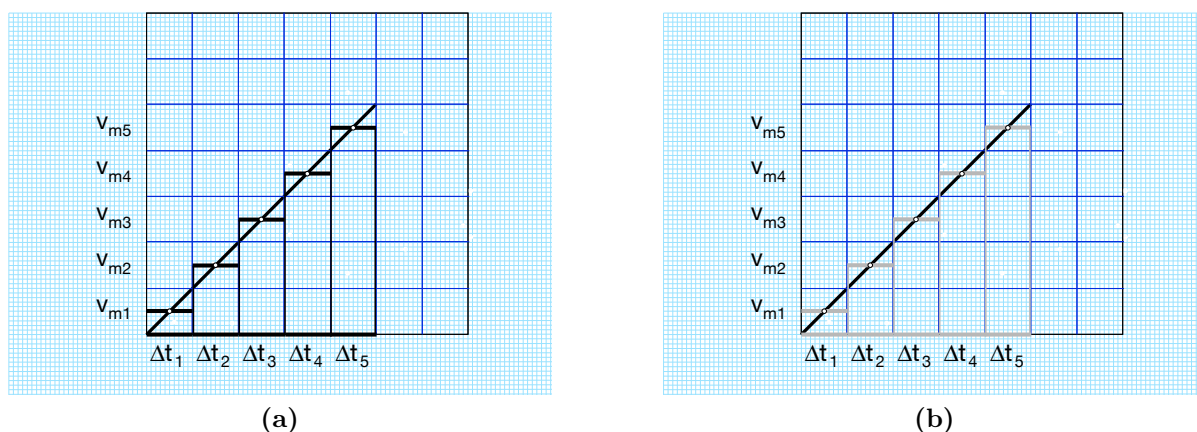
$$\frac{v_{m1}}{v_{m1}} = 1, \frac{v_{m2}}{v_{m1}} = 3, \frac{v_{m3}}{v_{m1}} = 5, \frac{v_{m4}}{v_{m1}} = 7, \dots, \frac{v_{mn}}{v_{m1}} = 2n - 1. \quad (3.8)$$

Percebemos assim que as inclinações das retas seguem aumentando a cada intervalo de tempo considerado, o que confirma um aumento na velocidade média dessa partícula. Representamos na figura 33(a) as velocidades médias associadas a cada intervalo de tempo

e, deste gráfico, como representado na figura 33(b), obtemos as velocidades instantâneas  $v_n$  correspondentes aos instantes médio aritméticos da reta traçada a partir das velocidades médias. Finalmente, na figura 34 representamos o gráfico da velocidade em função do tempo transcorrido pelo móvel na realização do seu movimento.



**Figura 33.** – Movimento uniformemente variado (cont.). (a) Representação das velocidades médias associadas a cada intervalo de tempo. Observe os incrementos iguais de velocidade para intervalos de tempo iguais; (b) Marcação dos pontos médio aritméticos das velocidades médias.



**Figura 34.** – Movimento uniformemente variado (cont.). (a) Representação da velocidade média e instantânea no instante médio aritmético da reta traçada pelas velocidades médias; (b) Representação somente da velocidade instantânea no instante médio aritmético da reta traçada pelas velocidades médias.

A representação geométrica dessa classe de movimento nos leva a mais uma conclusão sobre a velocidade média. Uma vez que

$$\frac{v_{m3} + v_{m1}}{2} = v_{m2}, \frac{v_{m4} + v_{m2}}{2} = v_{m3}, \dots, \frac{v_{m(n+1)} + v_{m(n-1)}}{2} = v_{mn}, \quad (3.9)$$

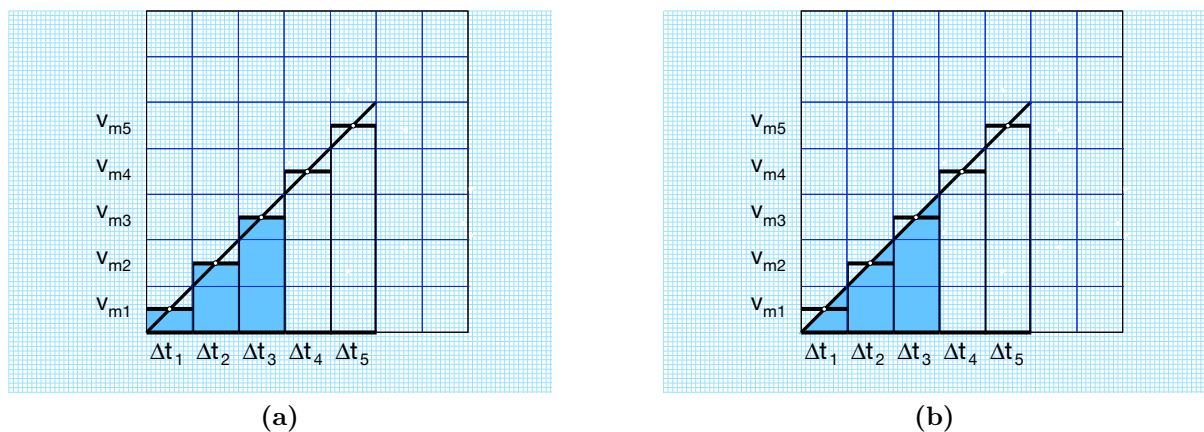
podemos deste modo escrever que a velocidade média em um dado intervalo de tempo corresponde a média aritmética das velocidades instantâneas nos instantes extremos do

intervalo de tempo considerado:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \text{m\u00e9dia aritm\u00e9tica das velocidades no intervalo de tempo.} \quad (3.10)$$

Para uma part\u00edcula que descreve um movimento uniformemente variado essa constru\u00e7\u00e3o geom\u00e9trica demonstra que a velocidade m\u00e9dia coincide com a m\u00e9dia aritm\u00e9tica das velocidades.

Podemos despertar os nossos alunos para o fato de que a \u00e1rea abaixo dos patamares de velocidade m\u00e9dia nos permite tamb\u00e9m determinar o deslocamento realizado pela part\u00edcula no intervalo de tempo considerado: fixamos o instante em que queremos determin\u00e1-la como a linha delimitadora da superf\u00edcie a ser calculada, como indicado na figura 35(a) e calculamos a \u00e1rea atrav\u00e9s da soma das \u00e1reas dos ret\u00e2ngulos; observamos que a \u00e1rea abaixo da linha de tend\u00eancia da velocidade instant\u00e2nea \u00e9 igual \u00e0 \u00e1rea abaixo dos patamares que representam as velocidades m\u00e9dias; e, finalmente, podemos conferir esse resultado atrav\u00e9s da \u00e1rea do pol\u00edgono em destaque na figura 35(b).



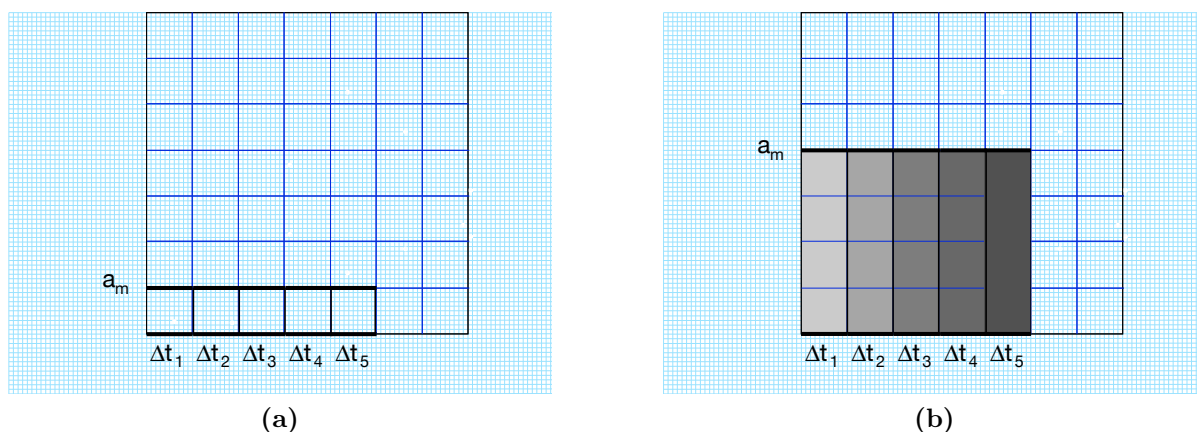
**Figura 35.** – Movimento uniformemente variado (cont.). (a) Representa\u00e7\u00e3o das \u00e1reas dos ret\u00e2ngulos; (b) Representa\u00e7\u00e3o da \u00e1rea abaixo dos patamares de velocidade m\u00e9dia nos d\u00e1 o deslocamento da part\u00edcula.

Analogamente \u00e0 defini\u00e7\u00e3o de velocidade m\u00e9dia, utilizamos o mesmo princ\u00edpio para definir o conceito de acelera\u00e7\u00e3o m\u00e9dia: a raz\u00e3o entre as varia\u00e7\u00f5es da velocidade em um dado intervalo de tempo:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \quad (3.11)$$

Da figura 36, podemos concluir geometricamente que as raz\u00f5es entre  $\Delta v$  e  $\Delta t$  \u00e9 um valor constante, de modo que, para o MUV

$$a_m = a_0 = \text{constante.} \quad (3.12)$$



**Figura 36.** – Movimento uniformemente variado (cont.). (a) Construção do gráfico aceleração média vs. intervalo de tempo; (b) Ampliação do gráfico (a). Observamos que a variação de velocidade sofrida pela partícula em um dado intervalo de tempo pode ser estabelecida a partir da figura, determinando-se a área sob o segmento de reta que representa a aceleração.

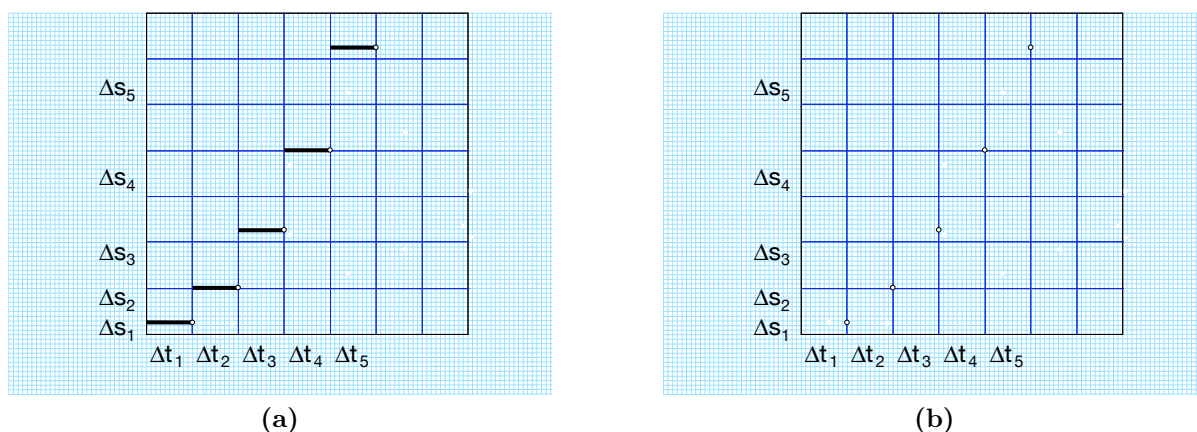
A partir da figura 36(b) demonstramos geometricamente que a variação de velocidade sofrida pela partícula em um dado intervalo de tempo pode ser determinada pela área do gráfico representando a aceleração em função do tempo transcorrido:

$$\Delta v = a_0 \Delta t = \text{área da curva sob o gráfico}, \tag{3.13}$$

ou, ainda,

$$v - v_0 = a_0 \Delta t. \tag{3.14}$$

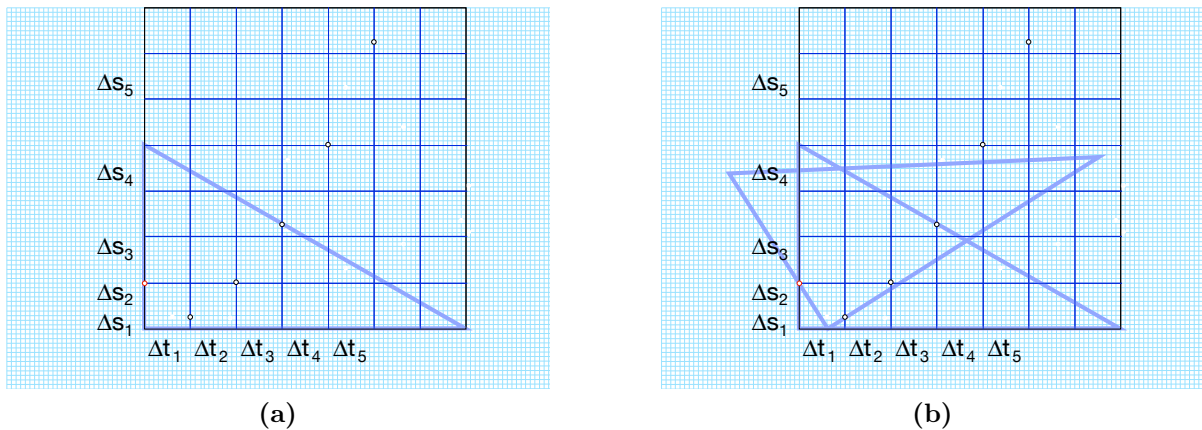
Para a construção do gráfico dos deslocamentos da partícula em função do intervalo de tempo necessário para a sua realização, construímos na figura 37(a) um diagrama onde marcamos os deslocamentos associados aos intervalos de tempo correspondentes.



**Figura 37.** – Movimento uniformemente variado (cont.). (a) Deslocamentos realizados pela partícula nos seus correspondentes intervalos de tempo; (b) Representação da posição ocupada pelo móvel ao final do intervalo de tempo transcorrido.



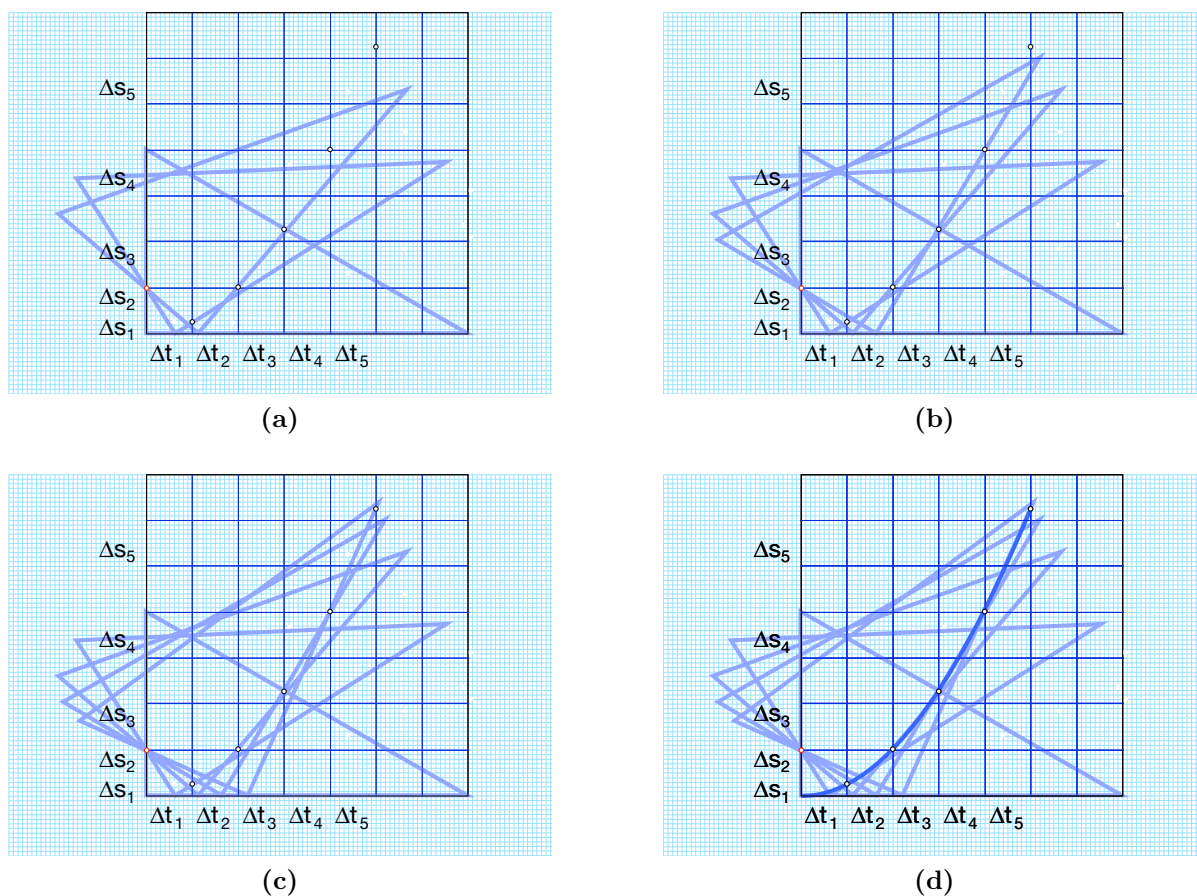
Em seguida, como indica a figura 37(b), marcamos as posições associadas à sucessão de deslocamentos. Depois de marcadas as posições, escolhemos uma delas — a posição inicial, como indicado na figura 38(a), por exemplo —, e posicionamos o esquadro conforme indicado na mesma figura. Observamos que podemos deslizar o esquadro da maneira indicada na figura 38(b): um dos catetos do esquadro intercepta a primeira posição no instante de tempo correspondente; o vértice do ângulo reto do esquadro se apoia sobre um instante de tempo igual à metade do instante de tempo correspondente à primeira posição; e, por construção, o outro cateto intercepta uma determinada localização  $f$  sobre o eixo vertical. Em nosso gráfico esta posição corresponde a  $\Delta S_1 + \Delta S_2$ , como ilustra a figura 38(b).



**Figura 38.** — Construção da parábola. (a) Esquadro com o vértice reto na origem de coordenadas; (b) Um dos catetos do esquadro intercepta a primeira posição no instante de tempo correspondente; o vértice do ângulo reto do esquadro se apoia sobre um instante de tempo igual à metade do instante de tempo correspondente à primeira posição; e, por construção, o outro cateto intercepta uma determinada localização  $f = \Delta S_1 + \Delta S_2$  sobre o eixo vertical.

Podemos continuar este procedimento para as duas outras posições seguintes e obtemos as duas representações indicadas na figura 39(a). Ao realizar mesma construção para todas as outras posições também observamos na figura 39(b) e (c) a mesma interceptação na localização  $f$  sobre o eixo vertical. Este comportamento significa que as posições representadas no gráfico pertencem a uma parábola. Os segmentos de reta traçados pelos catetos do esquadro sobre as posições nos respectivos instantes de tempo representam as tangentes à parábola no ponto considerado e, por construção, envelopam a curva parabólica, como indicado na figura 39(d). O ponto  $f$  é denominado ponto focal da parábola e a distância da origem de coordenadas ao ponto  $f$  é denominada de distância focal.

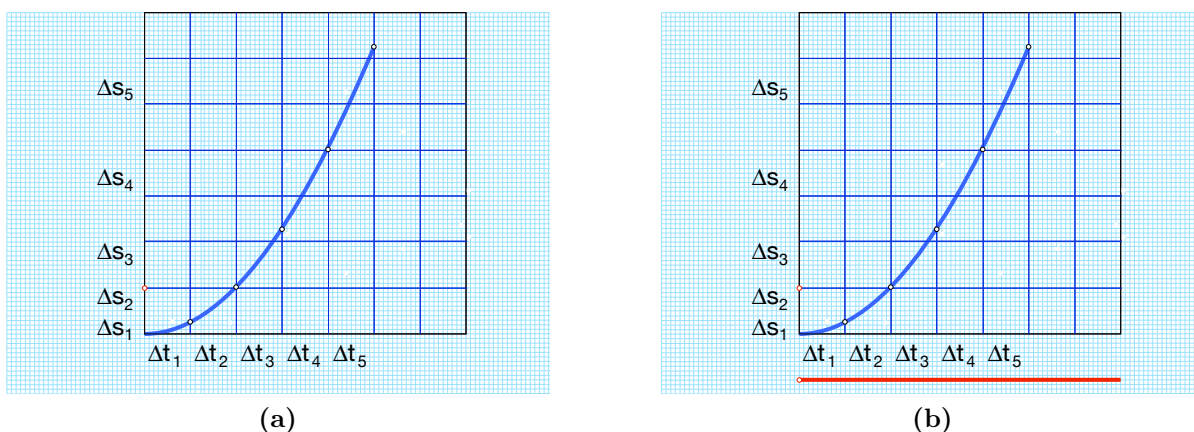
A parábola é a curva definida pelo conjunto de pontos  $M$  do plano tais que a distância de cada um deles até um ponto determinado, o ponto focal  $f$ , é igual à distância destes mesmos pontos  $M$  até uma reta particular, denominada a reta diretriz da parábola. A



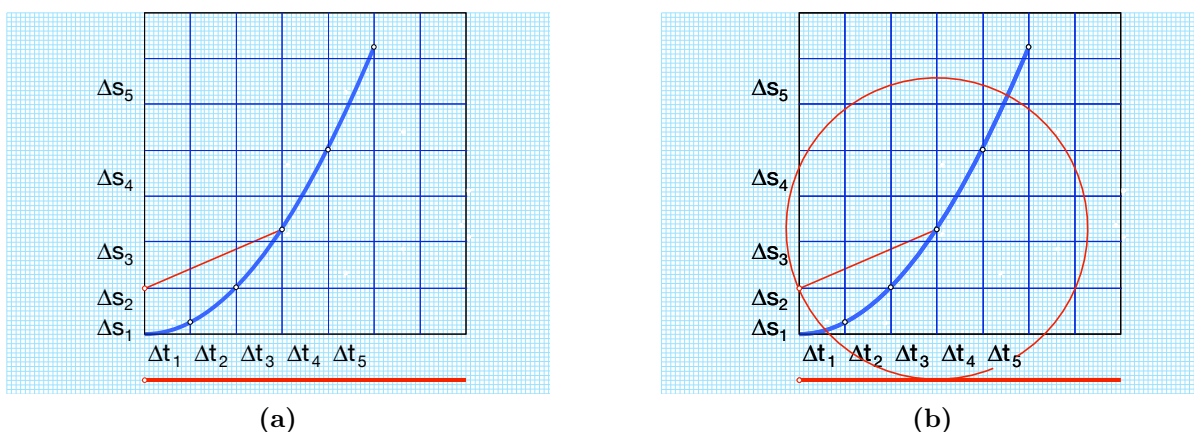
**Figura 39.** – Construção da parábola (cont.). (a) Com o mesmo procedimento anterior, um dos catetos do esquadro intercepta a segunda posição no instante de tempo correspondente; observamos que o outro catetos do esquadro intercepta a mesma localização  $f$  sobre o eixo vertical que no procedimento anterior; (b) Ao realizar a mesma construção para a terceira e a quarta posição também observamos a interceptação na mesma localização  $f$  sobre o eixo vertical; (c) Ao realizar a mesma construção para a quinta posição observamos uma vez mais a interceptação na mesma localização  $f$  sobre o eixo vertical; (d) Os segmentos de reta traçados pelos catetos do esquadro sobre as posições nos respectivos instantes de tempo representam as tangentes à curva no ponto considerado e, por construção, envelopam a curva que define as diferentes posições ao longo do tempo. Curvas que obedecem a este tipo de construção geométrica são denominadas parábolas.

reta diretriz é paralela à tangente ao vértice da parábola e, com esta informações podemos traçá-la como ilustrado na figura 40.

Podemos verificar uma vez mais se a curva envelope gerada pelas tangentes obtidas com o esquadro é de fato uma parábola. Traçamos com uma régua um segmento de reta da focal até um ponto da curva, como indicado na figura 41. Com um compasso traçamos uma circunferência de raio igual ao comprimento do segmento de reta definido pela focal até o ponto da curva considerado e centro sobre um ponto da curva. Observamos que esta circunferência tangencia a reta diretriz.



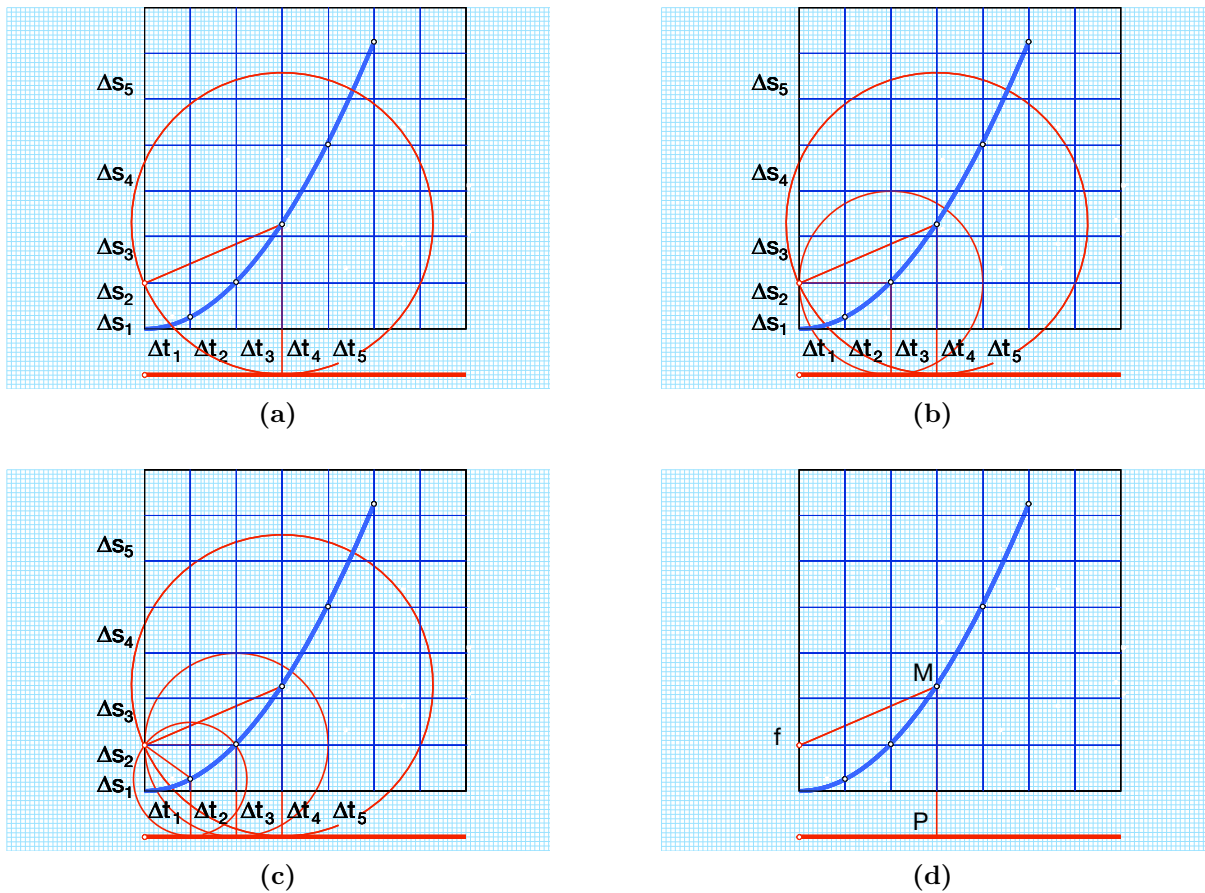
**Figura 40.** – Construção da parábola. (a) Curva parabólica representando as posições em função do instante de tempo considerado; (b) Indicação em vermelho da reta diretriz da curva parabólica.



**Figura 41.** – Construção da parábola(cont.). (a) Traçamos com uma régua um segmento de reta da focal até um ponto da curva; (b) Com o compasso traçamos uma circunferência cujo raio possui o comprimento do segmento de reta definido pela focal até o ponto da curva e esta circunferência tangencia a reta diretriz.

Repetimos esta construção mais duas vezes escolhendo agora dois outros pontos sobre a curva como centros e concluímos que estas outras duas circunferências também tangenciam a reta diretriz. Esta propriedade indica que os segmentos  $fM$  são iguais aos segmentos  $PM$ , onde  $P$  é o ponto tangente sobre a reta diretriz, como representado na figura 42(d).





**Figura 42.** – Construção da parábola (cont.). (a) Circunferência cujo raio possui o comprimento do segmento de reta definido pela focal até o ponto da curva e essa circunferência tangencia a reta diretriz.; (b) Construção análoga a anterior mas de centro em outra posição sobre a curva; (c) Outra construção análoga a anterior; (d) Os segmentos  $fM$  e  $PM$  são sempre iguais, não importa qual ponto  $M$  escolhido sobre a curva parabólica.

A construção geométrica descrita na figura 39 permite determinar a expressão algébrica da posição do móvel ao longo do seu movimento em função do instante de tempo considerado. A partir do gráfico da figura 39, reproduzida na figura 43, se denominarmos o deslocamento realizado pelo móvel por  $z$  e no intervalo de tempo correspondente por  $x$  e a distância entre o ponto focal  $f$  e a origem de coordenadas também por  $f$ , observamos que são satisfeitas as seguintes relações entre  $z$ ,  $x$  e  $f$ :

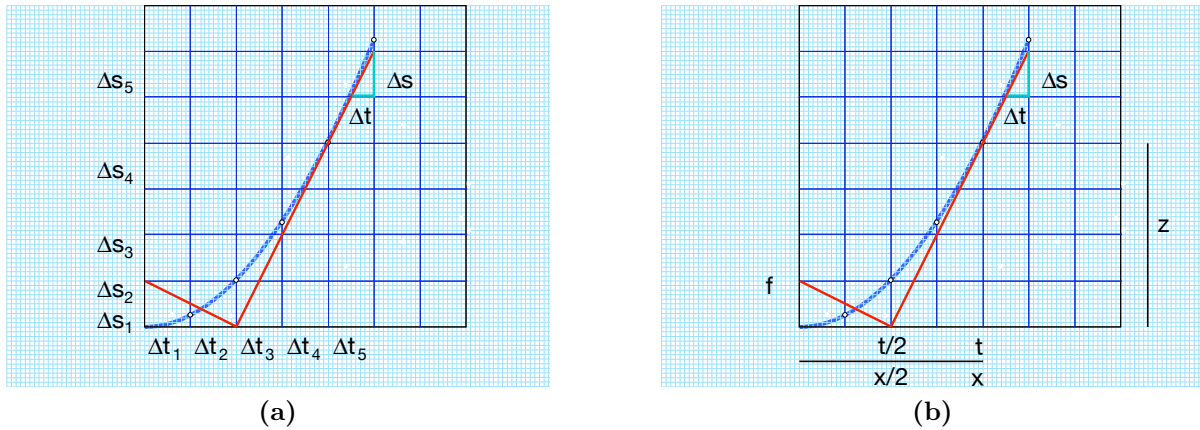
$$\frac{z}{x/2} = \frac{x/2}{f} \tag{3.15}$$

e

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{x/2}{f}. \tag{3.16}$$

Da relação (3.15) podemos escrever que

$$z = \frac{x^2}{4f} \tag{3.17}$$



**Figura 43.** – Construção da parábola (cont.). (a) Deslocamentos associados aos intervalos de tempo e a construção geométrica das tangentes que envelopam a curva parabólica representando as posições do móvel; (b) Indicação dos triângulos semelhantes que compõem a figura:  $\Delta z/\Delta x = (x/2)/f = z/(x/2)$ .

e, substituindo  $z$  pela posição  $S$  do móvel e  $x$  pelo instante de tempo  $t$ , obtemos

$$S = \frac{t^2}{4f}. \quad (3.18)$$

A partir da relação (3.16), depois de substituir  $z$  por  $S$  e  $x$  por  $t$ , podemos escrever que

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{t}{2f}. \quad (3.19)$$

Lembramos ainda que o lado esquerdo da identidade (3.19) corresponde à velocidade média  $v_m$  do móvel no intervalo de tempo  $\Delta t$  e, pela definição do movimento uniformemente variado, também corresponde ao valor da velocidade no instante médio aritmético dos instantes no extremo do mesmo intervalo  $\Delta t$ . Assim, temos que  $v_m = v$ , a velocidade no instante  $t$ . A partir da expressão (3.14), sabemos que, para velocidade inicial nula,  $v = at$  e, deste modo, podemos concluir que a aceleração do móvel  $a$  corresponde a  $1/2f$ :

$$\frac{1}{2f} = a. \quad (3.20)$$

Assim, podemos concluir que a descrição das posições do móvel que parte do repouso e realiza um movimento uniformemente variado ( $a = \text{constante}$ ) é representada pela expressão algébrica

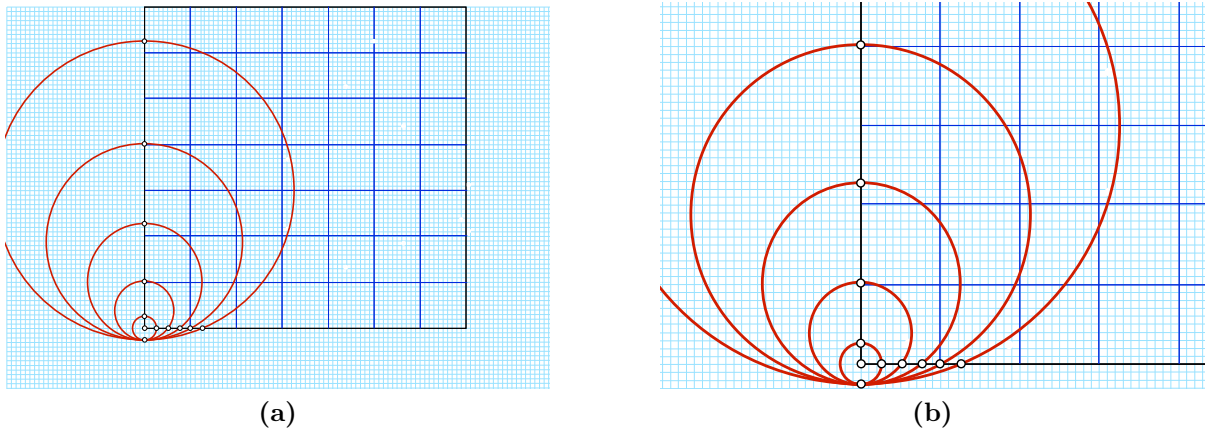
$$S = \frac{at^2}{2}. \quad (3.21)$$

Observamos, ainda, que se multiplicarmos e dividirmos o lado direito de (3.21) pelo valor da aceleração  $a$  e lembrarmos que  $v = at$  obtemos a expressão de Torricelli:

$$S = \frac{v^2}{2a}. \quad (3.22)$$

A expressão (3.22) também pode ser determinada geometricamente. Primeiro construímos o gráfico dos deslocamentos, como ilustrado na figura 44(a). Na mesma figura descrevemos

circunferências auxiliares de diâmetro igual à adição de um dos deslocamentos realizados mais o primeiro deslocamento que serve como unidade de comprimento. A interseção destas circunferências com o eixo horizontal define vários segmentos de reta de diferentes tamanhos, como indicado na figura 44(b). Este procedimento estabelece a média geométrica entre os dois deslocamentos e, assim, cada um dos segmentos horizontais corresponde à raiz quadrada do deslocamento que compõe o diâmetro da circunferência considerada.



**Figura 44.** – Determinação da raiz quadrada do deslocamento pela média geométrica. (a) Circunferências auxiliares de diâmetro igual à adição de um dos deslocamentos realizados mais o primeiro deslocamento que serve como unidade de comprimento; (b) A interseção das circunferências com o eixo horizontal determina diferentes segmentos. Cada um deles corresponde a raiz quadrada do deslocamento que compõe o diâmetro da circunferência.

A figura 45(a) ilustra um conjunto de circunferências de diâmetro correspondente à soma dos deslocamentos iguais a 1, 4, 9 e 16 vezes o primeiro deslocamento mais o primeiro deslocamento realizado, igual a  $u$ , na mesma unidade de tempo. A interseção destas circunferências com o eixo horizontal corresponde a um segmento de reta de comprimento igual à raiz quadrada do deslocamento  $z_G$ . Os segmentos de reta indicados na figura 45(b) correspondem aos catetos de um triângulo retângulo e a partir da discussão realizada na seção 2.2.3 podemos estabelecer entre eles a relação

$$\frac{s}{z_G} = \frac{z_G}{u}. \quad (3.23)$$

Observamos também na figura 45(b) que o dobro de  $z_G$  corresponde ao deslocamento realizado pela partícula na unidade de tempo  $\Delta t$ . Deste modo, obtemos

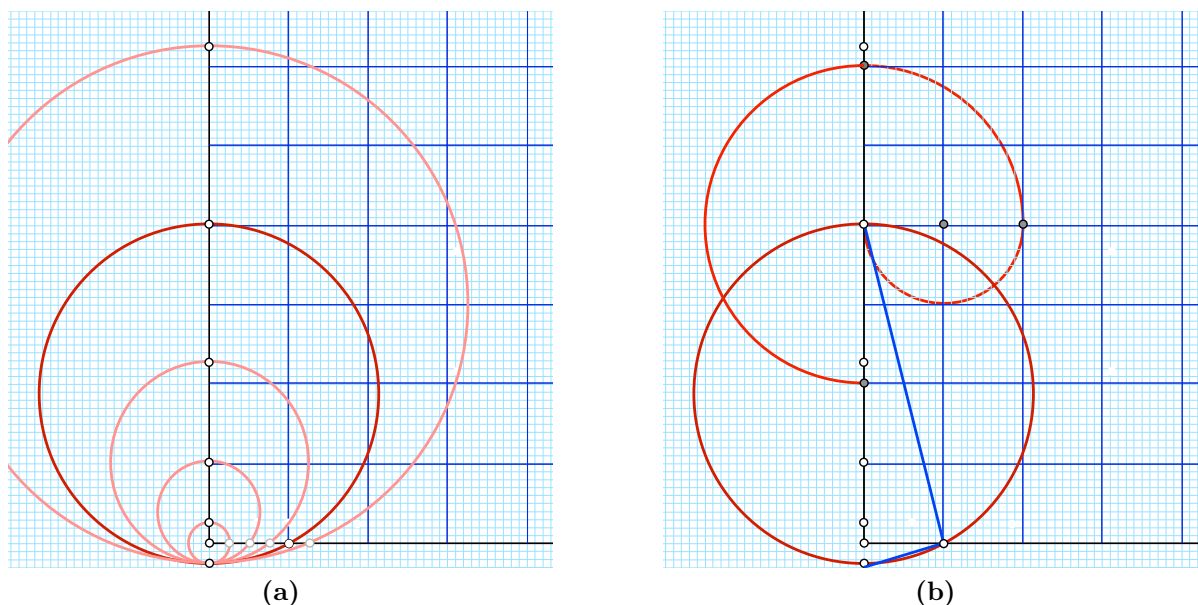
$$z_G = \frac{v}{2} (\Delta t). \quad (3.24)$$

Da equação (3.21), o primeiro deslocamento pode ser escrito como

$$u = \frac{a}{2} (\Delta t)^2. \quad (3.25)$$

Após a substituição de (3.24) e (3.25) em (3.23) obtemos o resultado de Torricelli (3.22):

$$S = \frac{v^2}{2a}. \quad (3.22')$$



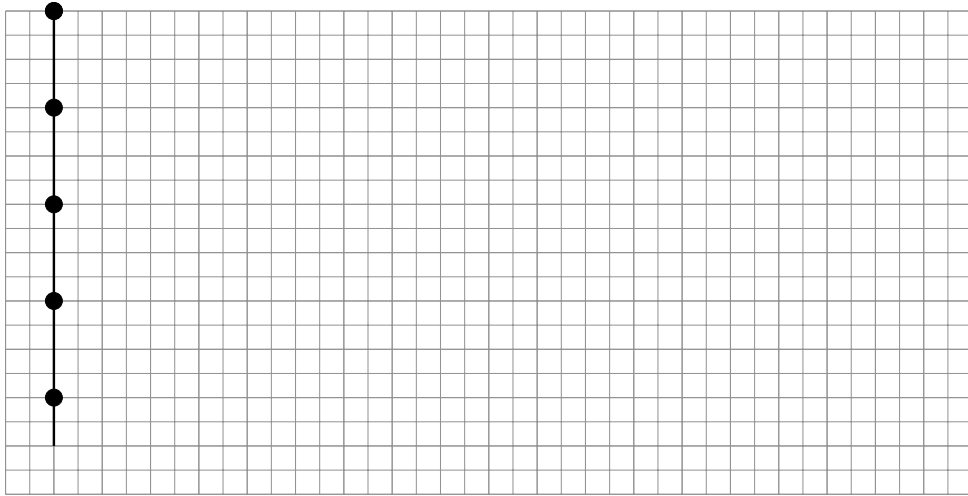
**Figura 45.** – Determinação da raiz quadrada do deslocamento pela média geométrica. (a) Circunferências de diâmetro igual a soma das distâncias  $s$  iguais a 1, 4, 9 e 16 vezes o primeiro deslocamento mais o primeiro deslocamento realizado, igual a  $u$ . A interseção destas circunferências com o eixo horizontal corresponde a um segmento de reta de comprimento igual à raiz quadrada do deslocamento  $z_G$ . Destacamos na figura a distância igual à 16 vezes o primeiro deslocamento; (b) Os segmentos de reta que correspondem aos catetos de um triângulo retângulo estabelecem a relação  $s/z_G = z_G/u$ . Os arcos em espiral definem a relação  $2z_G = v\Delta t$ . Este comportamento pode ser verificado por construção geométrica para todas as outras distâncias indicadas.

### 3.3.3 Os movimentos uniforme e variado e o movimento parabólico

Nesta seção discutimos os resultados de diferentes combinações das duas classes e movimento estudadas e as suas conseqüências. Ao final da discussão procuramos realçar o papel da aceleração não somente como um parâmetro físico que estabelece a variação do valor da velocidade ao longo do movimento mas também como um agente físico que pode alterar a direção do movimento que o móvel realiza.

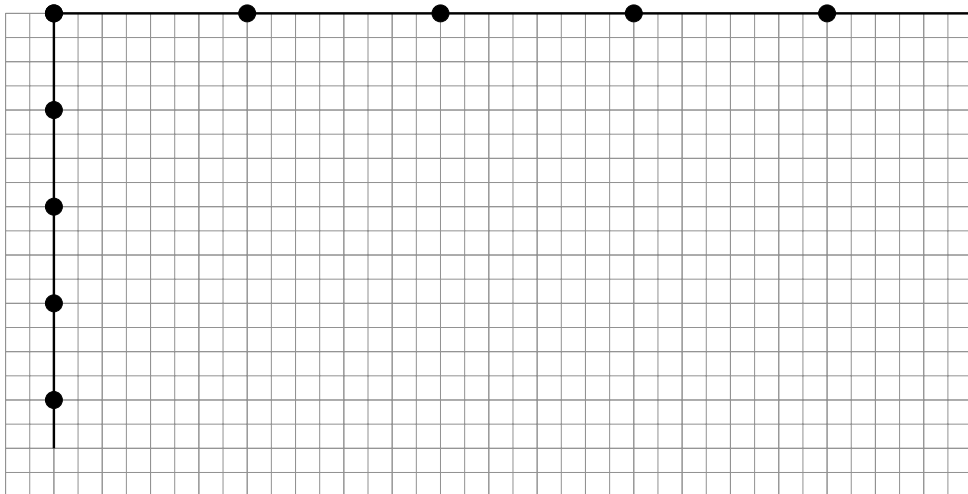
#### MRU–MRU

Inicialmente, consideramos o móvel como uma partícula que descreve um MRU na direção vertical, como representamos na figura 46, onde os deslocamentos realizados pelo corpo são, por definição, iguais para intervalos de tempos iguais.



**Figura 46.** – Cinco posições da partícula que realiza um MRU, determinadas em quatro intervalos de tempo sequenciais e idênticos.

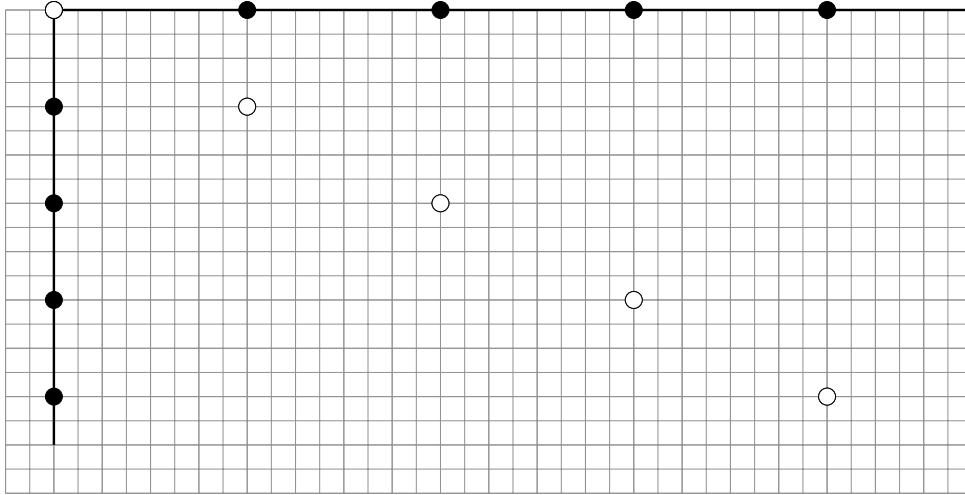
Em seguida representamos a composição desse MRU com outro MRU na direção horizontal, como ilustrado na figura 47.



**Figura 47.** – Cinco posições da partícula que realiza um MRU, tanto na direção vertical quanto na horizontal, determinadas em quatro intervalos de tempo sequenciais e idênticos. Observe que as velocidades em cada uma dessas direções são diferentes.

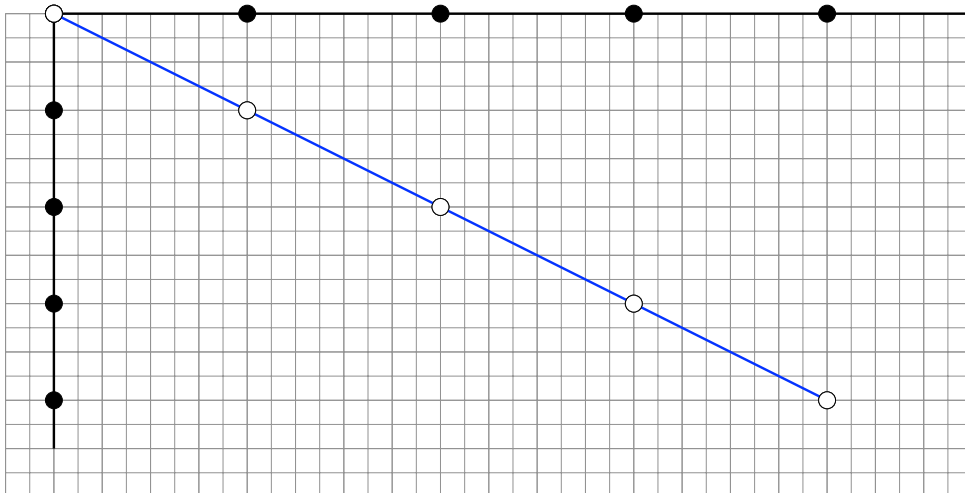
Combinamos os dois movimentos perpendiculares, como ilustrado na figura 48. Marcamos os pontos verticais em correspondência temporal com os pontos horizontais no início do movimento e após o primeiro, o segundo, o terceiro e o quarto intervalo de tempo. Observe que apesar dos intervalos de tempo serem os mesmos em ambas as direções,

os deslocamentos iniciais em cada direção são diferentes o que equivale a dizer que as acelerações em cada direção são distintas.



**Figura 48.** – Composição de dois movimentos retilíneos, uniformes e perpendiculares que possuem mesmas condições iniciais.

Concluimos, da figura 49, que a combinação dos dois movimentos implica também em um movimento retilíneo e uniforme.



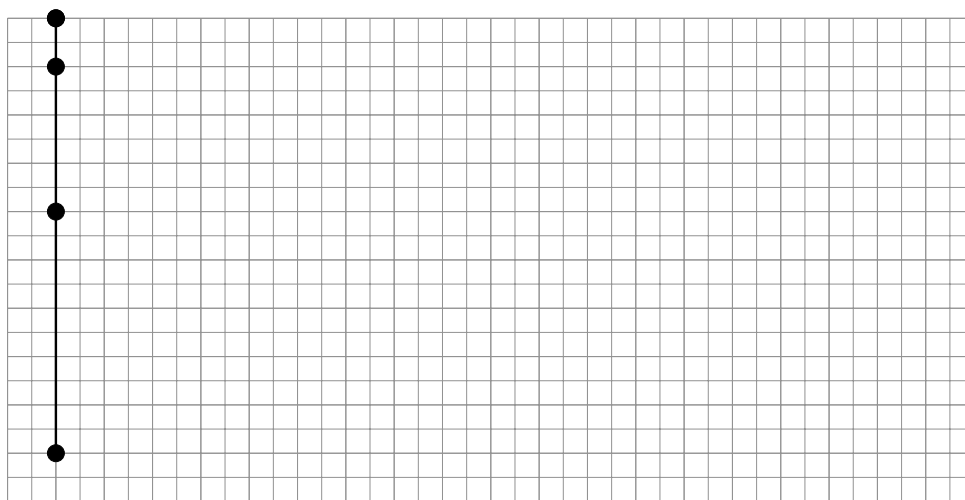
**Figura 49.** – Combinação de dois movimentos retilíneos e uniformes que possuem mesmas condições iniciais. A figura revela que obtemos outro movimento retilíneo e uniformemente variado. Para intervalo de tempo idênticos, os deslocamentos realizados pela composição do movimento também são idênticos e na mesma direção.

De fato, ao combinarmos os dois movimentos retilíneos e uniformes em duas direções perpendiculares e que possuem as mesmas posições iniciais, obtemos como resultado um

outro movimento também retilíneo e uniforme: após a composição dos dois movimentos os deslocamentos realizados nos intervalos de tempo considerados são idênticos e, assim, a velocidade do móvel permanece constante ao longo do movimento e o seu produto pelo intervalo de tempo decorrido corresponde à hipotenusa do triângulo retângulo formado pelos deslocamentos perpendiculares realizados no mesmo intervalo de tempo. As únicas alterações são a nova direção do movimento e a nova velocidade com a qual ele agora o realiza mas as características do movimento, ser retilíneo e uniforme permanecem inalteradas.

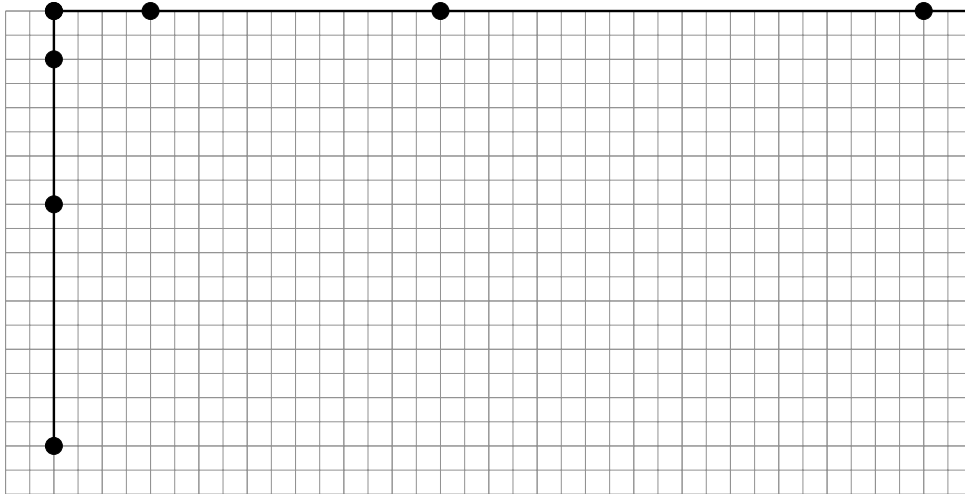
### MRUV–MRUV

Executamos o mesmo procedimento para o movimento retilíneo uniformemente variado. Pela definição de MRUV, uma partícula partindo do repouso descreve sua trajetória na direção vertical, como representada na figura 50. Neste caso, como já discutido na seção 3.3.2, os deslocamentos realizados pela partícula para intervalos de tempos iguais estão na proporção  $1, 3, 5, \dots$ .



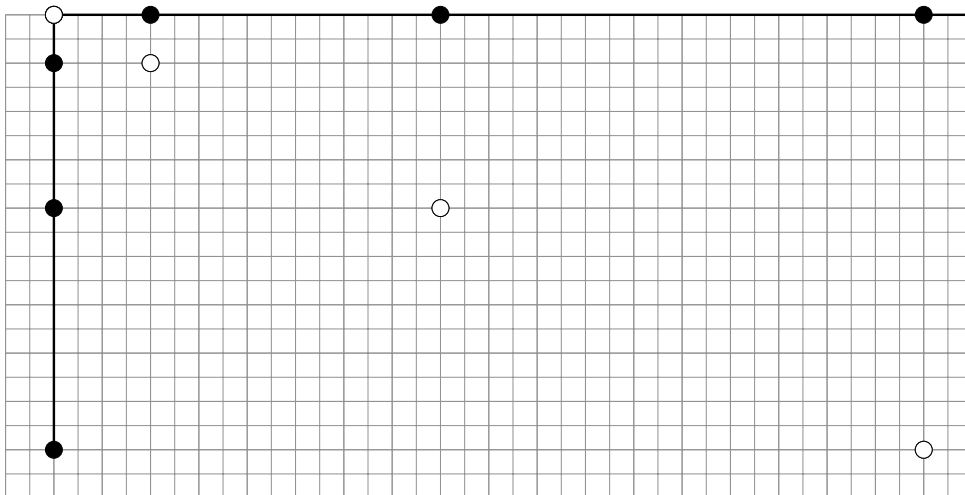
**Figura 50.** – Movimento retilíneo uniformemente variado na direção vertical representado no plano real. Observe os deslocamentos realizados pela partícula para intervalos de tempos iguais estão na proporção  $1, 3, 5, \dots$ .

Em seguida, realizamos a composição desse MRUV com outro MRUV orientado perpendicularmente, como indicado na figura 51. Observe na figura os deslocamentos realizados pela partícula para intervalos de tempos iguais estão na proporção  $1, 3, 5, \dots$ , em ambas as direções, mas de diferentes valores absolutos. Isto significa que o movimento em cada direção possui uma aceleração particular.



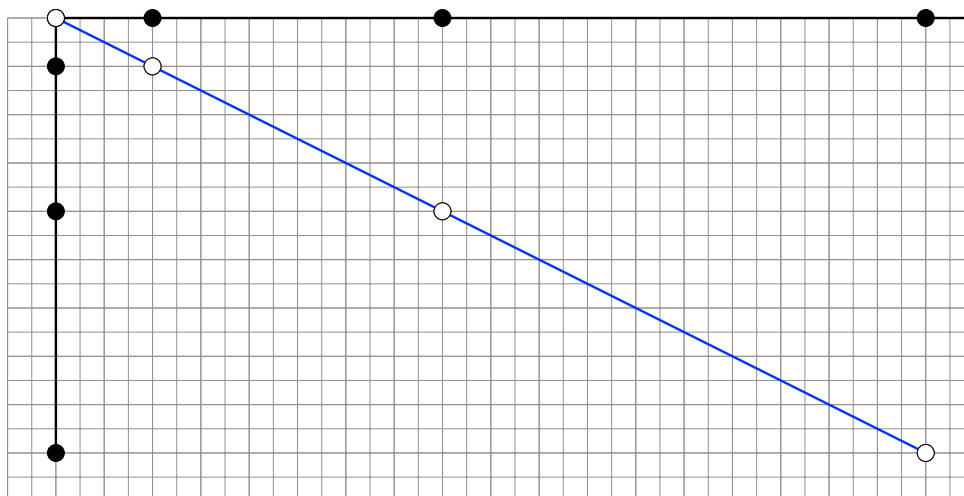
**Figura 51.** – Movimento retilíneo uniformemente variado nas direções vertical e horizontal representados no plano real. Observe que os deslocamentos realizados pela partícula para intervalos de tempos iguais estão na proporção  $1, 3, 5, \dots$ , em ambas as direções, mas de diferentes valores absolutos o que implica uma aceleração diferente para cada direção.

Na figura 52 marcamos as posições verticais e as posições horizontais correspondentes no início do movimento, no primeiro, no segundo e no terceiro intervalo de tempo.



**Figura 52.** – Composição dos movimentos retilíneos perpendiculares, uniformemente variados e que possuem mesmas condições iniciais.





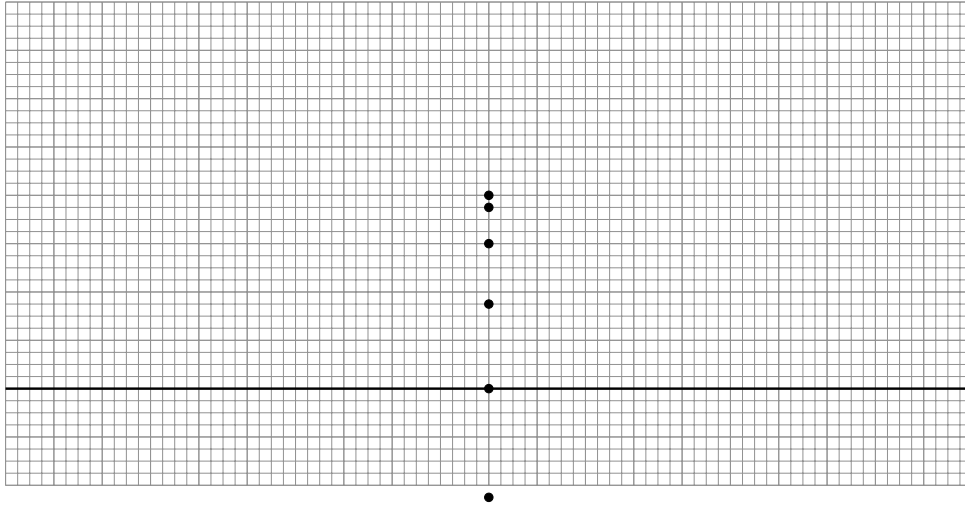
**Figura 53.** – Combinação de dois movimentos perpendiculares, retilíneos e uniformemente variados que possuem mesmas condições iniciais e produzem um outro movimento também retilíneo e uniformemente variado. Observe que os deslocamentos realizados pela partícula para intervalos de tempos iguais estão na proporção  $1, 3, 5, \dots$ , a nova velocidade e a nova aceleração estão na nova direção do movimento.

Analisamos a figura 52, como indicado na figura 53. Observamos nesta figura que a combinação dos dois movimentos retilíneos uniformemente variados realizados pela partícula, em direções perpendiculares e que possuem mesmas posições iniciais e partem do repouso, sempre produz um outro movimento também retilíneo e uniformemente variado: os deslocamentos resultantes da composição também estão na proporção  $1, 3, 5, \dots$ . As únicas alterações são a nova direção do movimento, a nova velocidade e a nova aceleração com a qual ele agora o realiza.

Concluimos então que ao combinarmos os dois movimentos retilíneos uniformes perpendiculares, de mesmas posições iniciais, obtemos um outro movimento retilíneo e uniforme e que ao combinarmos dois movimentos retilíneos uniformemente variados, que possuem mesmas condições iniciais, obtemos um outro movimento também retilíneo e uniformemente variado. Apesar das modificações dos valores das velocidades, no MRU, e das velocidades e da aceleração, no MRUV, os movimentos não tiveram as suas características alteradas.

### MRU–MRUV

Agora combinamos essas duas classes de movimentos exigindo que o móvel realize um MRU na direção horizontal e um MRUV na direção vertical. Neste caso, o movimento retilíneo uniformemente variado na direção vertical, realizado pela partícula partindo do repouso e a uma certa altura, está representado na figura 54 em seis instantâneos que definem cinco intervalos de tempos iguais.



**Figura 54.** – Representação do MRUV na direção vertical em seis instantâneos que definem cinco intervalos de tempos iguais. No quinto instante de tempo a partícula toca a horizontal. A partícula parte de uma certa altura em relação à horizontal com velocidade inicial nula.

O intervalo de tempo adotado corresponde à unidade de tempo empregada na descrição do movimento. Observamos que ao dividimos o espaço em um conjunto de pontos igualmente espaçados que produz o quadriculado de fundo da figura. O lado do menor quadrado da figura corresponde a nossa unidade de comprimento. Também chamamos a atenção que as posições são estabelecidas em relação a um ponto particular sobre a reta horizontal e que no quarto intervalo de tempo a partícula está sobre este ponto. Assim, o quinto intervalo de tempo indica somente a posição hipotética da partícula se ela continuasse o seu movimento. Esta indicação nos será útil mais adiante.

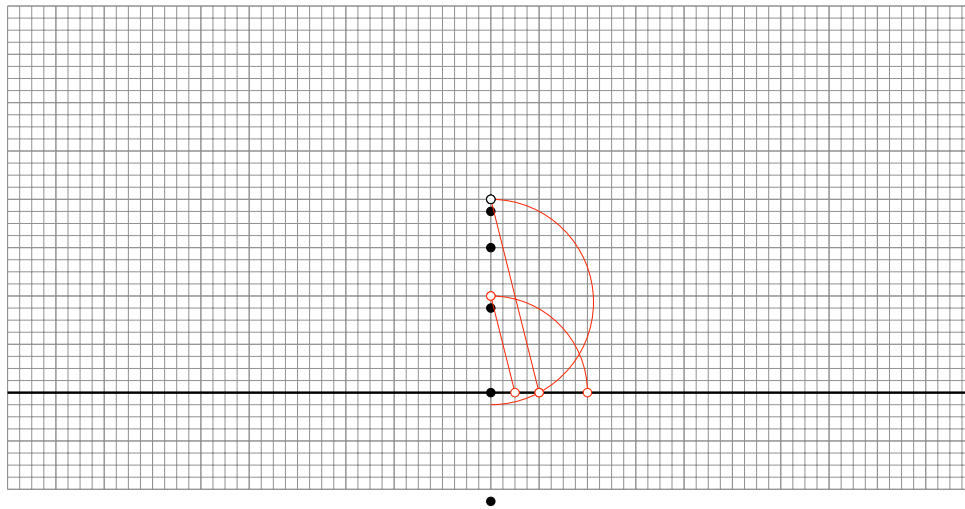
Dos resultados obtidos na seção 3.3.2 para descrever a cinemática do MRUV. Podemos estabelecer geometricamente a relação entre a altura  $h$ , a velocidade  $v$  ao tocar o ponto sobre a reta horizontal e a aceleração  $a$  deste movimento. Com um compasso traçamos um arco de circunferência com 17 unidades de comprimento, sendo 16 unidades associada à altura de queda da partícula desde o início do movimento até o instante que toca a horizontal e mais uma unidade de deslocamento para a determinação da raiz quadrada desta altura:

$$\frac{h}{(v\Delta t)/2} = \frac{(v\Delta t)/2}{a(\Delta t)^2/2} \quad (3.26)$$

ou

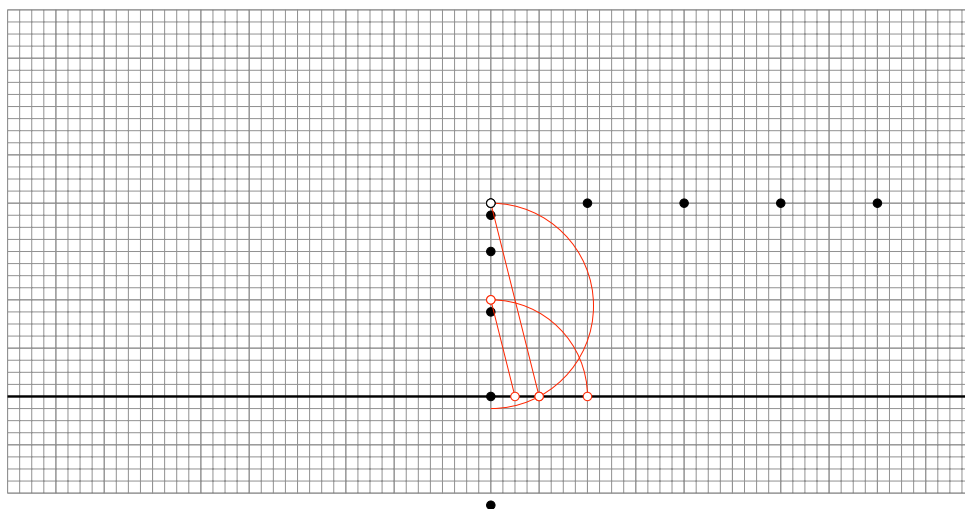
$$h = \frac{v^2}{2a}. \quad (3.27)$$

Os resultados estão indicados na figura 55. Deste modo, determinamos o segmento que representa a velocidade  $v$  sobre a reta horizontal de referência, como indicado na figura.



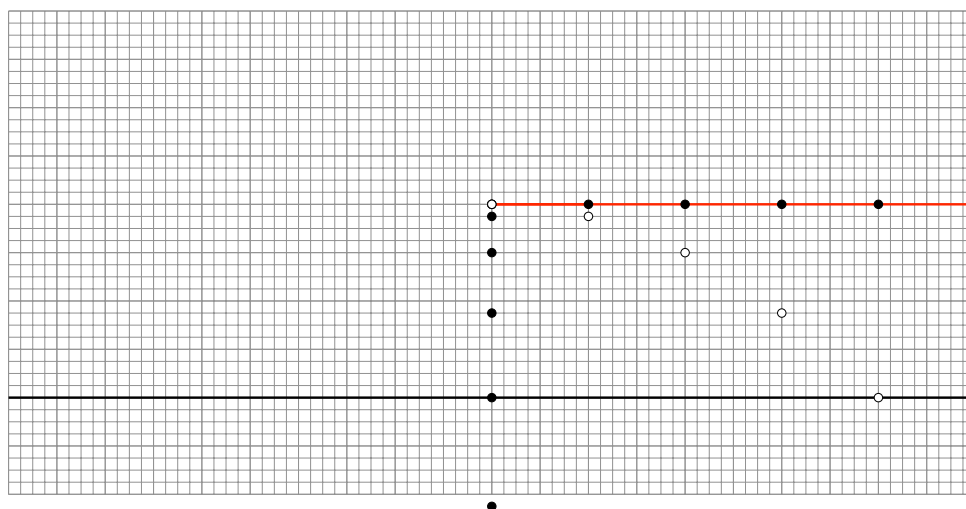
**Figura 55.** – Determinação geométrica da relação entre a altura, a velocidade na origem de coordenadas e a aceleração. Observe que o segmento associado à velocidade é o dobro do segmento associado à média geométrica.

Vamos agora combinar este MRUV com um MRU na horizontal animado desta mesma velocidade, como ilustrado na figura 56.



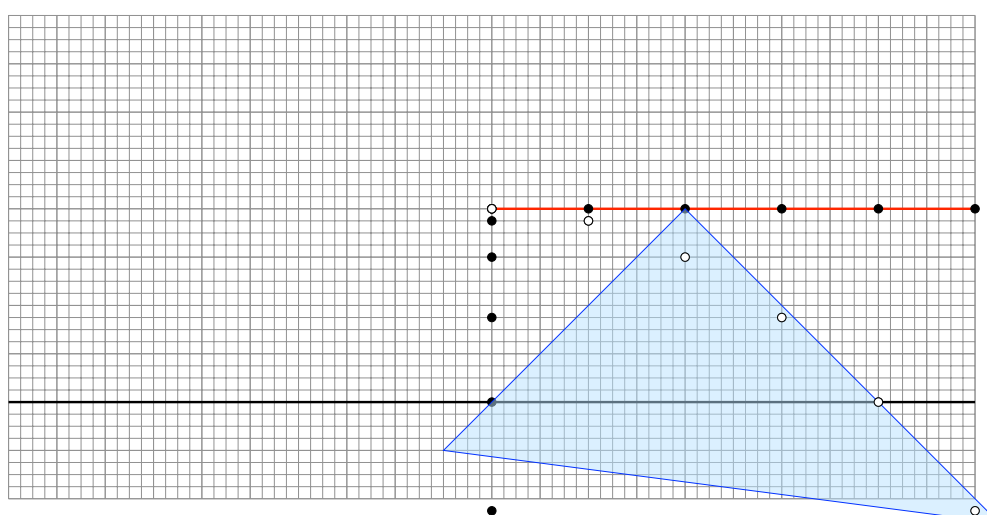
**Figura 56.** – Representação do MRU na direção horizontal com o início coincidente com o do MRUV construído previamente.

O MRU escolhido na direção horizontal está animado da mesma velocidade  $v$  determinada previamente do MRUV, ao tocar a reta horizontal. Empregamos os mesmos intervalos de tempo para compormos os dois movimentos em direções perpendiculares. A figura 57 representa a combinação dos dois movimentos em direções perpendiculares que possuem a mesma origem (a altura  $h$ ).



**Figura 57.** – Composição dos dois movimentos perpendiculares.

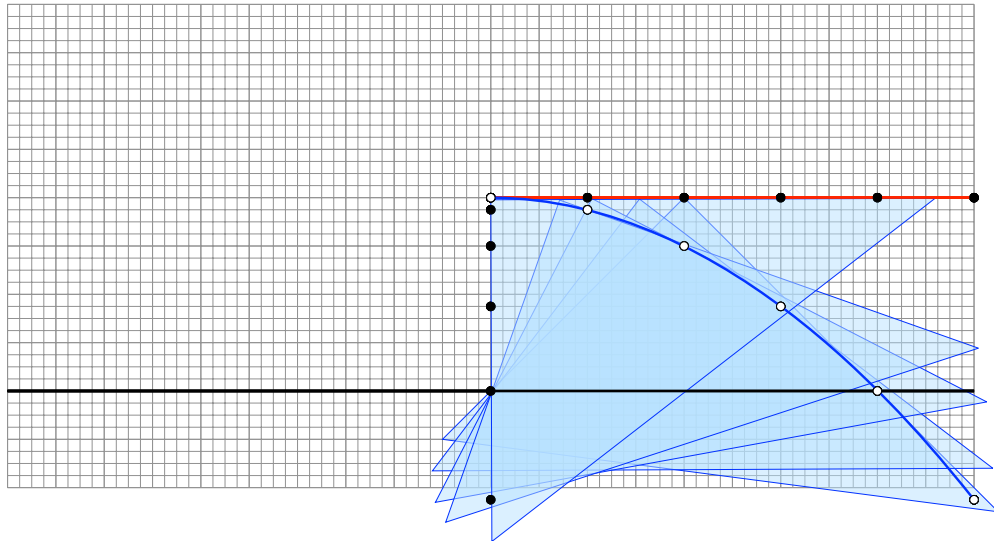
Com o auxílio de um esquadro traçamos a curva que passa pelos pontos referentes as interseções dos dois movimentos. A figura 58 ilustra este processo. Posicionamos um esquadro de modo que um dos cinco pontos associados às posições da partícula esteja em contato com um dos catetos do esquadro e o vértice reto do mesmo esquadro toca a componente da trajetória horizontal em MRU. Observamos que o outro cateto do esquadro intercepta o eixo vertical em um determinado ponto (a origem de coordenadas, na figura 58).



**Figura 58.** – Representação da primeira posição do esquadro.

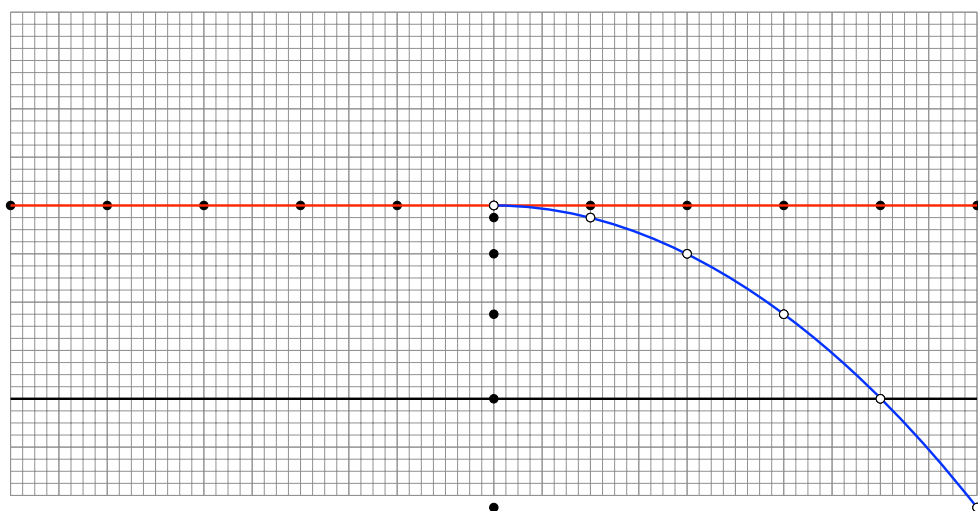
Ao repetir a mesma operação com o esquadro para os outros pontos, observamos em todas as construções a interseção do cateto do esquadro com o eixo de coordenadas ocorre

na mesma posição. Observamos também que os segmentos de reta definidos pelo outro cateto do esquadro definem tangentes que envelopam a curva que descreve a trajetória da partícula.



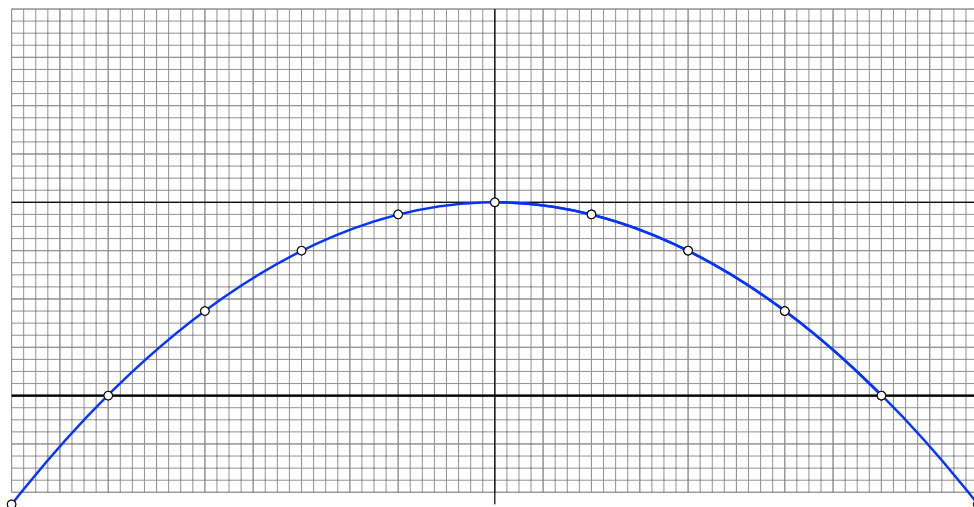
**Figura 59.** – Construção da curva que contém todos pontos associados as combinações do MRU na direção horizontal e do MRUV na direção vertical.

Se a partícula realiza o MRU na direção horizontal porém com o sentido para a esquerda, como representado na figura 60, obtemos um comportamento similar ao descrito previamente. A composição final dos dois movimentos está representada na figura 61.



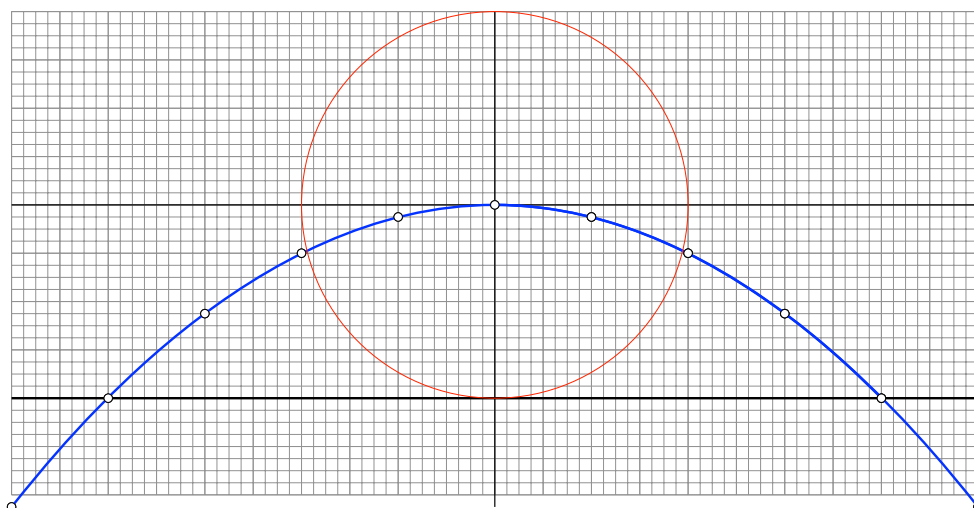
**Figura 60.** – Representação do MRU com sentido oposto em relação ao primeiro.

Como ilustrado na figura 61, ao realizar o mesmo processo de construção com o esquadro para definir a trajetória da partícula, obtemos a curva que representa o movimento



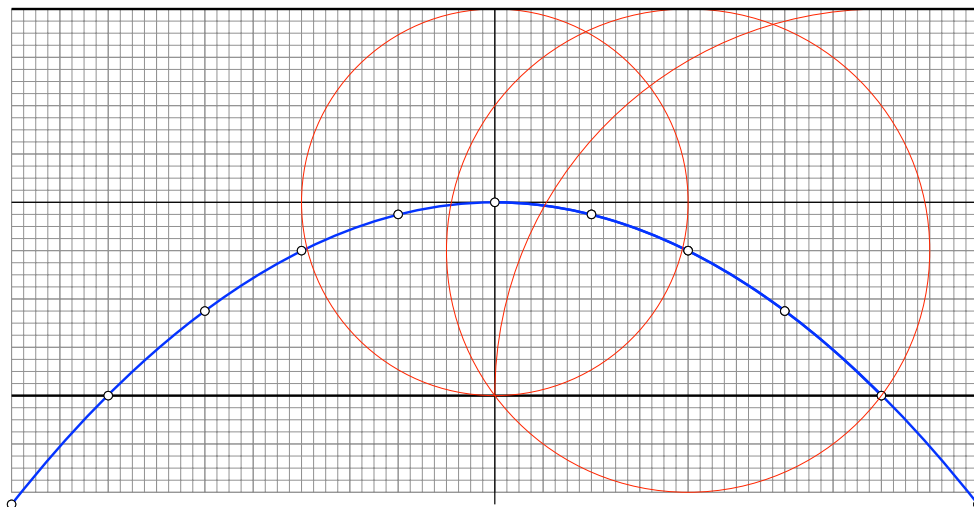
**Figura 61.** – Representação da curva que indica geometricamente a composição dos movimentos perpendiculares.

combinado dos dois movimentos MMRU e MRUV já conhecidos. Para determinar as características geométricas dessa trajetória traçamos uma circunferência de o centro da circunferência na posição inicial do movimento e o seu raio é igual a altura de queda da partícula, como representado na figura 62.



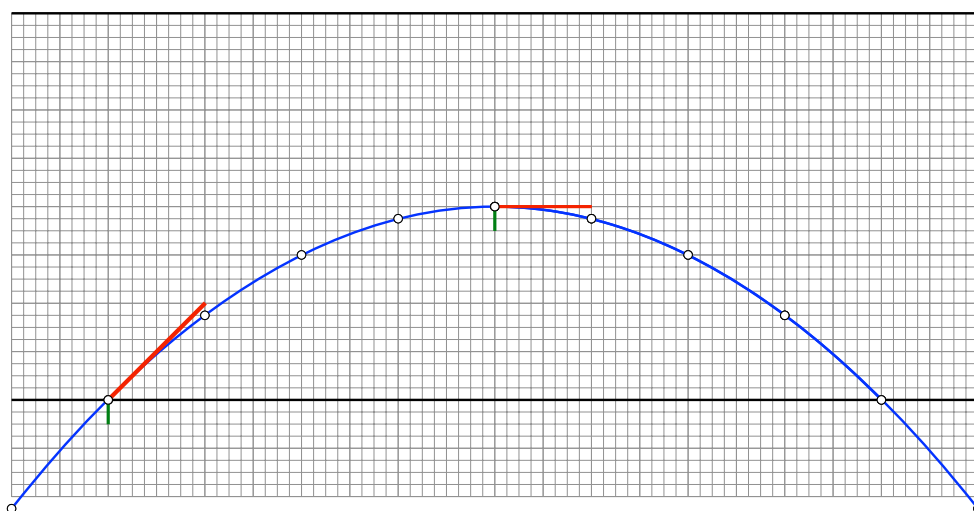
**Figura 62.** – Circunferência cujo raio igual ao deslocamento realizado pela partícula durante o movimento vertical.

Construímos outras circunferências de centro sobre pontos da curva e raio igual à distância destes pontos até a origem de coordenadas. Observamos que as circunferências traçadas são tangenciadas por uma reta paralela ao eixo horizontal, como indicado na figura 63.



**Figura 63.** – Segmento de reta que é tangenciado pelas circunferências traçadas.

Curvas cujos pontos obedecem a este comportamento pertencem a uma parábola, a reta paralela ao eixo horizontal e tangente às circunferência auxiliares é a reta diretriz da parábola e o ponto de interseção destas circunferências é o ponto focal da curva. Assim, concluímos geometricamente que a combinação de um MRU e um MRUV em direções perpendiculares descrevem uma trajetória parabólica, como representado na figura 64.



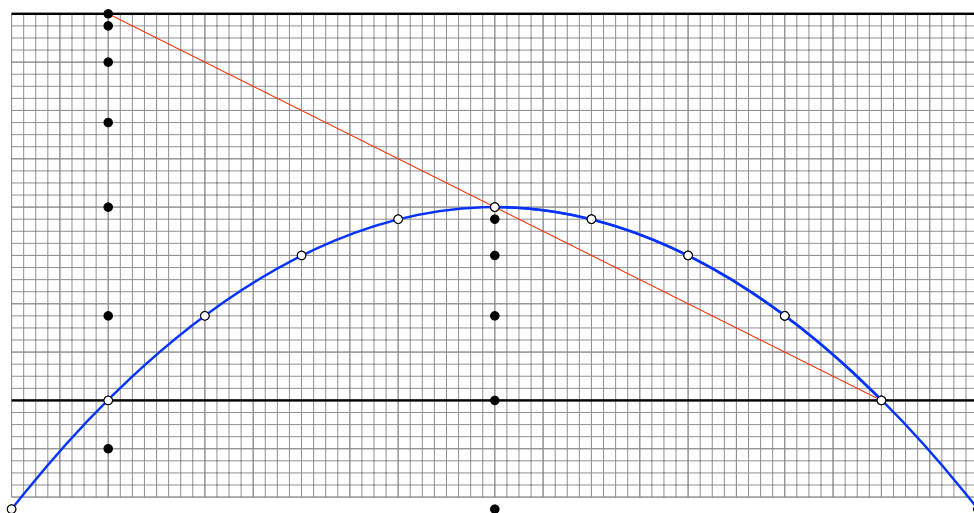
**Figura 64.** – Representação do movimento parabólico, com a sua reta diretriz, obtido pela composição dos dois movimentos estudados anteriormente. Observe que o segmento associado à aceleração é sempre orientado verticalmente.

Observamos que, neste caso, a trajetória resultante da combinação do MRU e do MRUV *não* é mais retilínea. Observamos também que os segmentos que representam a

velocidade ainda são paralelos aos deslocamentos realizados em cada intervalo de tempo considerado. Mais ainda, os segmentos que representam a ação da aceleração ao longo do movimento são sempre verticais e, por consequência, não são sempre paralelos aos deslocamentos realizados. Este comportamento estende o papel da aceleração na descrição do movimento para além de simplesmente variar o valor da velocidade ao longo do movimento, ela também pode alterar a direção do movimento ao longo do tempo.

### O movimento do projétil

Vamos explorar o movimento do projétil para discutir o papel da aceleração na alteração da direção de um movimento. Inicialmente, representamos um outro MRUV de uma partícula com ordenada no ponto de interseção da parábola determinada anteriormente e abscissa sobre a diretriz desta mesma parábola, como ilustrado na figura 65.



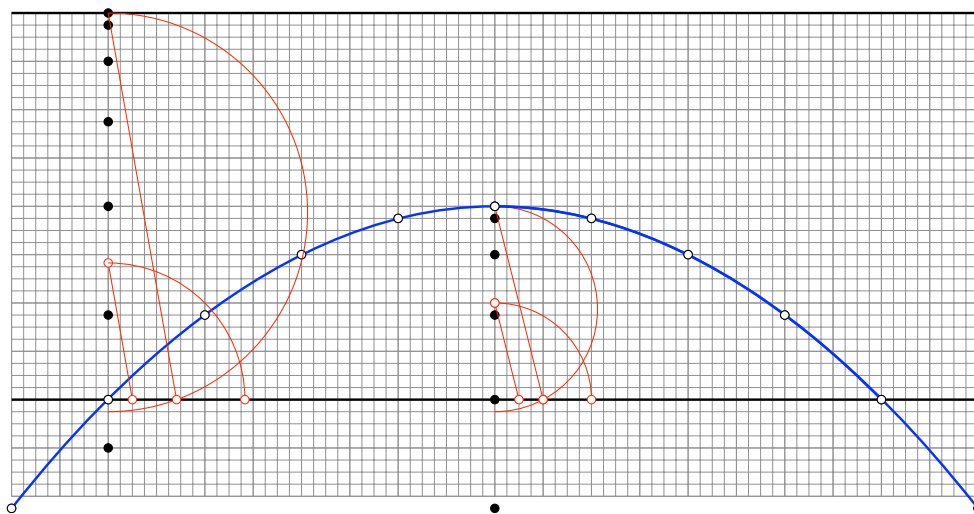
**Figura 65.** – Representação do MRUV que possui o dobro do deslocamento realizado anteriormente pela partícula.

Usando as construções geométricas já discutidas nas seções anteriores, determinamos a velocidade da partícula quando ela alcança o eixo horizontal. este procedimento está ilustrado na figura 66.

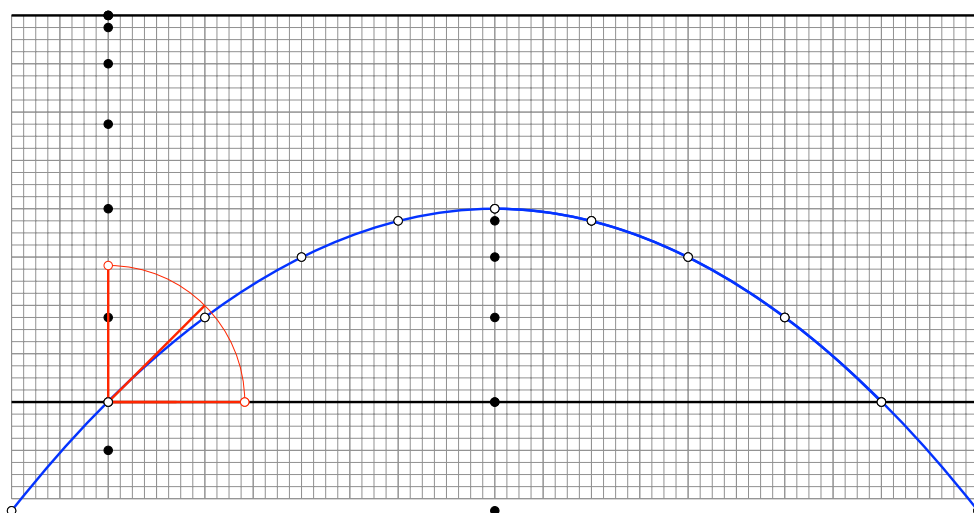
Observamos na figura 67 que o módulo da velocidade vertical da partícula que realiza o MRUV é igual à velocidade da partícula que descreve o movimento parabólico. A diferença entre os dois movimentos é a orientação do lançamento em relação ao eixo horizontal ou ângulo de elevação  $\theta_0$ .

Utilizamos então o mesmo método para construir diversos lançamentos mantendo constante a velocidade que determinamos e mudando somente a sua orientação ou o ângulo de elevação. Para essa construção construímos o arco de circunferência que define o módulo da velocidade inicial  $v_0$  e, em seguida, traçamos vários arcos de circunferência,





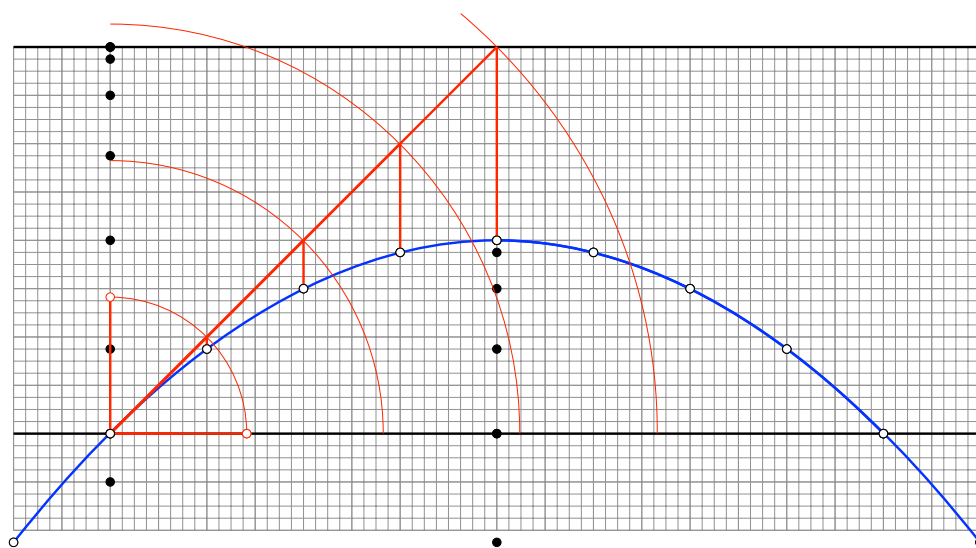
**Figura 66.** – Representação geométrica das grandezas físicas para os dois movimentos.



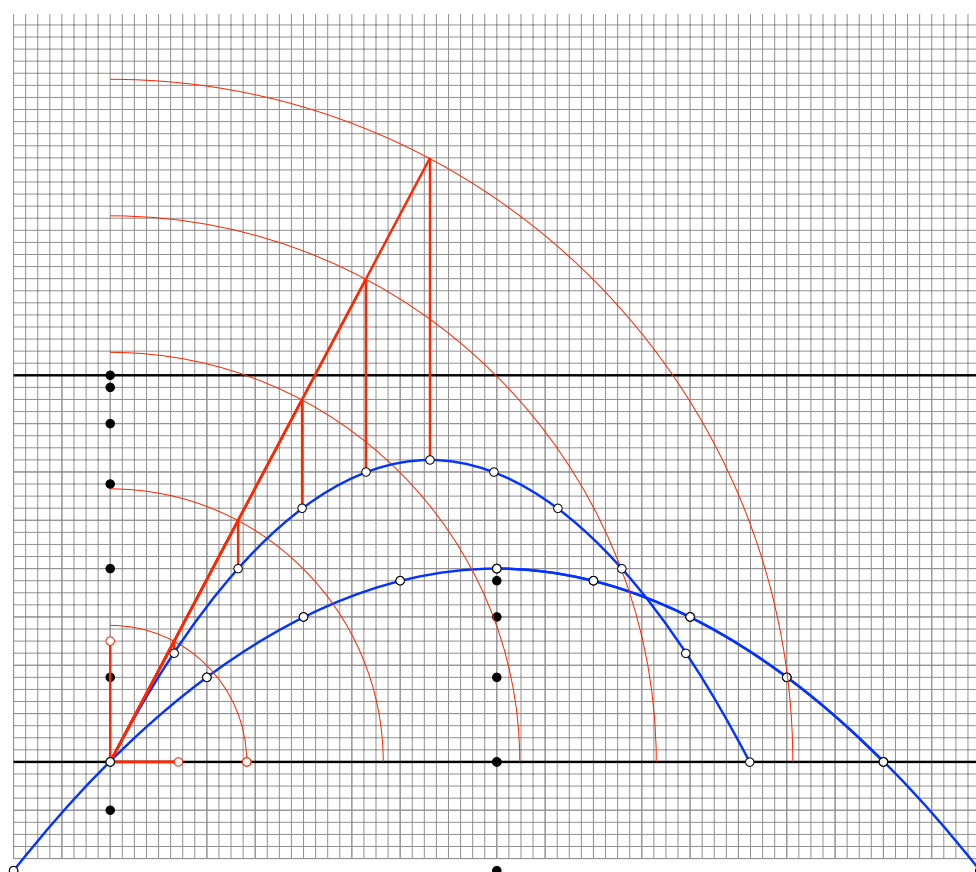
**Figura 67.** – Representação da velocidade da partícula com a elevação determinada em relação a horizontal.

dobrando, triplicando e quadruplicando este raio para determinarmos as posições ao longo da direção definida pelo ângulo de elevação  $\theta_0$  e “subtraímos” as distâncias na sequência do MRUV, na direção vertical, a partir da unidade, para o primeiro intervalo de tempo, seguida da serie 4, 9 e 16 unidades de comprimento, como representado na figura 68.

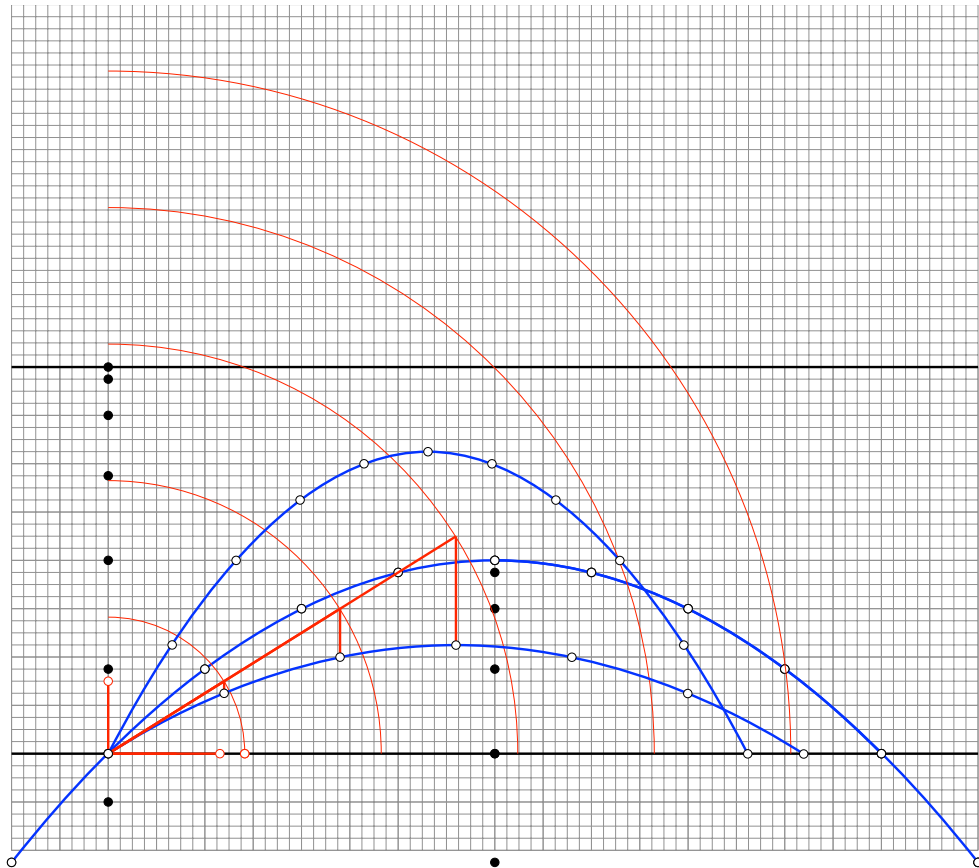
Diante dessa análise podemos construir outros lançamentos mantendo a velocidade inicial da partícula, igual a  $v_0$  e variando apenas a sua elevação. As figuras 69 e 70 ilustram a construção destas novas trajetórias parabólicas para dois ângulos de elevação: um que precisa de cinco unidades de tempo para alcançar o vértice da trajetória e outro que precisa de três unidades de tempo para alcançar o vértice de sua trajetória.



**Figura 68.** – Construção do movimento parabólico sobre outra representação geométrica.



**Figura 69.** – Construção de outro movimento que possui a mesma velocidade que o anterior mas elevação diferente em relação a horizontal.



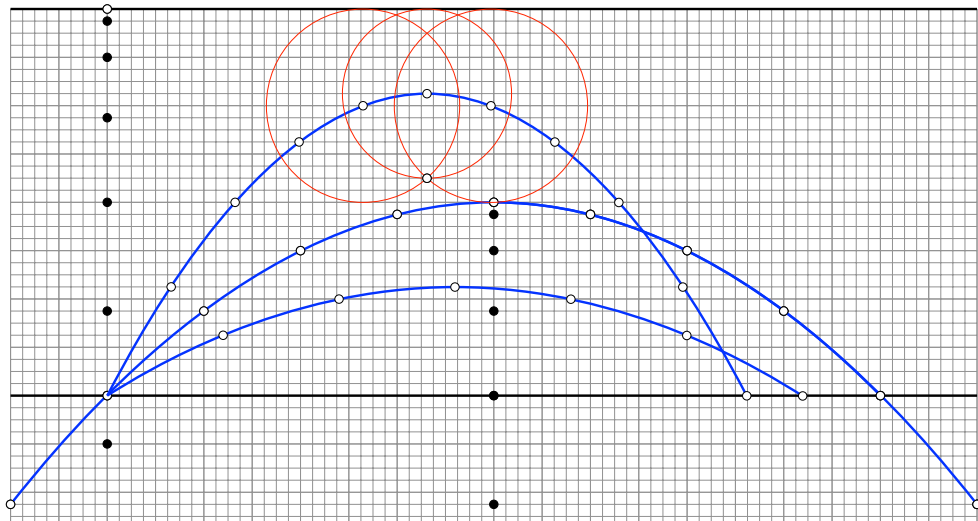
**Figura 70.** – Representação de outro movimento parabólico com 3 intervalos de tempo durante a subida.

### O lugar geométrico dos pontos focais das parábolas

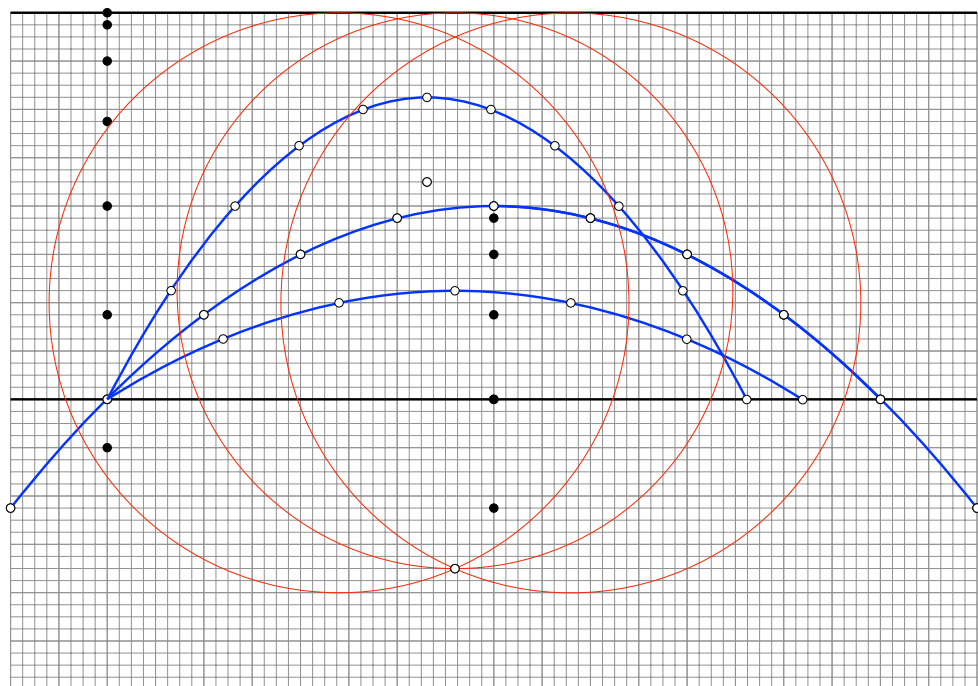
Nesta seção descrevemos como determinar o lugar geométrico dos pontos focais das diferentes trajetórias parabólicas que podem ser geradas com o módulo da velocidade inicial  $v_0$  sempre constante e somente variando o ângulo de elevação  $\theta_0$ .

Na figura 71 escolhemos três pontos da trajetória que precisa de seis unidades de tempo para alcançar o ápice da trajetória e traçamos circunferências de centro em dos pontos da trajetória e raio igual à distância deste ponto até a reta diretriz. Pela definição de parábola, o ponto focal fica completamente determinado pela na interseção dessas três circunferências, como representado na figura 71.

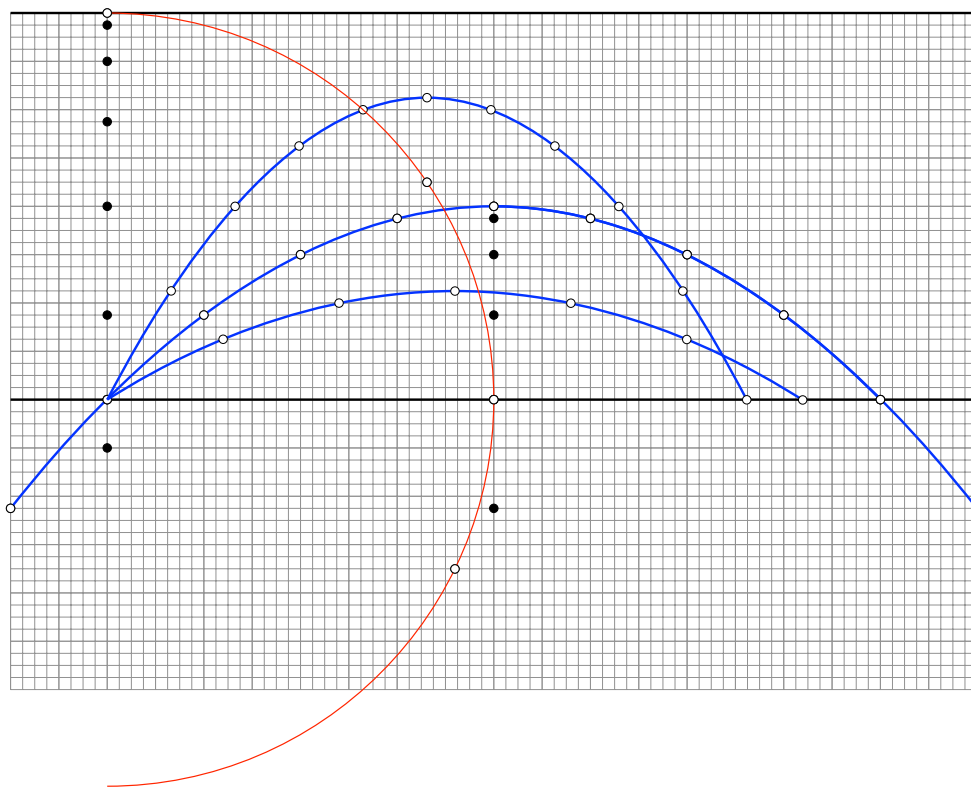
Repetimos a mesma construção para a curva que precisa de três intervalos de tempo para alcançar o ápice e determinamos o ponto focal desta trajetória, como indicado na figura 72. Temos agora os pontos focais de de três trajetórias parabólicas. Este processo pode ser realizado para não importa qual ângulo de elevação. Podemos verificar geometricamente, com o auxílio de um compasso, que um arco de circunferência passa por todos esses pontos focais, como representado na figura 73.



**Figura 71.** – Lugar geométrico do ponto focal para a trajetória que precisa de seis unidades de tempo para alcançar o ápice da trajetória. As circunferências de centro em dos pontos da trajetória e raio igual à distância deste ponto até a reta diretriz definem o ponto focal da trajetória.



**Figura 72.** – Lugar geométrico do ponto focal para a trajetória que precisa de três unidades de tempo para alcançar o ápice da trajetória. As circunferências de centro em dos pontos da trajetória e raio igual à distância deste ponto até a reta diretriz definem o ponto focal da trajetória.



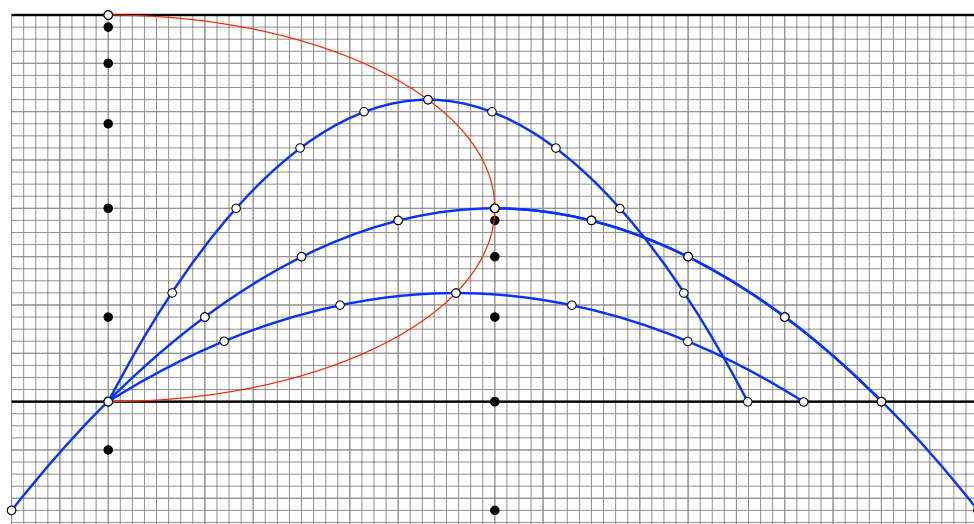
**Figura 73.** – Lugar geométrico dos pontos focais das diferentes trajetórias parabólicas que podem ser geradas com o módulo da velocidade inicial  $v_0$  sempre constante e somente variando o ângulo de elevação  $\theta_0$ . Esta curva é uma circunferência de raio igual a maior altura que pode ser alcançada, quando o ângulo de elevação  $\theta_0$  é igual a  $\pi/2$  e de centro na posição de lançamento do projétil.

### O lugar geométrico dos vértices das parábolas

Nesta seção descrevemos como determinar o lugar geométrico dos vértices das diferentes trajetórias parabólicas que podem ser geradas com o módulo da velocidade inicial  $v_0$  sempre constante e somente variando o ângulo de elevação  $\theta_0$ .

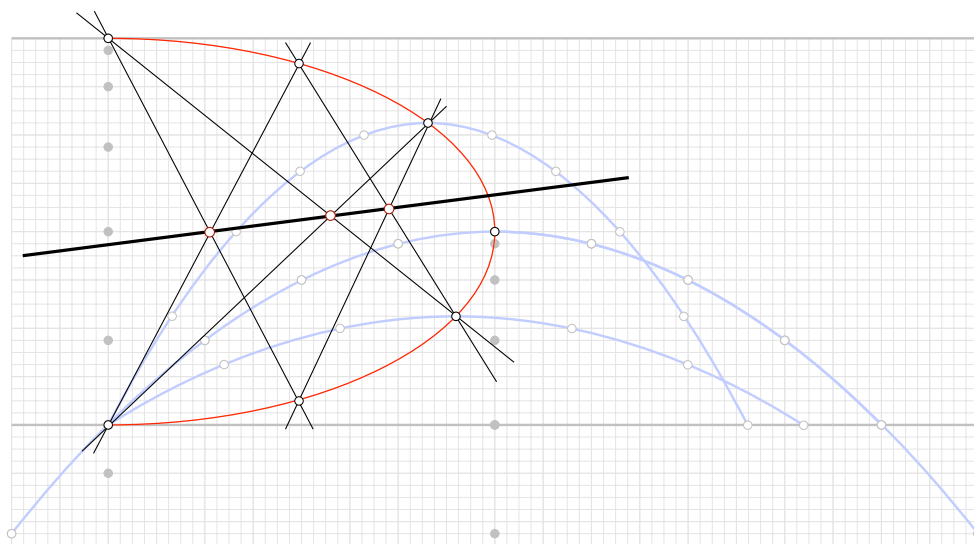
Conhecido o lugar geométrico das focais e a posição da reta diretriz, o vértice de cada uma das possíveis trajetórias parabólicas se encontra no ponto médio do segmento de reta vertical que possui estes dois pontos extremos. Com o auxílio da figura 73 determinamos os pontos onde se encontram os vértices das diferentes curvas parabólicas que podem ser geradas e o resultado está ilustrado na figura 74, onde traçamos essa curva.

Qual é esta curva? A geometria também pode nos auxiliar a responder a esta pergunta. Escolhemos seis pontos arbitrários sobre a curva que representa o lugar geométrico dos vértices das parábolas de forma a construir um hexágono, como ilustrado na figura 75. Conectamos estes seis vértices do hexágono por segmentos de reta de maneira a formar três pares de diagonais. Observamos na mesma figura que os três pontos representando as interseções dessas diagonais formam um segmento de reta. Pelo *Teorema Mysticum Hexagrammum* ou *Teorema de Pascal*, curvas cujos pontos apresentam esta característica



**Figura 74.** – Lugar geométrico dos vértices das diferentes trajetórias parabólicas que podem ser geradas com o módulo da velocidade inicial  $v_0$  sempre constante e somente variando o ângulo de elevação  $\theta_0$ . Esta curva é uma elipse de eixo menor  $B$  igual a metade da maior altitude que o projétil pode alcançar e de eixo maior  $A$  igual ao maior alcance horizontal que a partícula pode realizar.

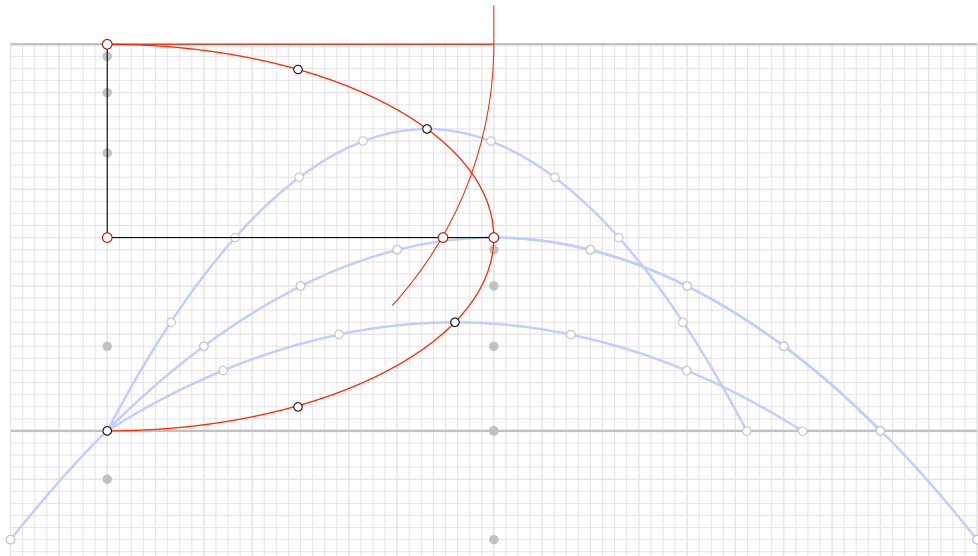
são denominadas *cônicas* e o segmento gerado pelos pontos das interseções é denominado *linha de Pascal*.<sup>3</sup> Concluimos então que a curva que representa o lugar geométrico dos pontos focais das diferentes trajetórias parabólicas é uma cônica: uma elipse ou uma parábola ou uma hipérbole.



**Figura 75.** – Escolha de seis pontos arbitrários sobre a curva que representa o lugar geométrico dos vértices das parábolas de forma a construir um hexágono e através de segmentos de reta formar três pares de diagonais, para usar o Teorema “Mysticum Hexagrammum” ou Teorema de Pascal de modo a determinar qual é curva.

<sup>3</sup> ver, por exemplo, o livro de Wells (1991).

As duas últimas opções aparentemente não se aplicam porque, observando a figura 74, devemos obter por simetria uma curva similar se os lançamentos do projétil fossem realizados para a esquerda da origem de coordenadas. Deste modo, a curva que representa o lugar geométrico dos vértices das parábolas deve ser uma curva fechada. Neste caso, a curva procurada só pode ser a elipse.



**Figura 76.** – Representação da elipse cujo o eixo menor  $B$  é igual a metade da maior altitude  $H$  que o projétil pode alcançar  $B = H/2 = v_0^2/4a$  e o eixo maior  $A$  da elipse é igual ao maior alcance horizontal que a partícula pode realizar, estabelecida pelo semilatus rectum da parábola de ângulo de elevação  $\theta_0 = \pi/4$ , onde  $A = 2B = 2(v_0^2/4a)$ .

De fato, como podemos observar da figura 76, esta elipse é uma curva de eixo menor  $B$  igual a metade da maior altitude  $H$  que o projétil pode alcançar,

$$B = \frac{H}{2} = \frac{v_0^2}{4a}. \quad (3.28)$$

O eixo maior  $A$  da elipse é igual ao maior alcance horizontal que a partícula pode realizar, estabelecida pelo semilatus rectum da parábola de ângulo de elevação  $\theta_0 = \pi/4$ :

$$A = 2B = 2 \left( \frac{v_0^2}{4a} \right) \quad (3.29)$$

A posição do foco da elipse também pode ser determinada empregando-se a régua e o compasso, como indicado na figura 76.

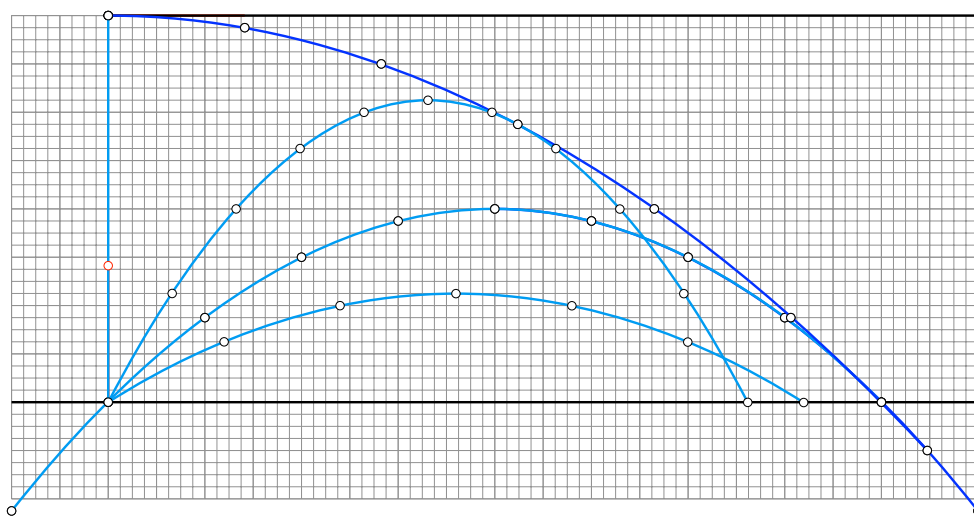
### A parábola de segurança

Observamos, a partir das figuras, que existe uma região que não é alcançada pela partícula. Isto significa que existe uma região de segurança que nenhum projétil que possua velocidade inicial  $v_0$  igual poderá alcançar, não importando qual será o ângulo de

elevação  $\theta_0$  que o lançamento se realiza. Vamos definir a fronteira da zona efetiva que a partícula alcança.

Observamos na figura 77 que a curva de segurança deve envelopar a máxima altura que a partícula pode alcançar e o máximo alcance horizontal que a partícula pode realizar. A curva de segurança deve então tangenciar todas as possíveis trajetórias parabólicas que as diferentes condições de elevação podem produzir.

Empregando o mesmo método do esquadro, como ilustrado na figura 60 percebemos que a curva que envelopa todas as possíveis parábolas também é uma parábola de ponto focal na posição de lançamento do projétil, como representado na figura 77.



**Figura 77.** – Família de curvas parabólicas para as respectivas elevações em relação a horizontal.

Da figura 78 observamos que

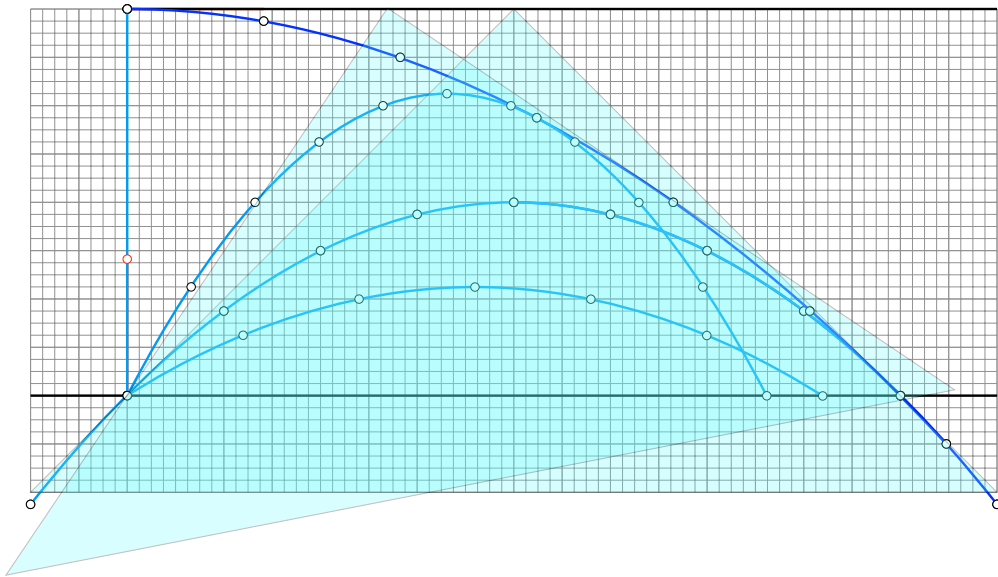
$$\frac{y'}{x'/2} = \frac{x'/2}{H}, \quad (3.30)$$

onde  $y' = H - y$  e  $x' = x$  são as ordenadas e abscissas de um ponto da curva envelope. As coordenadas  $y$  e  $x$  são a ordenada e a abscissa do mesmo ponto em relação ao ponto original de lançamento do projétil. Deste modo, temos que

$$y = H - \frac{x^2}{4H}. \quad (3.31)$$

Concluimos então que a curva de segurança também é uma parábola.





**Figura 78.** – Representação dos esquadros na determinação geométrica da equação que representa a família de curvas parabólicas para as respectivas elevações em relação a horizontal.

Como Neményi (1962) observa, a maioria destes resultados geométricos apresentados neste capítulo encontram-se nos trabalhos de Galileu e de Torricelli (1644), envolvendo várias aplicações, particularmente em hidrodinâmica. Torricelli, estudante do monge beneditino Benedetto Castelli, grande amigo de Galileu, foi assistente de Galileu durante os seus últimos meses de vida e o sucede como filósofo e matemático no ducado da Toscana. Torricelli reinvestiga e confirma os resultados de Galileu sobre a trajetória parabólica dos projéteis, se ignorarmos a resistência do ar, e ainda acrescenta às conclusões obtidas o seguinte corolário marcável: as trajetórias do projéteis que seguem diferentes direções mas com velocidade inicial de mesmo módulo são envoltas por uma outra parábola, a denominada parábola de segurança.

## 4 Considerações finais

Apresentamos neste trabalho um material didático para a descrição geométrica do movimento de uma partícula e escolhemos a geometria básica para desenvolver essa tarefa. Assim, apresentamos os conceitos fundamentais dessa geometria e algumas construções e demonstrações geométricas também foram utilizadas ao longo do trabalho para assim construir toda a cinemática usualmente apresentada aos alunos do ensino médio e de graduação. A proposta de ensino que discutimos nessa dissertação auxilia o professor na preparação das aulas de introdução à mecânica clássica.

O objetivo principal da nossa atividade é construir os conceitos físicos relevantes para a descrição do movimento utilizando somente a geometria euclidiana e ressaltando que o emprego da geometria básica permite apresentar o mesmo conteúdo específico da cinemática e simultaneamente realçar os seus aspectos geométricos. Isto permite ao professor explorar a parte visual do movimento, por intermédio de sua construção, juntamente com o aspecto vetorial das grandezas físicas envolvidas no processo.

Vale ainda ressaltar que ao longo dos últimos 2000 anos a geometria de Euclides tem sido ensinada em escolas e universidades e durante algum tempo também esteve associada ao desenvolvimento do raciocínio lógico. Entretanto, como Anglin e Lambek (1998) nos chamam a atenção, após a Segunda Grande Guerra houve uma reação dos educadores contra este programa de ensino. Decidiu-se então que a geometria euclidiana não seria o instrumento apropriado para o treinamento em Lógica e, em 1889, Hilbert apresenta uma descrição axiomática mais adequada para a descrição do espaço euclidiano tridimensional. As discussões geométricas apresentadas em nosso trabalho poderiam servir de introdução ao rigoroso tratamento da geometria realizado por de Hilbert para alunos mais avançados.

Desejamos também, com este trabalho, resgatar a geometria básica e ao apresentarmos os movimentos retilíneo uniforme, retilíneo uniformemente variado e o movimento parabólico não nos limitarmos somente em resolver equações algébricas e determinar uma resposta numérica. Queremos explorar a geometria destes movimentos e fundamentar as leis da dinâmica de outros movimentos mais complexos.

Este trabalho também apresenta uma estratégia alternativa para as aulas iniciais de Mecânica que pode ser empregada pelos professores em seus planos de aula. Nossa proposta também pode ser realizada em uma aula interdisciplinar junto com o professor de matemática. Ela reforça as habilidades dos alunos em construções geométricas utilizando régua e compasso e na interpretação das figuras geométricas construídas.

Estes aspectos didáticos vão ao encontro das recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), em geral, e dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), em particular. Os PCNs orientam os professores a fazer referência à História da Ciência, à experimentação, à construção do conhecimento passo a passo e

à interdisciplinaridade (BRASIL, 1996; BRASIL, 1998). Os PCNEM estabelecem como dimensões para o ensino de Física a investigação, a abstração e generalização, assim como a aplicação do conhecimento científico e tecnológico (BRASIL, 2002a; BRASIL, 2002b; BRASIL, 2006).

Como observado por Abramovich (2011, 2014), “uma das mais produtivas maneiras de ensinar matemática na era digital é através da experimentação com conceitos matemáticos que aproveitem a capacidade dos computadores em realizar gráficos sofisticados, construir formas geométricas dinâmicas, gerar sequências numéricas interativas e realizar computação simbólica.” Animados por esta perspectiva, esperamos que um dos possíveis desdobramentos deste nosso trabalho seja o emprego de programas computacionais de geometria e matemática simbólica na discussão didática dos problemas físico-matemáticos e na fundamentação das leis da dinâmica.

Por fim, incluímos na versão impressa desta dissertação um CD contendo todo o material apresentado ao longo do texto em forma digital. O conteúdo do CD está organizado em uma sequência de “aulas” auto-instrutivas onde apresentamos as construções geométricas de forma bem detalhada. Elas podem ser utilizadas tanto em sala de aula quanto fora dela ou pelo próprio professor ou pelos alunos sob sua orientação. Todo o material desta dissertação também está disponível na página eletrônica do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Física: <[http://www.if.ufrj.br/~pef/producao\\_academica/dissertacoes.html](http://www.if.ufrj.br/~pef/producao_academica/dissertacoes.html)>

## Referências

- ABRAMOVICH, S. *Computer-enabled Mathematics: Integrating Experiment and Theory in Teacher Education*. New York: Nova Science Publishers, 2011. (Education in a competitive and globalizing world series).
- ABRAMOVICH, S. *Computational Experiment Approach to Advanced Secondary Mathematics Curriculum*. New York: Springer, 2014. (Mathematics Education in the Digital Era, v. 3).
- ANGLIN, W. S.; LAMBEK, J. *The heritage of Thales*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1998.
- BECKMANN, P. *A History of Pi*. 3. ed. New York: St. Martin's Griffin, 1976.
- BRASIL. Lei de diretrizes e bases da educação nacional. Lei no 9.394, de 20 de dezembro de 1996. 1996.
- BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- BRASIL. *PCN+Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais; Ciências da natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.
- BRASIL. *PCN+Física: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias*. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.
- BRASIL. *PCN+Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: MEC/Semtec, 2006.
- BRUNO, G.; GALILEI, G.; CAMPANELLA, T. *Sobre o infinito, o Universo e os mundos, O Ensaíador, A Cidade do Sol*. Traduções de Helda Barraco, Nestor Deola e Aristides Lôbo. 3. ed. São Paulo: Abril Cultural, 1983. (Coleção Os Pensadores, v. 12).
- CLAGETT, M. *Nicole Oresme and the Medieval Geometry of Qualities and Motion: Treatise on the Uniformity and Difformity of Intensities Known as Tractatus de configurationibus qualitatum et motum*. Tradução e notas de Marshall Clagett. Madison: University of Wisconsin Press, 1968. (Publications in Medieval Sciences).
- COOLIDGE, J. L. *A history of geometrical methods*. New York: Courier Corporation, 2003. 544 p. Reimpressão da edição de 1931 da Oxford University Press.
- EINSTEIN, A. *A teoria da relatividade especial e geral*. Tradução Carlos Almeida Pereira. Rio de Janeiro: Contraponto Editora, 2003. 136 p.
- EUCLIDES. *Os Elementos*. Tradução Irineu Bicudo. 1. ed. São Paulo: UNESP, 2009. 593 p. Original grego.
- EVES, H. Means appearing in geometric figures. *Mathematics Magazine*, v. 76, n. 4, p. 292–294, 2003.

- FARIA, A. da Silva Ramos de. *Movimento parabólico de projéteis e suas características*. Rio de Janeiro – RJ, Dezembro 2012. Trabalho de final de Curso de Licenciatura em Física.
- FEATHER, N. *Mass, length, and time*. [S.l.]: Penguin Books, 1961.
- GALILEI, G. *Dois novos ciências*. Tradução de L. Mariconda e P.R. Mariconda. São Paulo: Nova Stella, 1988.
- KISELEV, A. P. *Kiselev's Geometry / Book I. Planimetry*. First printing. [S.l.]: Sumizdat, 2006.
- NEMÉNYI, P. F. The main concepts and ideas of fluid dynamics in their historical development. *Archive for History of Exact Sciences*, v. 2, n. 1, p. 52–86, 1962.
- SAVOIE, D. *Sundials: Design, Construction, and Use*. Berlim: Springer, 2009.
- SILVA NETTO, M. F. da. *Uma construção geométrica do referencial*. Rio de Janeiro, Abril 2013. 41 p. Trabalho de final de Curso de Licenciatura em Física.
- STRUVE, W. *Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums*. [S.l.]: Quellen vnd Studien zur Geschichte der Mathematik, 1930.
- TONNELAT, M.-A. *Histoire du principe de relativité*. Paris: Flammarion, 1971. 74 p.
- TORRICELLI, E. *De motu gravium naturaliter descendentium, et proiectorum. Opera Geometrica*. Florença: [s.n.], 1644.
- WELLS, D. *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry*. London: Penguin, 1991.