UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Física
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física
Mestrado Profissional em Ensino de Física

As estrelas negras de Michell e Laplace

Rodrigo Rodrigues Machado
&
Alexandre Carlos Tort

Material instrucional associado à dissertação de mestrado de Rodrigo Rodrigues Machado, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Rio de Janeiro
fevereiro de 2016

As estrelas negras de Michell e Laplace

Rodrigo Rodrigues Machado
Alexandre Carlos Tort

1 A estrela escura de John Michell

Introdução

O conceito moderno de buraco negro como uma região do espaço–tempo da qual a luz não pode escapar tem suas origens no século 18 com o reverendo inglês John Michell (1724–1793) que propôs a existência de estrelas invsíveis para o observador – *estrelas escuras*– porque a luz não poderia escapar da atração gravitacional gerada por elas. A sugestão de Michell está em um trabalho apresentado perante a *Royal Society* de Londres por Henry Cavendish (1731–1810) em três sessões distintas: 11 e 18 de dezembro de 1783 e 15 de janeiro de 1784 [1, 2] e publicado em 1784 nas atas da *Royal Society* [3]. Cavendish era considerado o mais importante cientista teórico e experimental do Reino Unido em seu tempo e a apresentação e leitura pública dos resultados de Michell atesta a afinidade científica entre os dois filósofos naturais, ambos newtonianos convictos e adeptos da aplicação da teoria à obtenção de resultados concretos aplicáveis às observações experimentais. Ambos também eram adeptos do modelo corpuscular da luz. A importância dos trabalhos científicos de Michell como astronômo e sismólogo com contribuições importantes para estas áreas da ciência só recentemente começou a ser reconhecida [1, 4].

Nesta nota descreveremos a parte do trabalho de Michell de 1784 concernente à possibilidade da existência de estrelas de estrelas escuras. Para facilitar a compreensão, a linguagem (newtoniana) geométrica original[1] será traduzida para a

[1]"Mesmo o estilo geométrico de raciocínio de Michell é profundamente newtoniano" , W. Is-

linguagem dos textos modernos de cálculo e mecânica clássica como sugerido em [2].

Estrelas escuras e velocidade de escape

No diagrama que acompanha o trabalho original de Michell – ver Figura 1 – O círculo de raio $\mathcal{R} = |CD|$ representa uma estrela de massa M, a semirreta vertical representa a distância radial r ao centro da estrela, ponto C, e os segmentos de reta horizontais representam o módulo da força gravitacional F. Por exemplo, como o comprimento do segmento de reta dr é menor do que o comprimento de DR, a intensidade da força gravitacional em $r = |Cd|$ é menor do que em $r = \mathcal{R} = |CD|$. Em linguagem moderna, o diagrama de Michell representa o gráfico da força gravitacional como função da distância radial ao centro da estrela.

A idéia de Michell é calcular a velocidade radial terminal de um corpo de massa m que parte com velocidade inicial nula de uma distância radial r tal que $r \gg \mathcal{R}$, quando este atinge a superfície da estrela em $r = \mathcal{R}$. Esta velocidade será igual à velocidade de escape no problema do movimento inverso: com que velocidade deve ser lançado um corpo se quisermos que ele chegue ao infinito com velocidade nula.

Na Figura 1, a área entre a curva BrR e o segmento de reta DR é o trabalho realizado pela força gravitacional sobre o corpo que cai. Pelo teorema trabalho-energia cinética podemos escrever

$$-\int_{\infty}^{r} \frac{GMm}{r'}\, dr' = \frac{mv^2}{r}.$$

Integrando o lado esquerdo obtemos:

$$v^2 = \frac{2GM}{r}.$$

O trabalho W realizado pela força gravitacional é igual à área do retângulo rdC:

rael em [1]

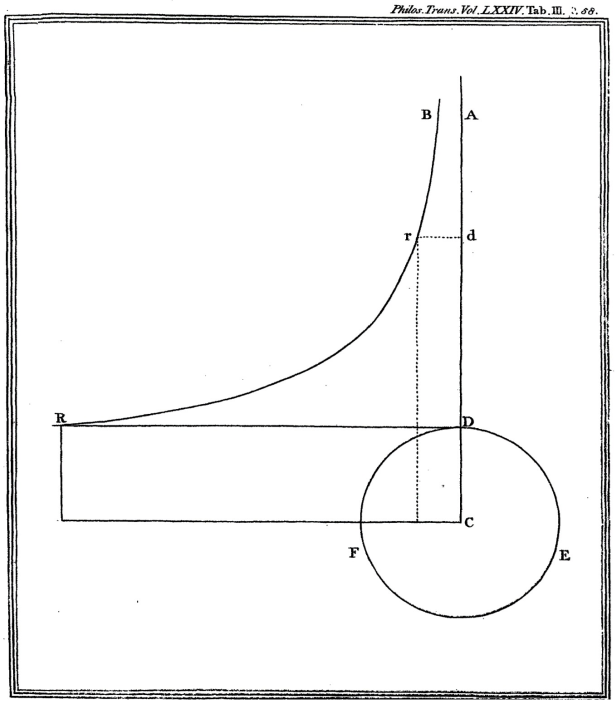

Figura 1: Figura original do trabalho de 1784 de J. Michell.

$$W = \frac{GMm}{r^2} \times r = \frac{GMm}{r}.$$

Este trabalho também é igual á área sob a curva $AdrB$. Na superfície da estrela, $r = \mathcal{R}$, o trabalho é

$$W = \frac{GMm}{\mathcal{R}},$$

que é igual à área do retângulo CDR, que por sua vez é igual à área sob a curva BR. A velocidade radial do corpo neste caso será

$$v^2 = \frac{2GM}{\mathcal{R}}.$$

Suponhamos agora que a estrela tenha uma densidade uniforme ρ, isto é: $\rho \propto M/R^3$. Então, para um r arbitrário, a velocidade radial se escreve,

$$v^2 = \gamma\rho\,\frac{\mathcal{R}^3}{r},$$

onde

$$\gamma \equiv \frac{8\pi}{3}\,G.$$

Na superfície da estrela a velocidade radial terminal é

$$v^2 = \gamma\rho\,\mathcal{R}^2.$$

A velocidade terminal do corpo em queda livre seria independente do tamanho da estrela se o produto $\rho\mathcal{R}^2$ fosse constante, o que implicaria em $\rho \propto 1/\mathcal{R}^2$, que não é o caso aqui, pois como vimos, Michell supôs densidade uniforme: ρ depende do inverso do cubo do raio da estrela fixa.

Para determinar a velocidade terminal é preciso rescrevê-la em termos de quantidades mais convenientes à observação astronômica. Michell sabia que a velocidade radial terminal de um corpo em queda livre a partir do repouso e de uma altura infinita é igual àquela que teria em uma órbita parabólica osculante à superfície do Sol no ponto de retorno., o ponto no qual a velocidade radial é zero. De fato, a energia de um corpúsculo de massa m no problema de Kepler se escreve [5]:

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r},$$

onde supusemos que $m \ll M$ e

$$\ell = mr^2\dot{\theta},$$

é o momento angular do corpúsculo em relação ao centro geométrico do Sol. Aqui θ é o ângulo entre o vetor posição do corpúsculo com origem no centro de força e o eixo principal de simetria da órbita – Figura 2. A solução do problema de Kepler é dada por três famílias de órbitas conhecidas como *cônicas*, a elipse, a parábola e a hipérbole. A órbita circular é um caso particular da elipse. Para uma

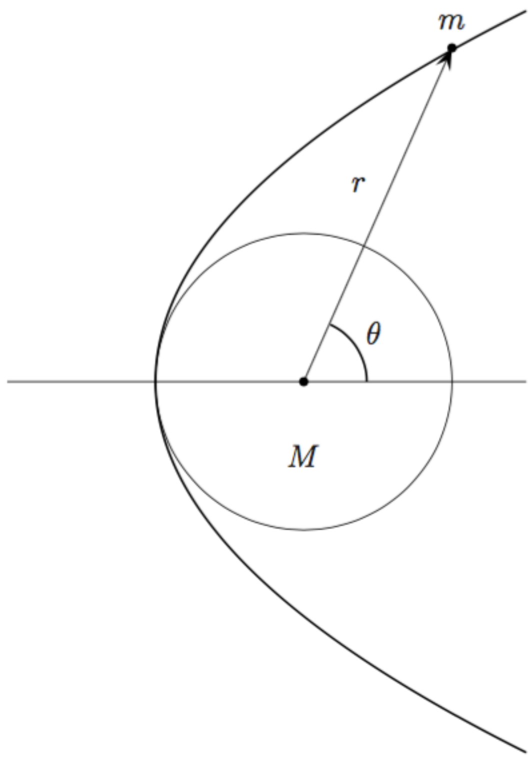

Figura 2: Órbita parabólica que roça a superfície do Sol no ponto de retorno.

órbita parabólica, o corpúsculo parte do repouso de uma distância inicial r muito maior do que o raio do Sol, i.e.: podemos tomar o limite $r \to \infty$ na equação para a energia. Mas observe que o momento angular ℓ pode ser não-nulo, pois se no limite $r \to \infty$ fizermos $\dot{\theta} \to 0$ de modo conveniente, o produto $r^2\dot{\theta}$ será finito. Portanto, na órbita parabólica, a energia mecânica inicial E é nula e como a atração gravitacional newtoniana é uma força conservativa, permanecerá nula durante todo o movimento. Como no ponto em que a parábola toca a superfície do Sol, a velocidade radial é nula, podemos escrever

$$-GM + \frac{(\mathcal{R}\dot{\theta})^2}{2\mathcal{R}} = 0.$$

Mas, $\mathcal{R}\dot{\theta}$ é a velocidade tangencial V do corpo no ponto de retorno, logo

$$V^2 = \frac{2GM}{\mathcal{R}},$$

isto é, a mesma que teria em queda livre a partir do repouso ao atingir a superfície do Sol! Portanto, $V = v$.

Michell a seguir relaciona a velocidade radial terminal do corpo em queda livre com a velocidade tangencial da Terra em sua órbita ao redor do Sol. Isto pode ser feito da seguinte forma: considere a órbita aproximadamente circular[2] de raio $\mathcal{D}$ da Terra em torno do Sol. A força centrífuga sobre a Terra é fornecida pela força de atração gravitacional, logo

$$\frac{GM}{\mathcal{D}^2} = \frac{V_\oplus^2}{\mathcal{D}},$$

onde $V_\oplus$ é a velocidade tangencial da Terra em torno do Sol. Portanto,

$$V_\oplus^2 = \frac{GM}{\mathcal{D}}.$$

O raio da órbita da Terra pode ser escrito como um múltiplo do raio do Sol, isto é: $\mathcal{D} = \lambda\mathcal{R}$, onde $\lambda = 214{,}64$. Então, podemos escrever:

$$V_\oplus^2 = \frac{GM}{\lambda\mathcal{R}} = \frac{2 \times GM}{(2\lambda) \times \mathcal{R}} = \frac{v^2}{2\lambda}.$$

Segue que:

$$v^2 = 429,28\, V_\oplus^2,$$

ou, extraindo a raíz quadrada de ambos os lados desta equação:

$$v = 20{,}72\, V_\oplus.$$

Michell sabia que a velocidade da luz c era igual a $10\,310$ vezes a velocidade da tangencial da Terra em torno do Sol[3] isto é:

[2]A excentricidade da órbita da Terra em torno do Sol é muito pequena: $\varepsilon = 0.00335$, a aproximação de órbita circular funciona muito bem no que diz respeito aos aspectos pedagógicos.

[3]A velocidade da luz foi medida por James Bradley (1693–1762) em 1728. Bradley usou o método da aberração estelar (descoberta por ele) e obteve o valor: $c = 301\,000\,\text{km/s}$. Este valor

$$c = 10\,310\,V_{\oplus}.$$

Segue que

$$\frac{c}{v} = \frac{10\,310}{20{,}72} \approx 498.$$

Suponha agora que c seja a velocidade terminal de um corpúsculo de luz que atinge a superfície de uma estrela de raio $\mathcal{R}'$ que tem a mesma densidade que o Sol. Então, podemos escrever:

$$c^2 = \gamma\rho\mathcal{R}'^2.$$

Segue que

$$\frac{c}{v} = \frac{\mathcal{R}'}{\mathcal{R}} = 498,$$

isto é, se uma estrela tiver um raio igual a 498 vezes o raio do Sol, a sua velocidade de escape será igual a velocidade da luz! Nas palavras de Michell:

> *.. se o semi-diâmetro de uma esfera com a mesma densidade do Sol excedesse o semi-diâmetro do Sol na proporção de* 500 *para* 1*, um corpo que caísse de uma altura infinita em direção a ela [a esfera] teria na sua superfície uma velocidade maior do que a velocidade da luz, e consequentemente, supondo que a luz fosse atraída pela mesma força em proporção com sua* vis inertiae *[massa], como outros corpos, toda a luz emitida por tal corpo [a esfera] retornaria a ele em razão da sua própria gravidade [3].*

A estrela escura de Michell é a versão newtoniana dos buracos negros previstos pela teoria relativística da gravitação de Einstein.

---

significa que a velocidade tangencial da Terra é: 29 195 km/s. O valor moderno da velocidade tangencial média (velocidade orbital) é 29,78 km/s.

A massa da estrela escura de Michell

De acordo com a descrição de Michell, uma estrela com um raio aproximadamente igual a 500 vezes o raio do Sol e mesma densidade ($\rho_\odot = 1{,}41 \times 10^3$ kg/m^3) terá uma massa igual a

$$M_{\text{estrela escura}} = (500)^3 M_\odot = 1.25 \times 10^8\, M_\odot,$$

onde $M_\odot = 1{,}99 \times 10^{30}\,$kg é a massa do Sol. Como comparação tenhamos em mente que um buraco negro estelar tem uma massa entre 5 e 30 massas solares. A estrela escura de Michel tem uma massa da ordem de um buraco negro supermassivo cuja massa está entre 10^6 e 10^9 massas solares.

Conclusões

O cálculo pioneiro de John Michell nos mostra que para uma estrela com massa igual à massa do Sol, mas raio 500 vezes maior, a velocidade de escape ígual à velocidade da luz, logo, é capaz de aprisionar a luz. Tal estrela seria invísivel aos observadores aqui na Terra o que levou Michell a ponderar sobre a existência muitas delas:

> *Se na Natureza existem realmente corpos cuja densidade não é menor do que a [densidade] do Sol, e cujos diâmetros*[4] *[raios] são* 500 *vezes maiores do que o diâmetro [raio] do Sol, como sua luz não poderia chegar até nós; ou se existem outros corpos de menor tamanho que são naturalmente não–luminosos, sobre suas existências nessas circuntâncias não poderíamos ter informações provindas da luz [emitida]; ainda assim, se outros corpos luminosos revolvessem em torno deles. poderíamos talvez a partir do movimento revolvente desses corpos inferir a existência dos corpos centrais com um certo grau de probabilidade, já que isto poderia dar uma pista para algumas das irregularidades dos corpos revolventes, as quais não poderiam ser explicadas facilmente com outras hipóteses... [3].*

[4]Pelo exposto antes, no contexto, o termo *diâmetro* deve ser interpretado como o raio

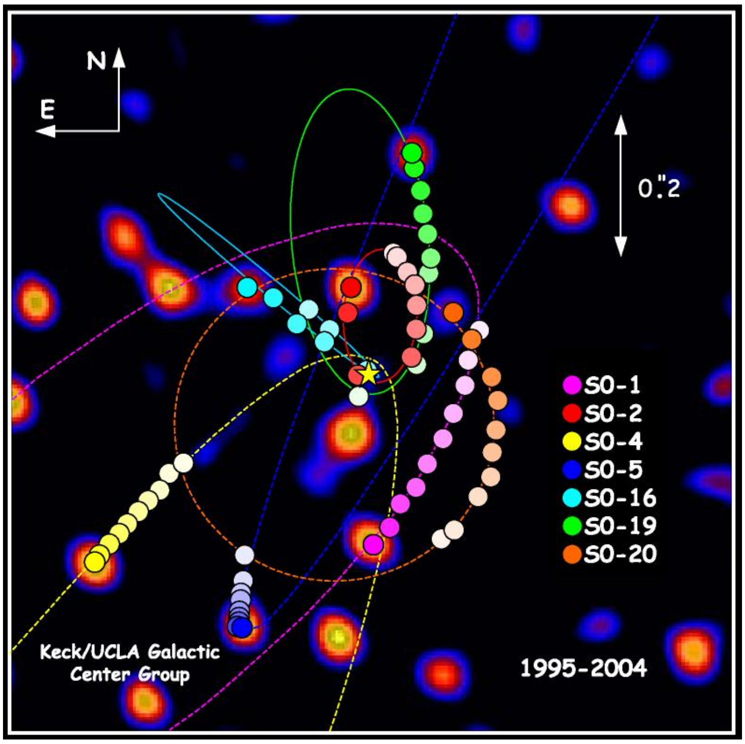

Figura 3: O buraco negro no centro da nossa galáxia. A estrela amarela no centro da imagem marca a posição do buraco negro. Órbitas de várias estrelas são mostradas. (Imagem Telescópio Keck/UCLA Galactic Center Group.)

É notável a confiança de Michell nos métodos da mecânica newtoniana e sua antecipação de um dos métodos modernos de detectar buracos negros. Uma descrição pedagógica sobre a detecção do buraco negro no centro da Via Láctea que faz uso da terceira lei de Kepler não–relativística, uma consequência das leis da mecânica newtoniana, é apresentada em [6]. Longe do buraco negro, a terceira de Kepler pode dar-nos um resultado aceitável para a sua massa, que no caso foi estimada em $4 \times 10^6\, M_\odot$, isto é: 4 billhões de massas solares.

Como veremos alhures, doze anos mais tarde, o grande físico–matemático francês Pierre Simon Laplace apresentaria sua versão newtoniana de uma estrela escura, [7, 8].

2 A estrela escura de Laplace

Doze anos após o trabalho de Michell ter sido apresentado por Cavendish perante a *Royal Society* e publicado nas suas atas [3], Laplace em 1796 [7] escreve sem demonstrar:

> *A atração gravitacional de uma estrela com um diâmetro de 250 vezes o diâmetro do Sol e comparável em densidade com a [densidade] da Terra seria tão grande que a luz não poderia escapar da sua superfície. Os maiores corpos do Universo poderiam ser invisíveis por causa da sua magnitude [da velocidade de escape] .*

Em 1799, atendendo ao pedido do editor de uma revista geográfica alemã, Laplace publica sua demonstração [8]. E eis aqui uma versão do cálculo de Laplace ao longo das linhas esboçadas em [2]. Seja m a massa do corpúsculo de luz[5]. Por simplicidade, consideremos apenas o seu movimento radial. Fazendo uso da lei newtoniana do movimento escrevemos:

$$F = m\,\frac{dv}{dt} = m\,\frac{dr}{dt}\frac{dv}{dr} = m\,v\frac{dv}{dr};$$

Mas, como o corpúsculo está sujeito à lei de atração universal, o lado esquerdo da equação acima se escreve:

$$F = -\frac{GMm}{r^2}.$$

O sinal negativo indica que a força gravitacional atua no sentido oposto ao movimento radial do corpúsculo de luz. Portanto, podemos escrever

$$-\frac{GM}{r^2}\,dr = v\,dv.$$

Integrando ambos os lados desta equação:

$$\frac{2GM}{r} + 2C = v^2,$$

[5]Laplace, como Michell, adota o modelo corpuscular para a luz. Mais tarde, como consequência dos experimentos de Young abandonaria o modelo corpuscular e retiraria o cálculo da velocidade de escape discutido aqui da sua obra.

onde C é uma constante de integração a ser determinada. Suponha agora que c seja o módulo da velocidade da luz na superfície da estrela cujo raio é R, isto é:

$$\frac{2GM}{R} + 2C = c^2,$$

logo,

$$2C = c^2 - \frac{2GM}{R}.$$

e a velocidade radial em função de r se escreve:

$$v^2 = c^2 - \frac{2GM}{R} + \frac{2GM}{r}.$$

Considere uma segunda estrela de massa $M' = \alpha M$, onde α é um número real maior do que a unidade. Suponhamos que o corpúsculo de luz tenha a mesma velocidade radial inicial que no caso anterior. Então é fácil ver que podemos escrever,

$$v'^2 = c^2 - \frac{2G\alpha M}{R'} + \frac{2G\alpha M}{r'},$$

onde R' é o raio da segunda estrela. Suponhamos agora que $r' \to \infty$, então:

$$v'^2 = c^2 - \frac{2G\alpha M}{R'}.$$

Agora façamos a suposição adicional que para a segunda estrela, a atração gravitacional seja tão forte que quando $r \to \infty$, o corpúsculo de luz tenha velocidade radial nula, isto é: $v' = 0$. Segue que

$$c^2 = \frac{2G\alpha M}{R'}.$$

Agora vejamos o ponto crucial do argumento de Laplace: a determinação de α. Se supusermos que as estrelas têm densidade uniforme podemos escrever:

$$\frac{M}{M'} = \frac{\rho R^3}{\rho' R'^3},$$

onde ρ e ρ' são as densidades da primeira e da segunda estrela, respectivamente. Laplace agora faz uso da suposição apresentada na primeira parte de [7]: o raio da segunda estrela é 250 vezes maior do que o raio da primeira, isto é: $R' = 250R$. Segue que:

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\rho}{(250)^3\,\rho'},$$

ou

$$\alpha = (250)^3\,\frac{\rho'}{\rho}.$$

Substituindo este resultado na equação para c^2 obtemos:

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{c^2 R}{2(250)^2\,M}.$$

Observe que a densidade relativa da segunda estrela depende da massa e do raio da primeira, o que sugere a escolha de uma estrela conhecida para a determinação da densidade da segunda estrela, a estrela escura. Laplace escolhe então o Sol como a primeira estrela, isto é: $R = R_{\odot}$ e $M = M_{\odot}$. A seguir, Laplace relaciona c com as observações relativas ao movimento da Terra em torno do Sol. Do diagrama 1 da Figura 4, podemos escrever

$$\frac{GM_{\odot}M_{\oplus}}{D^2} = M_{\oplus}\,\frac{V^2}{D},$$

onde D é a distância média entre o Sol e a Terra e V é a velocidade tangencial desta última. Segue que a massa do Sol pode ser escrita como

$$M_{\odot} = V^2 D.$$

Substituindo na expressão para a densidade relativa temos finalmente:

$$\frac{\rho'}{\rho_{\odot}} \equiv \rho_{\text{rel ao Sol}} = \frac{8}{(1000)^2}\,\left(\frac{a}{V}\right)^2\,\left(\frac{R_{\odot}}{D}\right).$$

Desprezando os efeitos gravitacionais que o Sol exerce sobre o corpúsculo luminoso, Laplace faz uso das medidas conhecidas na época da aberração da luz solar

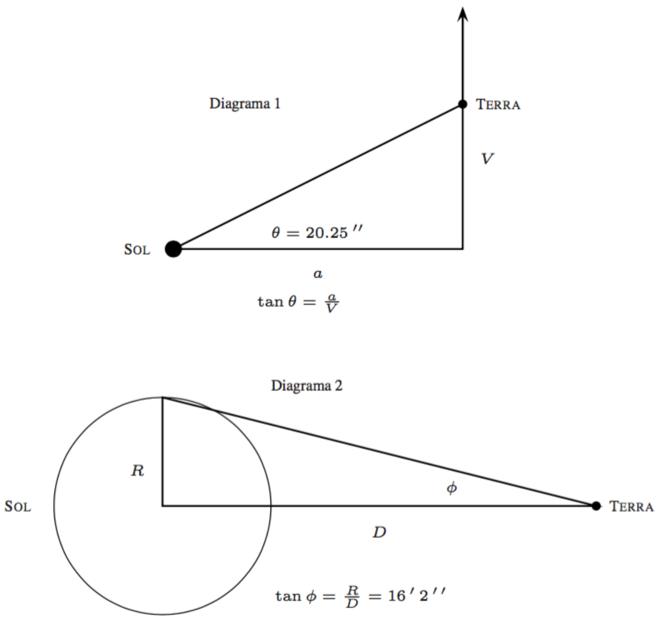

Figura 4: Diagramas para o cálculo de Laplace.

$$\frac{c}{V} = \frac{1}{\tan\ 20{,}25''}.$$

Por outro lado, do diagrama 2 da Figura 4, e usando os resultados observacionais da época:

$$\frac{R_\odot}{D} = \tan 16'\,2''.$$

Portanto, a densidade da segunda estrela – a estrela escura – é

$$\rho_{\text{rel ao Sol}} = \frac{8\ \tan 16'\,2''}{(1000\ \tan\ 20{,}25'')^2} \approx 4.$$

Este valor está próximo ao valor da densidade da Terra, isto é $\rho_{\text{rel Terra/ Sol}} = 5\,513/1\,420 \approx 4$. Portanto, a estrela escura deve ter um diâmetro 500 vezes maior do que o diâmetro do Sol e uma densidade igual a densidade média da Terra. Em termos de massas solares, a massa dessa estrela seria:

$$M_{\text{estrela escura}} = 4 \times \frac{M_\odot}{R_\odot^3} \times (250)^3\, R_\odot^3 = 6{,}25 \times 10^7\, M_\odot.$$

Este valor é 10 vezes menor do que o valor obtido por Michell: $1{,}25 \times 10^8 M_\odot$.

Como curiosidade, podemos obter o valor da velocidade da luz usada por Laplace e compará-la com o valor moderno. A expressão para c^2 pode ser rescrita na forma:

$$c^2 = \frac{2\,(250)^2\, GM_\odot\, \rho_{\text{rel ao Sol}}}{R_\odot}.$$

Dividindo ambos os lados pelo quadrado do valor aceito para o módulo da velocidade da luz, identificando o raio de Schwarzschild do Sol, extraindo a raíz quadrada e inserindo o valor 4 para a densidade relativa ao Sol da estrela escura, temos:

$$\frac{c}{c_{\text{atual}}} = 500 \times \sqrt{\frac{R_{\text{s}}}{R_\odot}},$$

Como para o Sol: $R_{\text{s}} = 2{,}95\,\text{km}$, e $R_\odot = 696\,000\,\text{km}$, obtemos:

$$c = 1.029\, c_{\text{atual}}\,.$$

Este é o módulo da velocidade limite. Para um valor infinitesimalmente inferior a este limite a luz não consegue escapar da atração gravitacional da estrela escura, isto não significa necessariamente que o corpúsculo de luz não possa ser emitido da superfície da estrela, mas acabará por ser atraído e voltará. Um observador distante provavelmente não perceberia a radiação e a estrela para ele seria escura.

Referências

[1] W. Israel: *Dark stars: the evolution of an idea*, em *Three Hundred Years of Gravitation*, S. W. Hawking e W. Israel editores, (CUP; Cambridge) (1987).

[2] C. Montgomery, W. Orchiston e I. Whittingham: *Michell, Laplace and the origin of the black hole concept* J. of Astron. Hist. and Her. **12** 2 90 – 96

(2009).

[3] J. Michell: *On the means of discovering the distance, magnitude, &c. of the fixed stars in consequence of the diminution of the velocity of their light in case such a diminution should be found to take place in any of them, and such other data should be procured from observations as would be farther necessary for that purpose* Phil. Transc. Roy. Soc. of London **74** 1783.

[4] G. Gibbons: *The man who invented black holes [his work emerges out of the dark after two centuries]*, New Scientist, 28 June pp. 1101 (1979).

[5] R. D. Gregory: *Classical Mechanics* (CUP; Cambridge) (2006).

[6] M. J. Ruiz: *A Black Hole in Our Galactic Center*, Phys. Teach. **46** 10–12 (2008).

[7] P. S. Laplace: *Exposition du Sistéme du Monde*, partes I e II, 1796.

[8] P. S. Laplace: *Beweiss des Satzes, dass die anziehende Kraft bey einem Welterkörper so gross seyn könne, dass das Licht davon nicht ausströmen kann*, Allegemeine Geographische Ephemeriden **4**, 1, 1799.