



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO  
Instituto de Física  
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física  
Mestrado Profissional em Ensino de Física

## **Força centrípeta: um experimento de baixo custo para o ensino médio**

Ronaldo F. Ayres Jr.

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Orientador: Alexandre Carlos Tort

Rio de Janeiro  
Fevereiro de 2018

# **Força centrípeta: um experimento de baixo custo para o ensino médio**

Ronaldo F. Ayres Jr.

Orientador: Alexandre Carlos Tort

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Aprovada por:

---

Prof. Alexandre Carlos Tort (Presidente)

---

Prof. Penha Maria Cardozo Dias

---

Prof. Sebastião Alves Dias

Rio de Janeiro  
Fevereiro de 2018

## FICHA CATALOGRÁFICA

A985f Ayres, Ronaldo F. Jr.

Força centrípeta: experimento de baixo custo para o ensino médio / Ronaldo F. Ayres Jr.. – Rio de Janeiro: UFRJ/IF, 2018.

ix, 72 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Alexandre Carlos Tort.

Dissertação (mestrado) – UFRJ / Instituto de Física / Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, 2018.

Referências Bibliográficas: f. 71-72.

1. Ensino de física. 2. Força centrípeta. 3. Experimento de baixo custo. I. Tort, Alexandre Carlos. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Física, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física. III. Força centrípeta: experimento de baixo custo para o ensino médio.

Dedico este trabalho ao meu filho, Miguel.

## **Agradecimentos**

A toda a minha família, meu maior pilar;

Aos meus amigos e irmãos espirituais, grandes incentivadores;

Ao professor Dr. A. C. Tort, que além da orientação, me trouxe outras visões em relação à mecânica;

Ao professor Dr. Vitorvani Soares, seus comentários e correções foram imprescindíveis para a conclusão deste trabalho;

Ao prof. Hercílio Cordova, suas habilidades técnicas, tornaram possível o objetivo deste trabalho e também as ilustrações técnicas que acompanham a descrição do aparato experimental;

Agradeço também à professora Dra. Marta F. Barroso pelos comentários e incentivo durante a execução deste trabalho;

E finalmente, agradeço à professora Dra. Penha M. Cardoso Dias e ao professor Dr. Sebastião Alves Dias por terem aceitado participar da banca e por seus comentários;

Ao professor Dr. Carlos Aguiar, que me mostrou uma maneira inédita e incrível de se aprender quântica;

Aos alunos do Colégio Pedro II, minhas fontes de inspiração.

## RESUMO

### **Força centrípeta: um experimento de baixo custo para o ensino médio**

Ronaldo F. Ayres Jr.

Orientador: Alexandre Carlos Tort

Resumo da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Essa dissertação de mestrado tem como objetivo principal a comprovação experimental dos resultados obtidos por Huygens e Newton, a saber, a expressão analítica da força centrípeta. É proposta uma atividade experimental voltada para o Ensino Médio, na qual os alunos coletam dados experimentais e trabalham em cima deles, usando softwares gráficos que possibilitam os ajustes e a consequente corroboração da teoria. Isso gera, ainda, uma oportunidade para os alunos trabalharem com um software de análise de dados e, também, problematizar a relação entre uma teoria e o mundo que ele pretende desvendar. O experimento utilizado foi desenvolvido e testado nesse trabalho e é de baixo custo, aproximadamente R\$450,00. Questionários pré e pós atividade revelaram que a proposta pedagógica foi relevante para a mudança das concepções dos alunos.

Palavras chave: Ensino de física, Força centrípeta, Experimento de baixo custo.

Rio de Janeiro  
Fevereiro de 2018

## ABSTRACT

### Centripetal force: low cost experiment for high school

Ronaldo F. Ayres Jr.

Supervisor: Alexandre Carlos Tort

Abstract of master's thesis submitted to Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, in partial fulfillment of the requirements for the degree Mestre em Ensino de Física.

This master's thesis has as its main purpose the experimental corroboration of the results obtained by Huygens and Newton, namely, the analytical expression of the centripetal force. We propose an experimental activity directed to high school students in which they collect experimental data and work on this data, using graphical software that allows the adjustments of this data and the consequent corroboration of the theory. This also provides an opportunity for students to work with data analysis software and also to ponder on the relationship between a theory and the world it seeks to unravel. The experiment used was developed and tested in this work and is low cost, approximately R\$ 450.00. Pre- and post-activity questionnaires revealed that the pedagogical proposal was relevant for the change of students conceptions.

Keywords: Physics education, Centripetal force, Low cost experiment.

Rio de Janeiro  
Fevereiro de 2018

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	A experimentação no ensino de ciências . . . . .	2
<b>2</b>	<b>A força centrípeta</b>	<b>4</b>
2.1	Newton, Huygens e a tendência centrífuga . . . . .	4
2.1.1	Demonstração de Huygens . . . . .	5
2.1.2	O método de Newton . . . . .	8
2.2	Movimento circular uniforme . . . . .	10
2.2.1	Velocidades angular e escalar . . . . .	12
2.2.2	Relações entre a velocidade angular, o período e a frequência . . . . .	13
2.3	Aceleração centrípeta . . . . .	14
2.3.1	Demonstração vetorial . . . . .	14
2.3.2	Demonstração escalar . . . . .	16
2.3.3	Demonstração diferencial . . . . .	19
2.4	Força centrípeta . . . . .	21
2.4.1	Aplicações clássicas da força centrípeta na resolução de problemas do ensino médio . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Atividade experimental e suas finalidades</b>	<b>29</b>
3.1	Pré-atividade: a determinação da constante elástica da mola .	34
3.2	Atividade 1: distensão da mola como consequência da adição de massa . . . . .	38
3.3	Atividade 2: distensão da mola como consequência do au- mento da velocidade . . . . .	42
3.4	Análise dos resultados . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Metodologia de aplicação</b>	<b>45</b>
4.1	Plano de Aula . . . . .	47
4.2	Questionário prévio . . . . .	49
4.3	Roteiro experimental . . . . .	50



4.3.1	Parte I: velocidade angular constante . . . . .	50
4.3.2	Parte II: massa constante . . . . .	52
4.4	Questionário pós-atividade . . . . .	54
4.5	Avaliação da atividade . . . . .	56
4.6	Resultados obtidos . . . . .	56
<b>A</b>	<b>Manual de montagem do experimento de baixo custo</b>	<b>59</b>
A.1	Parte inferior . . . . .	59
A.2	Parte superior . . . . .	62
A.3	Arduino . . . . .	67
	<b>Referências bibliográficas</b>	<b>70</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) estabelecem as competências que se deseja promover e apresentam sugestões de práticas educativas e de organização dos currículos que estabeleçam temas estruturadores do ensino. O objetivo central dos PCNEM é facilitar a organização do trabalho da escola. A ideia é orientar a transformação do ensino médio estabelecendo-o como etapa conclusiva da educação básica e não mais como um simples preparatório para o ensino superior ou estritamente profissionalizante [1].

Desse modo, criar aulas práticas, dinâmicas, interativas, agradáveis, interdisciplinares, contextualizadas e que atraiam mais a atenção e o interesse dos alunos, não só é lei, como também é um direito do aluno. Com isso, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio recomendam o desenvolvimento de práticas fora do espaço escolar, apontando esse procedimento como atividade motivadora para os alunos, já que deslocam o ambiente de aprendizagem para fora de sala de aula, ao criar ambientes novos, interessantes, contextualizados e que quebram a rotina do espaço escolar [2].

Infelizmente a realidade das escolas tradicionais ainda está muito distante do que propõe o PCNEM para a nova escola. O que se percebe são aulas padronizadas, descontextualizadas, rotineiras e sem muita interatividade, nas quais os alunos assistem passivamente frente ao aprendizado. Não são preocupações escolares as perspectivas profissionais, sociais ou pessoais

dos alunos, ou os problemas e desafios da comunidade, da cidade, do país ou do mundo. Na escola, de modo geral, o indivíduo interage com um conhecimento essencialmente acadêmico, principalmente através da transmissão de informações, supondo que o estudante, memorizando-as passivamente, irá adquirir o conhecimento desejado.

Tendo tudo isso em vista, se faz necessário uma série de mudanças nas posturas dos profissionais de ensino. É preciso inovar, quebrar a rotina e fugir dos modelos tradicionais para transformar o modelo educacional nas escolas em algo mais atrativo para os alunos. Uma escola que cause mudanças em seus sentimentos e emoções, principalmente na área de ciências exatas, onde percebemos que há menos encantamento e interesse por parte dos discentes.

É justamente pensando nessa realização de mudanças que se iniciou este trabalho: um experimento de baixo custo, no qual os alunos participam ativamente da atividade, deixando assim, de serem meros espectadores de uma aula expositiva.

## 1.1 A experimentação no ensino de ciências

Há décadas que a experimentação enquanto estratégia de ensino-aprendizagem vem sendo defendida por diversos pesquisadores da área de ensino [3]. Durante as décadas de 1960 e 1970, houve uma intensificação na aplicação dessas estratégias de ensino, principalmente com o desenvolvimento de projetos de ensino nacional e internacional.

Existem diferentes concepções de atividades experimentais, cada qual com uma diferente concepção de aprendizagem, pressupondo assim, diferentes papéis ao professor, ao estudante, ao conhecimento e à atividade experimental.

Uma dessas atividades é citada por Ferreira [4]. O autor sugere que a experimentação é a base do estudante para a sua introdução no processo da construção da ciência. Ele tem como objetivo principal o desenvolvimento da capacidade de “fazer ciência”. As aulas teóricas têm por objetivo a transmissão dos conteúdos, enquanto as práticas, a introdução dos alunos nos “métodos da ciência”. Supõe-se a existência de um “método científico”, baseado num conjunto de regras e etapas de procedimentos - um algoritmo -

do qual é possível se abstrair o conteúdo conceitual.

No capítulo 2 é feita uma paráfrase moderna de como o conceito de força centrífuga e, depois, centrípeta, foi introduzido no século XVII por Christiaan Huygens e por Isaac Newton. Entretanto, a construção deles é teórica e consiste na interpretação física de fatos geométricos e na demonstração de teoremas, o que pode ser desmotivador. A experimentação no ensino de Ciências é considerada por muitos pesquisadores [5] como atividade didática de alto valor no sentido de despertar o interesse dos estudantes e, por consequência, tornar o aprendizado de Ciências mais interessante e dinâmico.

A dissertação tem como objetivo a corroboração experimental dos resultados obtidos por Huygens e Newton, a saber, a expressão analítica da força centrípeta. É proposta uma atividade experimental voltada para o Ensino Médio, na qual os alunos coletam dados experimentais e trabalham em cima desses dados, usando softwares gráficos que possibilitam os ajustes desses dados e a consequente corroboração da teoria. Isso gera, ainda, uma oportunidade para os alunos trabalharem com um software de análise de dados e, também, problematizar a relação entre uma teoria e o mundo que ele pretende desvendar.

# Capítulo 2

## A força centrípeta

Nessa parte trataremos de todo o embasamento teórico necessário para a realização dessa atividade experimental. Iniciaremos esse capítulo com um breve olhar na história do desenvolvimento do conceito de força centrípeta, com um enfoque nas visões de Isaac Newton e Christiaan Huygens. Mais adiante, trataremos da parte cinemática do movimento circular e, por fim, das deduções modernas para a força centrípeta.

### 2.1 Newton, Huygens e a tendência centrífuga

Os primeiros a reconhecerem que o movimento circular envolvia aceleração foram Galileu Galilei e René Descartes. Entretanto, eles lidaram com o problema de forma qualitativa e vaga. Huygens e Newton foram os primeiros a resolverem o problema de forma quantitativa e os efeitos dessas descobertas foram imensos. Edmund Halley, Christopher Wren e Robert Hooke substituíram o resultado obtido por essa descoberta na 3ª lei de Kepler e deduziram que a força gravitacional é inversamente proporcional ao quadrado da distância [6].

Há evidências históricas que nos levam a concluir que Newton, Huygens e Descartes acreditavam que os corpos eram “puxados” para fora durante uma trajetória circular, ou seja, que existia uma “tendência” centrífuga, chamada

de *conatus* por Newton. O movimento circular só ocorreria se houvesse algo que impedisse essa tendência. O conceito de força centrípeta (para o centro) como a causa do movimento circular só foi introduzido posteriormente, pelo próprio Newton, nos *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural* [7].

Newton e Huygens, de forma independente, chegam a uma solução para a expressão da centrífuga. Newton chega à solução primeiro, porém é Huygens quem a publica antes, em 1673, no *O Relógio Oscilatório*. A demonstração entretanto, só é publicada posteriormente por Huygens, em 1703, no *Sobre a Força Centrífuga*. Os autores Magalhães, Santos e Dias [8] classificam como “conceitualmente mais rica ” a solução de Huygens.

### 2.1.1 Demonstração de Huygens

Considere uma pessoa de pé no ponto B, segurando um fio do qual pende uma esfera, sobre uma grande circunferência, que representaria a Terra, ver Figura 2.1. Essa grande circunferência gira em torno do eixo perpendicular ao plano da folha que passa pelo seu centro e, caso a esfera se soltasse do fio no ponto B, ela percorreria a trajetória reta BCDH.

Se consideramos distâncias pequenas, as sucessivas posições da esfera (C e D) tendem a se afastar das sucessivas posições da pessoa (E e F), ao longo de retas radiais (EC, FD). Ora, se a pessoa e a esfera girassem sempre juntas, o fio estaria tensionado pelo peso da esfera; portanto, a tendência de se afastar (centrífuga) estaria sendo constantemente anulada pelo seu peso. Logo as retas (EC e FD) são proporcionais aos deslocamentos em “queda livre”. Então:

$$EC \approx \frac{1}{2}at^2. \quad (2.1)$$

“Posto isso, Huygens, demonstra uma série de teoremas, que juntos, significam, em notação moderna, a força centrífuga =  $mv^2/r$ ; apesar de não possuir o conceito de massa, Huygens se refere à “quantidade sólida do corpo.” [8], p.267).

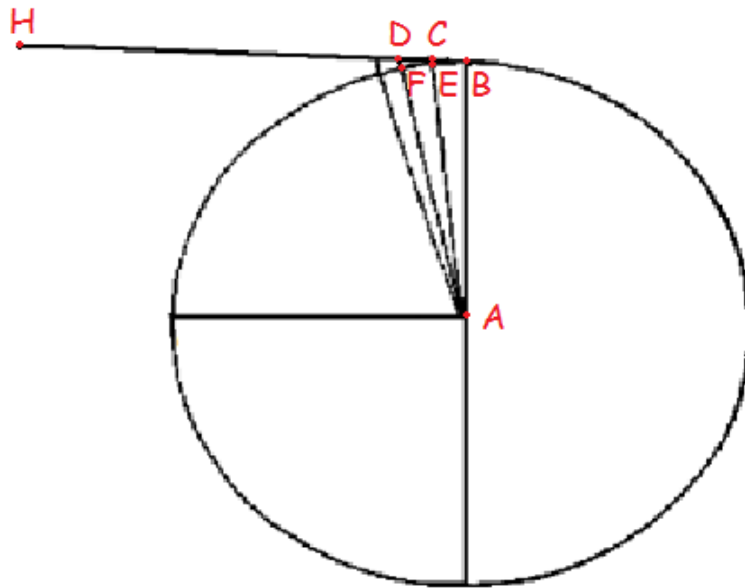


Figura 2.1: a tendência centrífuga por Huygens.

### Paráfrase moderna do cálculo de Huygens

Segundos os autores Dias, Santos e Souza [8] é possível ser feita uma interpretação moderna do método de Huygens. A tendência do corpo é seguir em movimento retilíneo uniforme com velocidade tangencial  $v$ . Para que o corpo descreva um movimento circular, a todo instante, o mesmo deve estar em queda livre em direção ao centro de curvatura  $C$ , (ver Figura 2.2).

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo existente na Figura 2.2, teremos:

$$(x + r)^2 = (vt)^2 + r^2; \quad (2.2)$$

ou ainda,

$$x^2 + (2r)x - (vt)^2 = 0. \quad (2.3)$$

Segue que

$$x = \frac{-2r \pm \sqrt{(2r)^2 + 4v^2t^2}}{2}; \quad (2.4)$$

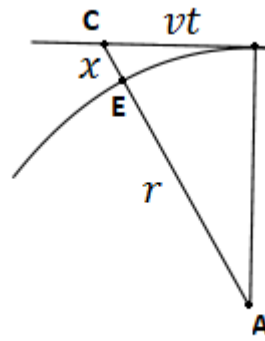


Figura 2.2: a partícula após percorrer a distância infinitesimal  $vt$  precisa "cair em queda livre" a distância  $x$ .

simplificando, teremos:

$$x = -r \pm r\sqrt{1 + \frac{v^2 t^2}{r^2}}; \quad (2.5)$$

Definindo  $y = v^2 t^2 / r^2 \ll 1$ , podemos escrever que:

$$\left(1 + \frac{y}{2}\right)^2 = 1 + y + \frac{y^2}{4} \approx 1 + y, \quad (2.6)$$

Logo, podemos escrever a equação 2.5 como:

$$x \approx -r \pm r\left(1 + \frac{v^2 t^2}{2r^2}\right). \quad (2.7)$$

Como  $x \geq 0$ , escolhemos a raiz positiva:

$$x \approx \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{r}\right)t^2. \quad (2.8)$$

Comparando as equações (2.1) e (2.8), podemos escrever que a aceleração, presente em um movimento curvilíneo, pode ser definida como:

$$a = v^2 / r. \quad (2.9)$$



### 2.1.2 O método de Newton

Newton e Henry [6] mostram uma dedução simples, criada por Newton. Vamos a ela: consideremos que uma partícula que se move em linha reta com uma velocidade vetorial constante  $v$  irá colidir elasticamente contra uma superfície plana e rígida, como ilustra a Figura 2.3.

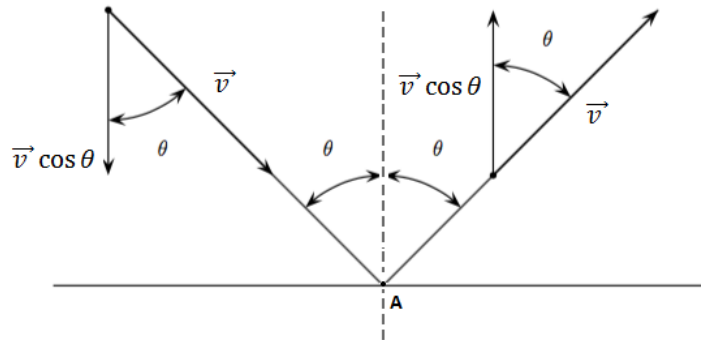


Figura 2.3: uma partícula movendo-se com velocidade  $v$  colide elasticamente contra uma superfície rígida no ponto A. A componente horizontal da velocidade se mantém constante e igual a  $v \sin \theta$  e a componente vertical  $v \cos \theta$  sofre apenas uma inversão em seu sentido.

Os ângulos de incidência e reflexão são iguais a  $\theta$  e o módulo da velocidade vetorial  $v$  se mantém constante, já que se trata de uma colisão elástica. A componente horizontal da velocidade vetorial é  $v \sin \theta$  e não sofre nenhum tipo de alteração antes e depois da colisão; já a componente vertical da velocidade vetorial  $v \cos \theta$  sofre apenas uma inversão de sentido, mantendo seu módulo constante. Logo, podemos dizer que a variação de velocidade vetorial na colisão, sofrida pela partícula é:

$$\Delta v = 2v \cos \theta. \quad (2.10)$$

Agora, consideraremos que essa mesma partícula sofrerá consecutivas colisões, em torno de uma circunferência de raio  $r$ , como indicado na Figura 2.4. O somatório das  $n$  variações de velocidade sofridas pela partícula é dado por:

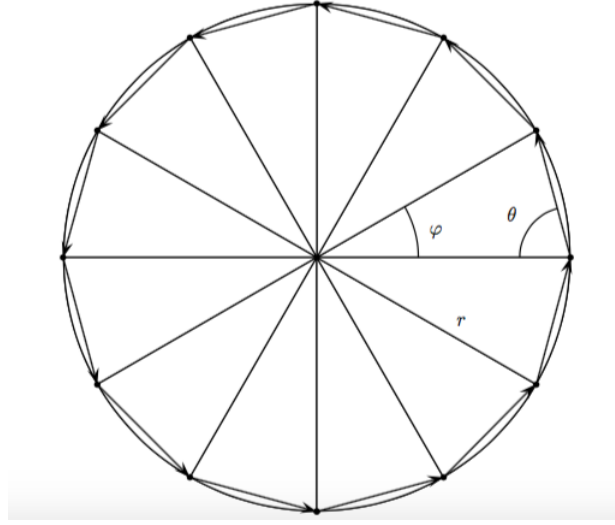


Figura 2.4: uma partícula sofre \$N\$ consecutivas colisões elásticas em torno de uma circunferência de raio \$r\$, sempre sob o mesmo ângulo \$\theta\$.

$$\sum_{n=1}^N \Delta v_n = 2Nv \cos \theta; \quad (2.11)$$

mas, \$N\varphi = 2\pi\$ e \$\varphi + 2\theta = \pi\$ (soma dos ângulos internos de um triângulo), logo:

$$\sum_{n=1}^N \Delta v_n = 2 \frac{2\pi}{\varphi} v \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{4\pi}{\varphi} v \sin \left( \frac{\varphi}{2} \right); \quad (2.12)$$

se fizermos \$N \gg 1\$, então \$\varphi \ll 1\$ radiano, logo podemos usar a aproximação \$\sin \left( \frac{\varphi}{2} \right) \approx \varphi/2\$, e escrever,

$$\sum_{n=1}^N \Delta v_n \approx \frac{4\pi}{\varphi} v \frac{\varphi}{2} = 2\pi v. \quad (2.13)$$

A aceleração escalar média é dada por:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2\pi v}{T}, \quad (2.14)$$

onde \$T\$ é o período. Como \$T = 2\pi r/v\$, segue que:

$$\bar{a} = \frac{2\pi v}{2\pi r/v} = \frac{v^2}{r}. \quad (2.15)$$

### A aceleração instantânea

Considere a expressão deduzida acima:

$$\sum_{n=1}^N \Delta v_n = \frac{4\pi}{\varphi} v \operatorname{sen} \left( \frac{\varphi}{2} \right), \quad (2.16)$$

rescrevendo-a na forma:

$$\sum_{n=1}^N \Delta v_n = 2\pi v \frac{\operatorname{sen} \left( \frac{\varphi}{2} \right)}{\frac{\varphi}{2}}; \quad (2.17)$$

no limite  $N \rightarrow \infty$ ,  $\varphi/2 \rightarrow 0$ , logo, como

$$\lim_{\varphi/2 \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \left( \frac{\varphi}{2} \right)}{\frac{\varphi}{2}} = 1, \quad (2.18)$$

portanto,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \Delta v_n = 2\pi v. \quad (2.19)$$

A variação total da velocidade se dá no intervalo de tempo correspondente ao período, logo, a aceleração instantânea será dada por

$$a = \frac{2\pi v}{T} = \frac{v^2}{r}. \quad (2.20)$$

## 2.2 Movimento circular uniforme

Os resultados de Huygens e Newton também podem ser expressos em função da velocidade angular  $\omega$ . Convém, logo, revisar a cinemática do movimento circular uniforme para que possamos escrever esses resultados em termos de  $\omega$ .

Definimos como movimento circular uniforme (M.C.U.) o movimento de uma partícula que descreve trajetórias circulares sobre uma circunferência de raio  $r$  com o módulo de sua velocidade instantânea  $v$  constante. Por consequência da velocidade ter módulo constante, a partícula descreverá, em intervalos de tempo iguais, deslocamentos angulares também iguais, ver Figura 2.5.

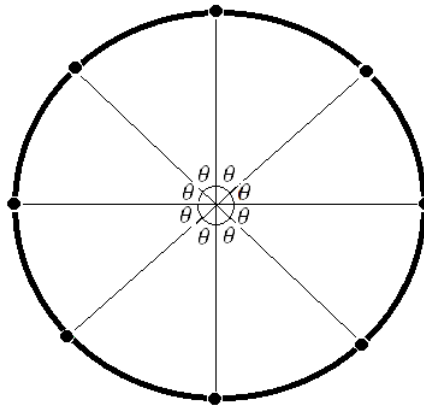


Figura 2.5: fotografia estroboscópica de uma partícula realizando um M.C.U.

O período  $T$  do movimento circular uniforme é definido como sendo o menor intervalo de tempo necessário para que a partícula complete uma volta ao redor da circunferência e a frequência  $f$  é definida pelo número de voltas completas (revoluções) por uma unidade de tempo.

No sistema internacional de unidades (S.I.), a frequência é medida em *revoluções/segundos*, denominado Hertz ( $Hz$ ). Há também outras unidades, como por exemplo: *revoluções/minuto*, denominada *r.p.m.* e *revoluções/hora*, denominado *r.p.h.*

Pelas definições apresentadas, período e frequência são inversamente proporcionais. Dessa forma, temos:

$$f = \frac{1}{T}, \quad (2.21)$$

ou ainda,

$$T = \frac{1}{f}. \quad (2.22)$$

### 2.2.1 Velocidades angular e escalar

Nessa parte, consideraremos uma partícula que tem como origem o ponto A e se desloca até o ponto B, descrevendo um M.C.U.(Figura 2.6). Definimos  $\Delta S$  como o deslocamento escalar e  $\Delta\Theta$  como o deslocamento angular sofridos pela partícula. A velocidade escalar média  $v_m$  é definida como sendo a razão entre o deslocamento escalar e o intervalo de tempo gasto. Desse modo, temos que:

$$v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t}. \quad (2.23)$$

A velocidade angular média  $\omega_m$  é definida como sendo a razão entre o deslocamento angular e o intervalo de tempo gasto. Desse modo, temos que:

$$\omega_m = \frac{\Delta\Theta}{\Delta t}. \quad (2.24)$$

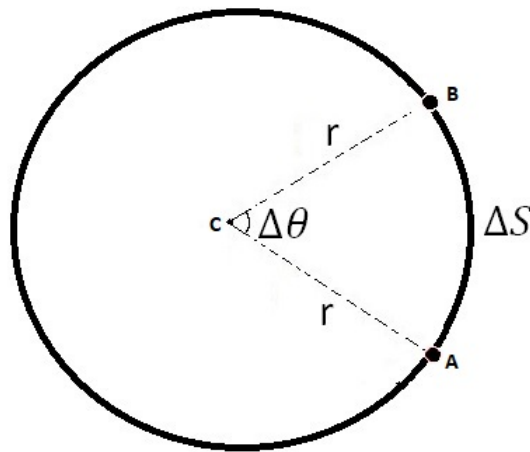


Figura 2.6: representação dos deslocamentos escalar e angular sofridos por uma partícula descrevendo um M.C.U.

Se tratando de um movimento com velocidade constante, a velocidade angular instantânea, que é definida como sendo a velocidade angular média com o intervalo de tempo tendendo a zero, passa a ter o mesmo valor da velocidade angular média. Logo, podemos definir que, para o M.C.U., temos:

$$\omega = \omega_m = \frac{\Delta\Theta}{\Delta t}. \quad (2.25)$$

Analogamente, também fazemos esse tipo de definição para a velocidade escalar:

$$v = v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t}. \quad (2.26)$$

É também possível a demonstração da relação entre as velocidades angular e escalar. Por definição geométrica, sabemos que:

$$\Delta S = r\Delta\Theta, \quad (2.27)$$

dividindo os dois lados da equação por  $\Delta t$ , teremos:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = r \frac{\Delta\Theta}{\Delta t}, \quad (2.28)$$

substituindo as equações (2.25) e (2.26) na equação (2.28), teremos a relação matemática entre as velocidades escalar e angular:

$$v = \omega r. \quad (2.29)$$

### 2.2.2 Relações entre a velocidade angular, o período e a frequência

Para uma partícula que descreve um movimento circular uniforme e efetua uma revolução completa, temos que:

$$\Delta\theta = 2\pi, \quad (2.30)$$

e

$$\Delta t = T, \quad (2.31)$$

substituindo as equações (2.30) e (2.31) na equação (2.25), teremos:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}; \quad (2.32)$$

substituindo a equação (2.21) na equação (2.32), obteremos:

$$\omega = 2\pi f. \quad (2.33)$$

## 2.3 Aceleração centrípeta

O vetor velocidade instantânea possui a direção da reta tangente à trajetória de movimento de uma partícula. Sendo assim, para quaisquer trajetórias curvilíneas, o vetor velocidade está sempre mudando a sua direção. Chamamos a componente radial da aceleração vetorial de aceleração centrípeta, pois ela aponta para o centro. É essa a responsável pela modificação da direção do vetor velocidade instantânea.

Nessa parte demonstraremos diferentes formas de se obter a equação da aceleração centrípeta, que é fundamental para a expressão da força centrípeta.

### 2.3.1 Demonstração vetorial

Demonstração vetorial baseada na obra de Doca, Biscuola e Bôas [9]: na Figura 2.7, uma partícula realiza movimento circular uniforme ao longo de uma circunferência de raio  $r$ . Sua velocidade vetorial tem módulo  $v$  e está representada pelo vetor  $\vec{v}_A$ , no ponto A, e  $\vec{v}_B$ , no ponto B.

Considerando que a partícula irá do ponto A ao ponto B, em um intervalo de tempo  $\Delta t$ , o módulo da aceleração vetorial média será determinada por:

$$|\vec{a}_m| = \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t}. \quad (2.34)$$

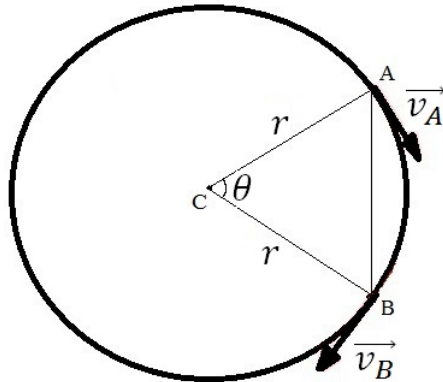


Figura 2.7: partícula realizando um M.C.U.

A variação da velocidade vetorial  $\Delta\vec{v} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$  está representada na Figura 2.8.

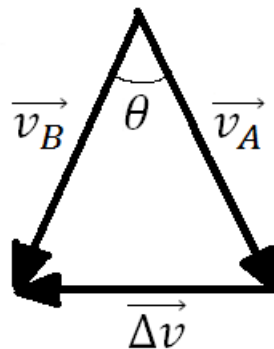


Figura 2.8: representação vetorial da variação da velocidade sofrida pela partícula entre os pontos A e B.

É fácil observar que os dois triângulos das Figuras 2.7 e 2.8 são semelhantes, pois possuem o mesmo ângulo  $\theta$ . A partir dessa semelhança, podemos escrever:

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{AB} = \frac{|\vec{v}_A|}{r}. \quad (2.35)$$



Para intervalos de tempo muito pequenos, a medida do segmento AB fica praticamente igual a do arco AB. Nesse caso, teremos:

$$\frac{|\Delta \vec{v}|}{v \Delta t} = \frac{v}{r}, \quad (2.36)$$

portanto,

$$\frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}. \quad (2.37)$$

Substituindo a equação (2.34) na equação (2.36), temos:

$$|\vec{a}_m| = \frac{v^2}{r}. \quad (2.38)$$

Para intervalos de tempo que tendam a zero, a aceleração vetorial média passa a ter caráter instantâneo, com direção radial e orientação para o centro da trajetória circular, assim como a variação da velocidade vetorial, o que justifica a denominação de aceleração centrípeta. Dessa forma, finalmente concluímos que o módulo da aceleração centrípeta é:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r}; \quad (2.39)$$

ou ainda, substituindo a equação (2.29) na equação (2.39), obteremos o módulo da aceleração centrípeta em termos de  $\omega$ . Segue que:

$$a_{cp} = \frac{(\omega r)^2}{r} = \omega^2 r. \quad (2.40)$$

### 2.3.2 Demonstração escalar

Demonstração escalar baseada na obra de Doca, Biscuola e Bôas [9]: uma partícula percorre uma circunferência de raio  $r$  com velocidade escalar constante e igual a  $v$ . Para intervalos de tempo tendentes a zero, o movimento descrito pela partícula pode ser analisado como uma sucessão de dois movimentos elementares: um uniforme, na direção tangencial e o outro, uniformemente acelerado, na direção radial.

A Figura 2.9 descreve esses dois movimentos. O deslocamento do primeiro movimento – o tangencial – será chamado de  $\Delta S_1$ , e o do segundo, o radial,

de  $\Delta S_2$ .

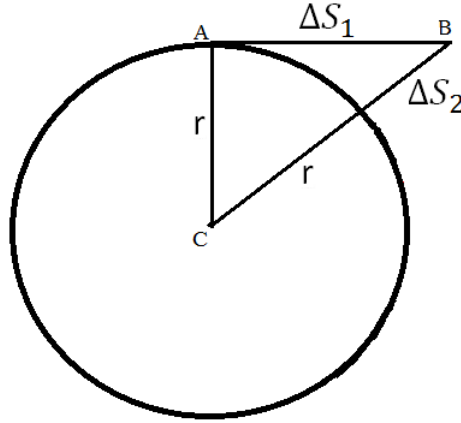


Figura 2.9: representação dos dois movimentos sucessivos em um instante do M.C.U.

Como o movimento tangencial é retilíneo e uniforme, podemos escrever a seguinte equação para o deslocamento tangencial:

$$\Delta S_1 = v \Delta t. \quad (2.41)$$

Já para o movimento radial, determinaremos a distância percorrida utilizando a função horária da posição para partículas uniformemente aceleradas:

$$\Delta S_2 = v_0 t + \frac{at^2}{2}. \quad (2.42)$$

Como a velocidade inicial é nula, teremos:

$$\Delta S_2 = \frac{at^2}{2}. \quad (2.43)$$

Fazendo uso do teorema de Pitágoras ao triângulo ABC da Figura 2.9, teremos:

$$(r + \Delta S_2)^2 = (\Delta S_1)^2 + r^2, \quad (2.44)$$

logo:

$$r^2 + 2r\Delta S_2 + (\Delta S_2)^2 = (\Delta S_1)^2 + r^2, \quad (2.45)$$

segue que,

$$2r\Delta S_2 + (\Delta S_2)^2 = (\Delta S_1)^2; \quad (2.46)$$

considerando pequenos intervalos de tempo, temos:

$$\Delta S_2 \ll r, \quad (2.47)$$

portanto,

$$(\Delta S_2)^2 \ll r\Delta S_2. \quad (2.48)$$

Logo, na soma  $[2r\Delta S_2 + (\Delta S_2)^2]$ , pode-se descartar a parcela  $(\Delta S_2)^2$ , já que seu valor é muito menor que o da parcela  $(2r\Delta S_2)$ . Dessa forma, teremos:

$$2r\Delta S_2 = (\Delta S_1)^2. \quad (2.49)$$

Substituindo as equações (2.41) e (2.43) na equação (2.49), temos:

$$2r\frac{a}{2}t^2 = (vt)^2, \quad (2.50)$$

então:

$$rat^2 = v^2t^2, \quad (2.51)$$

e, portanto:

$$a = \frac{v^2}{r}. \quad (2.52)$$

Como a aceleração é na direção radial e no sentido do centro da circunferência, trata-se de uma aceleração centrípeta. Finalmente, obteremos:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r}, \quad (2.53)$$

ou ainda, substituindo a equação (2.29) na equação (2.53), obteremos o módulo da aceleração centrípeta em termos de  $\omega$ . Segue que:

$$a_{cp} = \frac{(\omega r)^2}{r} = \omega^2 r. \quad (2.54)$$

### 2.3.3 Demonstração diferencial

Demonstração diferencial baseada na obra de Halliday, Resnick e Walker [10]: considere uma partícula  $p$ , percorrendo uma trajetória circular de raio  $r$ , com o módulo da velocidade  $v$  constante. Em um determinado instante, a partícula possui coordenadas de posição iguais a  $x_p$  e  $y_p$ .

Como o vetor velocidade instantânea é sempre tangente à curva da trajetória, temos que o ângulo  $\theta$  formado entre o vetor velocidade instantânea e a vertical é igual ao ângulo formado pelo raio  $r$  e a horizontal (Figura 2.10).

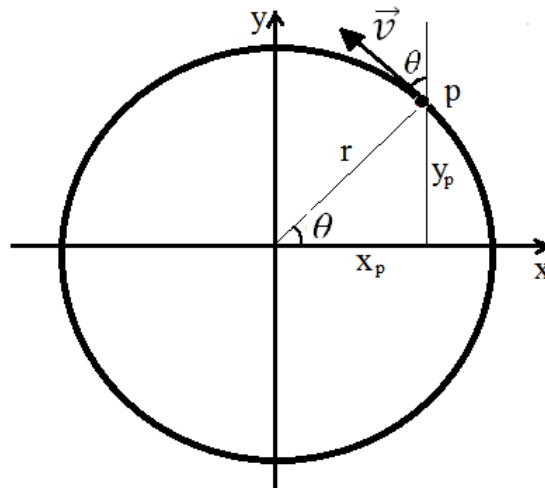


Figura 2.10: representação da velocidade vetorial de uma partícula descrevendo um M.C.U.

O vetor velocidade instantânea  $v$  pode ser decomposto nas direções horizontal e vertical:

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j}, \quad (2.55)$$

onde  $v_x$  representa a componente horizontal, de módulo  $v \sin \theta$  e,  $v_y$  representa a componente vertical de módulo  $v \cos \theta$ . Portanto:

$$\vec{v} = (-v \sin \theta) \hat{i} + (v \cos \theta) \hat{j}. \quad (2.56)$$

Analisando o triângulo retângulo da Figura 2.10, podemos verificar que:

$$\text{sen } \theta = \frac{y_p}{r}, \quad (2.57)$$

e

$$\text{cos } \theta = \frac{x_p}{r}. \quad (2.58)$$

Substituindo as equações (2.57) e (2.58) na equação (2.56), teremos:

$$\vec{v} = \left(-\frac{vy_p}{r}\right)\hat{i} + \left(-\frac{vx_p}{r}\right)\hat{j}. \quad (2.59)$$

A aceleração da partícula p pode ser calculada pela derivada da equação da velocidade em relação ao tempo. Como o módulo da velocidade escalar e o raio não variam como tempo, dessa forma, podemos escrever:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(-\frac{v}{r} \frac{dy_p}{dt}\right)\hat{i} + \left(-\frac{v}{r} \frac{dx_p}{dt}\right)\hat{j}. \quad (2.60)$$

Note que a taxa de variação  $dy_p/dt$ , é igual a componente vertical da velocidade  $v_y$ . Analogamente, a taxa de variação temporal  $dx_p/dt$  é igual a componente horizontal da velocidade  $v_x$ . Dessa forma, temos:

$$\vec{a} = \left(-\frac{v^2}{r} \text{cos } \theta\right)\hat{i} + \left(-\frac{v^2}{r} \text{sen } \theta\right)\hat{j}. \quad (2.61)$$

Escrevendo a aceleração em função de suas componentes horizontal e vertical, obtemos:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{v^2}{r} \sqrt{(\text{cos } \theta)^2 + (\text{sen } \theta)^2}, \quad (2.62)$$

e, como  $\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = 1$ , podemos escrever:

$$a = \frac{v^2}{r}. \quad (2.63)$$

Determinamos a orientação do vetor aceleração  $\vec{a}$  através do ângulo  $\phi$  da Figura 2.11. Calculando a sua tangente, teremos:

$$\tan \phi = \frac{a_y}{a_x} = \frac{-(v^2/r) \text{sen } \theta}{-(v^2/r) \text{cos } \theta} = \tan \theta. \quad (2.64)$$

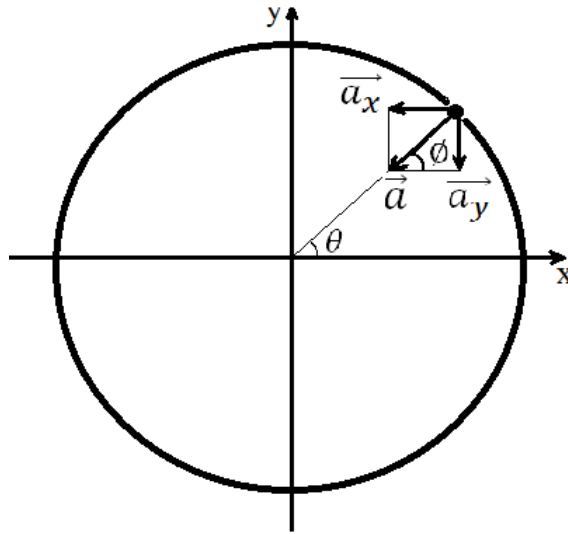


Figura 2.11: representação da aceleração e suas componentes de uma partícula em um movimento circular.

A equação anterior nos mostra que  $\phi$  e  $\theta$  são iguais. Logo, o vetor aceleração  $\vec{a}$  possui direção radial e sentido apontando para o centro da circunferência. Por isso, esse tipo de aceleração é denominada de aceleração centrípeta, pois aponta para o centro do círculo.

## 2.4 Força centrípeta

Uma vez obtida a expressão da aceleração centrípeta, é muito simples chegar na expressão da força centrípeta, que nada mais é do que a componente radial da força resultante. Em outras palavras, é a parcela da força resultante responsável pela geração da aceleração centrípeta, que por sua vez, é responsável por alterar a direção e o sentido do vetor velocidade instantânea, fazendo possível assim, haver movimentos não retilíneos.

Pela segunda lei do movimento:

$$\vec{F}_r = m\vec{a}, \quad (2.65)$$

a parcela radial da força resultante, chamada de força centrípeta, será escrita

como:

$$\vec{F}_{cp} = m\vec{a}_{cp}. \quad (2.66)$$

Substituindo a equação (2.63) na equação (2.66), teremos:

$$F_{cp} = \frac{mv^2}{r}. \quad (2.67)$$

Também podemos obter uma outra forma para a expressão da força centrípeta, que envolva a velocidade angular ao invés da escalar. Basta substituímos a equação (2.29) na equação (2.67):

$$F_{cp} = m\omega^2 r. \quad (2.68)$$

### 2.4.1 Aplicações clássicas da força centrípeta na resolução de problemas do ensino médio

Nessa parte, mostraremos alguns desenvolvimentos de problemas clássicos contidos no Ensino Médio, a fim de ser um guia para os professores nas resoluções destes.

#### 1. Pêndulo simples

O primeiro caso que analisaremos é o do pêndulo simples: um corpo de massa  $m$  que oscila, preso a um fio ideal, em um plano vertical livre de quaisquer forças dissipativas (Figura 2.12).

A situação clássica é a análise desse corpo quando ele se encontra na parte mais baixa da trajetória, ver Figura 2.13.

Neste momento, o corpo está sujeito à ação de duas forças, ambas na direção vertical: a força peso, exercida pela Terra, e a tração, exercida pelo cabo.

Como é necessário uma força resultante que aponte para o centro da trajetória, a força de tração deve ser maior que a força peso. Desse modo, podemos escrever para o ponto mais baixo da trajetória:

$$F_{cp} = T - P, \quad (2.69)$$

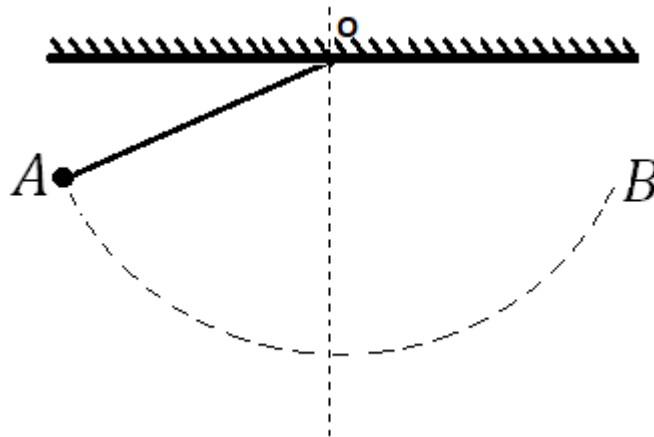


Figura 2.12: pêndulo simples: um corpo de massa  $m$  oscila livre de quaisquer forças dissipativas entre os pontos A e B da figura, somente sob ação das forças gravitacional e da tração do cabo ideal.

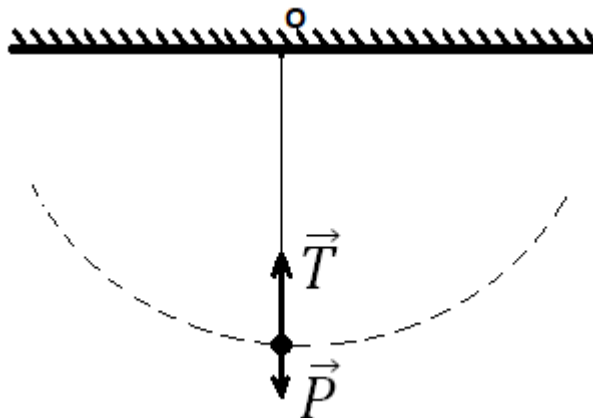


Figura 2.13: Pêndulo simples: momento em que a partícula se encontra no ponto mais baixo da trajetória.

substituindo a equação (2.68) na equação (2.69), temos:

$$m\omega^2 r = T - mg. \quad (2.70)$$

Assim, se isolarmos o  $T$ , teremos uma solução para determinar o módulo da



força de tensão no fio no ponto mais baixo da trajetória.

$$T = m(\omega^2 r + g). \quad (2.71)$$

## 2. Pêndulo cônico

O segundo caso que analisaremos é o do pêndulo cônico: um corpo de massa  $m$  que oscila descrevendo um movimento circular e uniforme, de centro  $c$ , preso a um fio ideal, que forma um ângulo  $\theta$  com a vertical (Figura 2.14). Forças dissipativas também são desprezadas nesse caso.

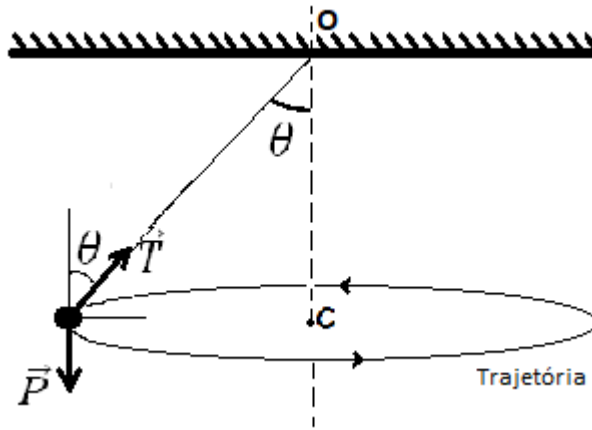


Figura 2.14: pêndulo cônico: um corpo de massa  $m$  oscila livre de quaisquer forças dissipativas.

A solução desse caso se inicia decompondo vetorialmente a força tração em duas componentes: horizontal, de módulo igual a  $T \cos \theta$  e vertical, de módulo igual a  $T \sin \theta$ . A componente vertical se anula com a força peso e a horizontal da origem à força resultante centrípeta. Assim, podemos escrever que para o eixo vertical:

$$0 = T \sin \theta - mg, \quad (2.72)$$

e, para o eixo horizontal:

$$m\omega^2 r = T \cos \theta. \quad (2.73)$$

Dividindo a equação (2.72) pela equação (2.73), obteremos uma relação im-

portante para o pêndulo cônico:

$$\tan \theta = \frac{g}{\omega^2 r}. \quad (2.74)$$

### 3. Rotor

Considere um cilindro de raio  $r$  que gira com velocidade angular  $\omega$ . Dentro dele, há uma pessoa apoiada na parede lateral do cilindro e por um suporte inferior, ver na Figura 2.15. É possível retirar o suporte inferior e deixar a pessoa em equilíbrio apoiada apenas pela parede lateral do cilindro, desde que, o mesmo gire com uma velocidade angular mínima ( $\omega_{min}$ ). Nesse exemplo, iremos calcular essa velocidade.

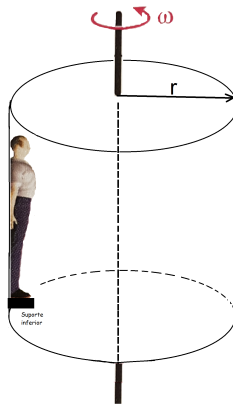


Figura 2.15: rotor: cilindro de raio  $r$  que gira com velocidade angular  $\omega$ .

Na direção vertical agem as forças peso, com sentido para baixo e o atrito, com sentido para cima. Na direção horizontal atua a força normal de contato com a parede lateral do cilindro, cujo sentido, aponta para o centro da trajetória descrita pela pessoa.

Como há um equilíbrio estático vertical, as forças verticais peso e atrito se cancelam e a força normal de contato atua como força resultante centrípeta. Desse modo, podemos escrever:

para a direção vertical:

$$P - F_{at} = 0, \quad (2.75)$$

ou ainda,

$$mg - \mu N = 0; \quad (2.76)$$

e, para a direção horizontal:

$$F_{cp} = N; \quad (2.77)$$

substituindo a equação (2.68) na equação (2.77), teremos:

$$mw^2r = N. \quad (2.78)$$

Substituindo a equação (2.76) na equação (2.78), teremos:

$$\mu m \omega^2 r = mg, \quad (2.79)$$

cancelando as massas:

$$\mu \omega^2 r = g, \quad (2.80)$$

e, por fim, isolando o  $\omega$ , obteremos então a equação para a velocidade angular mínima:

$$w_{min} = \sqrt{\frac{g}{\mu r}}. \quad (2.81)$$

#### 4. Loop (globo da morte)

Nessa parte, discutiremos o caso clássico do móvel que descreve um movimento em um plano vertical, no interior de uma superfície esférica de raio  $r$ . Iremos analisar o ponto crítico desse movimento, que é o ponto mais alto da trajetória.

Desprezando quaisquer forças dissipativas, o corpo estará sob ação somente das forças verticais peso e normal de contato com a superfície, ambas possuem sentido do centro da esfera (Figura 2.16).

Como as duas forças apontam para o centro da trajetória, podemos escrever que:

$$F_{cp} = N + P, \quad (2.82)$$

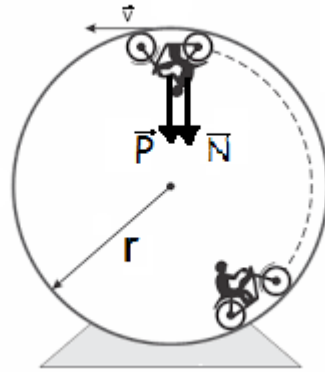


Figura 2.16: globo da morte: móvel se deslocando até o ponto mais alto da trajetória.

substituindo a equação (2.67) na equação (2.82), teremos:

$$\frac{mv^2}{r} = N + mg. \quad (2.83)$$

A equação (2.83) é uma espécie de equação geral para o ponto mais alto da trajetória. E é através dela que iremos propor o cálculo da menor velocidade instantânea ( $v_{min}$ ) que o corpo deve possuir no ponto mais alto, para poder concluir o loop.

Analisando a equação (2.83), percebemos que à medida que o valor da velocidade instantânea decresce, decresce também a força normal de contato, pois a força peso, a massa e o raio do globo da morte são constantes.

Sendo assim, a velocidade instantânea mínima ( $v_{min}$ ) para se completar o loop, ocorre quando quando a força normal de contato tende a zero. Dessa forma, temos:

$$\frac{mv_{min}^2}{r} = mg, \quad (2.84)$$

dividindo a equação pela massa:

$$\frac{v_{min}^2}{r} = g, \quad (2.85)$$

e, por último, isolando a velocidade, chegamos na equação para a velocidade instantânea mínima:

$$v_{min} = \sqrt{rg}. \quad (2.86)$$

## Capítulo 3

# Atividade experimental e suas finalidades

A finalidade das atividades propostas é determinar experimentalmente quantidades relacionadas com a força centrípeta utilizando um aparato de baixo custo, como indicada na Figura 3.1. Os detalhes da montagem, do uso do equipamento e do modo de medir períodos de revolução com o microcontrolador Arduino são descritas no Apêndice A e também na página do Mesclado em Ensino de Física – Material Instrucional. Um vídeo demonstrativo do experimento pode ser visualizado em: <https://youtu.be/E7NvvBK9nss>.

O aparato de baixo custo mostrado na Figura 3.1 permite que o aluno possa estudar dois aspectos relacionados com a força centrípeta: como esta força varia com a massa  $m$  e com a velocidade angular  $\omega$  ou melhor, como ela varia com  $mr$  e  $\omega^2$ , pois a simplicidade do aparato não permite que mantenhamos o raio da trajetória  $r$  constante.

No aparato mostrado na Figura 3.1, o carrinho (ou plataforma) deslizando está preso a uma mola que sofre uma deformação quando o conjunto é posto a girar. A deformação da mola é medida por um feixe de laser sobre uma régua comum graduada em centímetros e com subdivisões em milímetros presa na base do aparato. A leitura é feita a olho nú e o marco zero da régua coincide com a extremidade da mola presa ao carrinho quando esta tem seu comprimento natural (ver Figura 3.2 ). O movimento de rotação

do aparato é gerado por um motor elétrico de corrente contínua, controlado por um potenciômetro cuja função é fazer variar a tensão elétrica sobre o motor e, dessa forma, permitir o controle da velocidade angular. As massas utilizadas no experimento foram medidas com uma balança digital e o período de revolução, que permite o cálculo da velocidade angular, foi medido com um sensor óptico conectado a um microcontrolador Arduino.

A análise dos dados poderá ser feita com o auxílio de um *software* comercial ou gratuito por meio de um ajuste linear simples que deverá ser apresentado aos alunos de modo essencialmente qualitativo. Os *softwares* listados abaixo foram utilizados pelo autor e funcionam em computadores, *tablets* ou *smartphones*:

- Vernier Graphical Analysis - versão gratuita; Microsoft, IOS e Android;
- DataAnalysis - versão gratuita; IOS;
- KaleidaGraph - versão comercial; Microsoft e IOS;

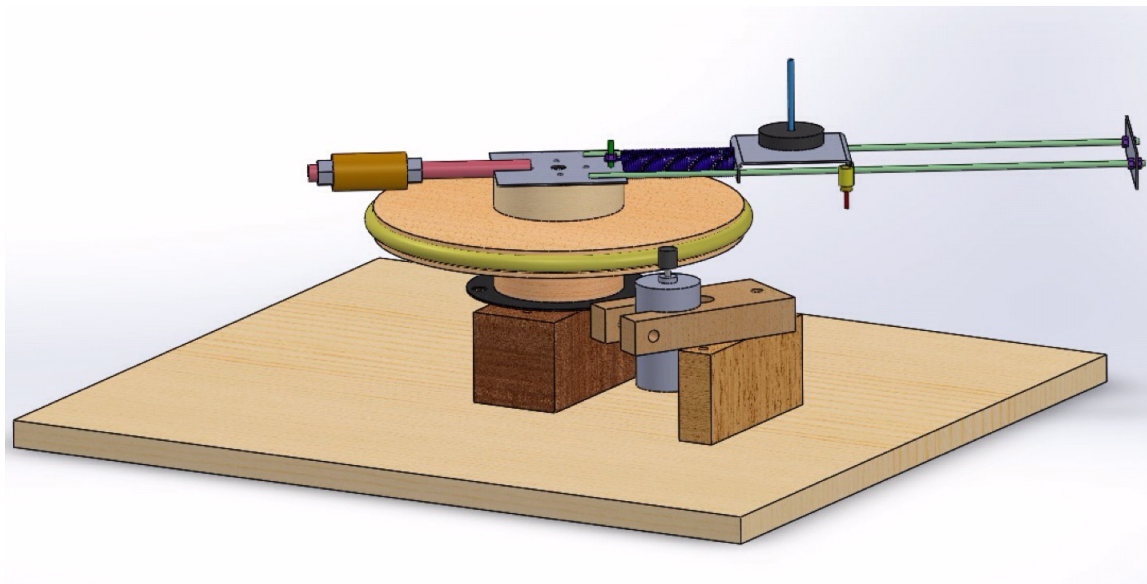


Figura 3.1: equipamento de baixo custo para medição de aspectos relacionados com a força centrípeta.

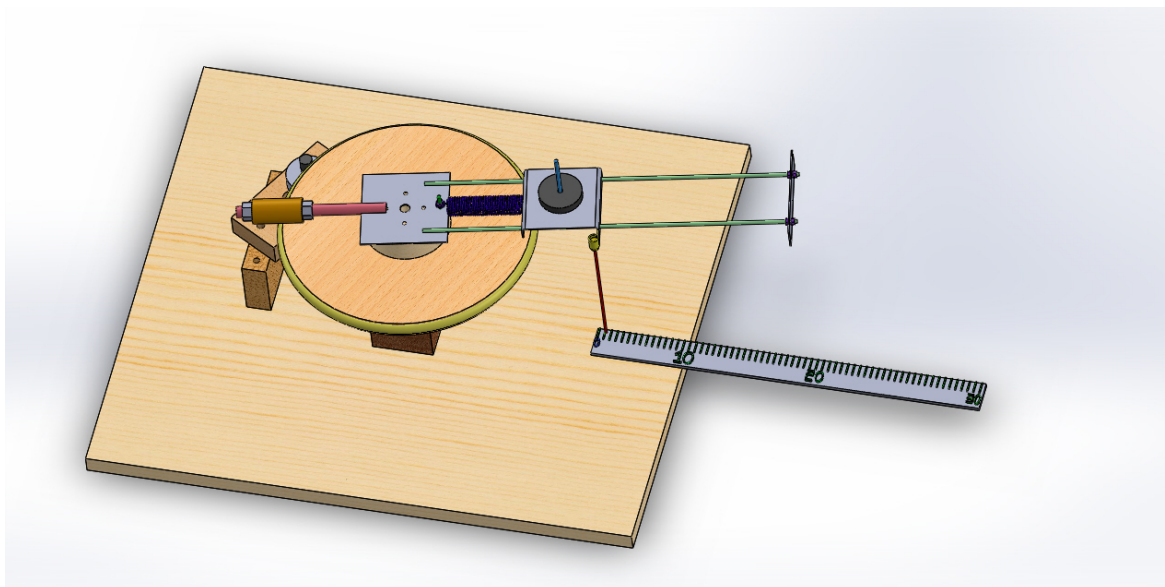


Figura 3.2: a régua foi fixada à base do experimento de tal modo que, quando a mola se encontra em seu tamanho natural, o laser atinge o seu marco “zero”.

### O ajuste linear simples

No decorrer das atividades práticas propostas faremos uso intensivo de um método de visualização dos dados experimentais que recebe o nome de *ajuste linear simples* ou ainda *regressão linear simples*. O que é o ajuste linear simples? Suponhamos que temos um conjunto de dados  $x_1, x_2, \dots, x_n$  e um conjunto de dados  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , ambos obtidos por meio de medições de tal modo que para um dado  $x_i$  o resultado é  $y_i$ . Podemos dispor dos dois conjuntos de dados por meio de uma tabela, por exemplo:

Tabela 3.1: Os valores de  $x$  e  $y$ .

Medida	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x$	8	13	9	11	14	6	4	12	7	5
$y$	7	7,6	8,8	8,3	10	7,2	4,3	10,8	4,8	5,7

Podemos visualizar melhor os dados se os considerarmos como pontos de coordenadas  $(x_i, y_i)$  no plano cartesiano:



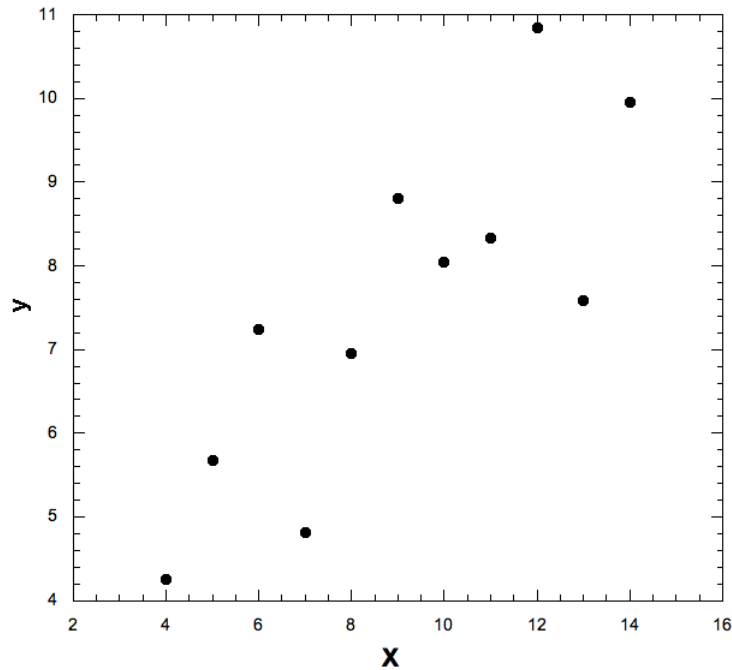


Figura 3.3: *scatter plot* dos dados da Tabela 3.1.

Isto pode ser feito, de forma rápida e fácil, através de um *software* de análise de dados comercial ou gratuito como, por exemplo, o *Vernier Graphical Analysis*. Quando a relação entre as duas variáveis  $x$  e  $y$  for linear, os conjuntos  $x_i$  e  $y_i$ , de suas medidas, devem formar uma reta. Porém, o que se obtém representado em um gráfico os valores da Tabela 3.1 é a Figura 3.3 na qual alguns pontos não estão exatamente na reta, mas próximos. Isso é o que ocorre em experimentos, de modo geral. Suponha que este seja o caso do *scatter plot* da Figura 3.3. Neste caso, podemos pedir ao *software* que trace uma reta, isto é: determine os coeficientes  $A$  e  $B$  da equação da reta:

$$y = Ax + B, \quad (3.1)$$

tal que a distância entre  $y_i$  e a reta  $y$  seja otimizada. A constante  $A$  é a pendente ou inclinação da reta em relação ao eixo das abcissas ( $x$ ), enquanto  $B$  determina o ponto em que a reta intercepta o eixo das ordenadas ( $y$ ). Evidentemente, há uma abordagem matemática formal ao problema que leva a

equações que permitem determinar  $A$  e  $B$  [11]. Estas equações estão embutidas nos *softwares* de análise de dados que as resolvem em questão de frações de segundo. Para o *scatter plot* da Figura 3.3, o resultado é mostrado na Figura 3.4. Vemos então que

$$y \approx 0,5x + 3,$$

isto é:  $A \approx 0.5$  e  $B \approx 3$ . O número  $R^2$  que podemos ler no gráfico será discutido mais adiante mas, essencialmente, ele nos informa que o grau de confiança na linearidade do modelo é aproximadamente igual a 67%. Será suficiente? Isto depende do tipo de experimento e do equipamento que é utilizado para efetuar as medições.

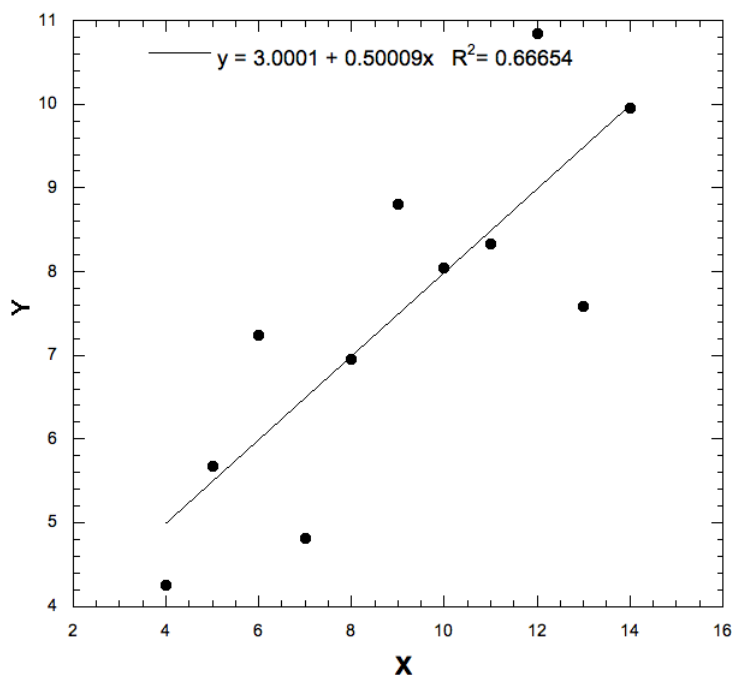


Figura 3.4: ajuste linear simples dos dados da Tabela 3.2.

### 3.1 Pré-atividade: a determinação da constante elástica da mola

A determinação da constante elástica da mola é de vital importância para a atividade experimental aqui desenvolvida. Ela não foi feita em sala de aula e nem contou com a participação dos alunos, entretanto, ela também pode ser transformada em uma atividade experimental.

O procedimento adotado foi o de prender à mola objetos de diferentes massas, sempre medindo as sucessivas elongações  $\Delta\ell$  sofridas pela mola, em equilíbrio estático. Observe que a mola ideal, isto é: aquela que obedece à lei de Hooke, tem massa desprezível. Na prática esta condição significa que a massa presa à extremidade livre da mola é muito maior do que sua massa. A condição de equilíbrio estático é dada por:

$$mg = \kappa \Delta\ell, \quad (3.2)$$

onde  $\Delta\ell$  é a variação do comprimento ou elongação da mola, isto é: a diferença entre o comprimento da mola distendida e o seu comprimento natural. Segue que:

$$\Delta\ell = \frac{g}{\kappa} m. \quad (3.3)$$

Com os dados da Tabela 3.2 podemos determinar  $\kappa$  fazendo uso de um ajuste linear simples descrito anteriormente. No nosso caso,  $y \rightarrow \Delta\ell$  e  $x \rightarrow m$ , logo:

$$\Delta\ell = Am + B. \quad (3.4)$$

Tabela 3.2: Para determinar a constante elástica da mola medimos  $\Delta\ell$  com uma régua graduada em centímetros e subdivisões em milímetros e  $m$  com uma balança digital.

Medida	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\Delta\ell$ (m)	0,00	0,011	0,022	0,028	0,040	0,051	0,057	0,068	0,080
$m$ (kg)	0,00	0,0191	0,0382	0,0493	0,684	0,0875	0,0985	0,118	0,137

Com os dados da Tabela 3.2 e um software comercial de tratamento de

dados (veja a Figura 3.5) obtemos:

$$\Delta\ell \approx 0.000228 + 0.584 \Delta m, \quad (3.5)$$

onde, seguindo ao pé da letra advertência de Squires [12]<sup>12</sup>, expressamos o resultado final com três dígitos significativos o valor da constante elástica será dado por

$$A = \frac{g}{\kappa}, \Rightarrow \kappa = \frac{g}{A}. \quad (3.6)$$

Para  $g = 9,79 \text{ m/s}^2$ , valor da aceleração gravitacional na cidade do Rio de Janeiro [13], e  $A = 0,584$  (veja a Figura 3.5), temos:

$$\kappa = \frac{9,79}{0,584} = 16,76 \text{ N/m} \approx 16,8 \text{ N/m}. \quad (3.7)$$

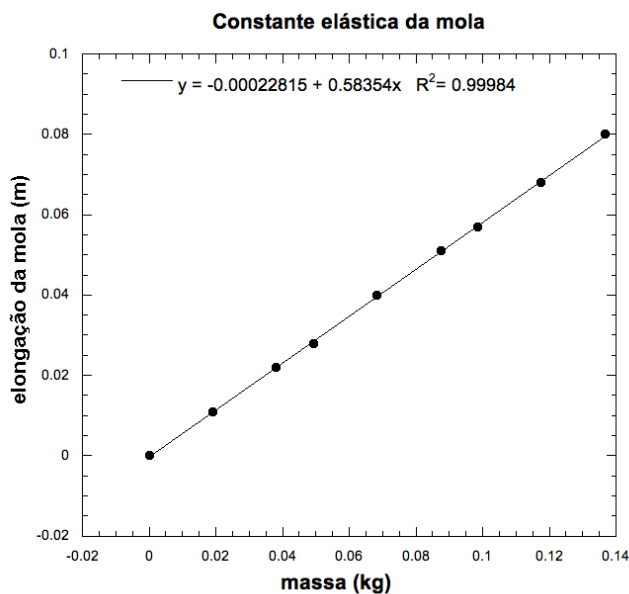


Figura 3.5: pré-atividade: determinação da constante elástica da mola.

<sup>12</sup>"Você deve sempre reter pelo menos um, talvez dois dígitos além daqueles que são significativos" [12].

<sup>2</sup>Talvez seja conveniente realizar junto aos alunos uma breve discussão sobre algarismos significativos, arredondamentos e casas decimais.

Qual o significado do número  $R^2 = 0.99984 \approx 1.0$  que o gráfico da Figura 3.5 nos mostra? A resposta, formulada de modo simples, está na seção seguinte.

### O coeficiente de correlação $R^2$ :

Se suspeitarmos que os dados experimentais que temos à nossa disposição podem estar correlacionados por um modelo linear, então, em princípio estes dados devem obedecer à equação da reta gerada pelo ajuste linear. Mas, se a correlação for linear, a troca dos dados da coluna das abcissas, pelos dados da coluna das ordenadas não pode alterar a linearidade, isto é: se escrevermos  $x$  como função de  $y$  devemos também obter uma reta. Do ponto de vista algébrico expressamos isto escrevendo:

$$x = \frac{1}{A}y - \frac{B}{m}.$$

Definindo:

$$A' = \frac{1}{A};$$

e

$$B' = -\frac{B}{m},$$

escrevemos:

$$x = A'y + B'.$$

ou ainda, mudando a notação:

$$y' = A'x' + B';$$

onde  $y' \equiv x$  e  $x' \equiv y$ .

Os pares de valores  $(x,y)$  que dispomos na forma de uma tabela ou na forma de um gráfico são resultados de valores experimentais e, logo, sujeitos aos erros inerentes aos processos de medida, por esta razão, convém introduzir uma grandeza estatística adimensional denominada *coeficiente de correlação* definida por:

$$\boxed{R^2 := AA'}.$$

Se  $R^2 = 1$ , isto é:  $A' = 1/A$ , exatamente, nossa confiança na linearidade do modelo será 100%. Por outro lado, se obtivermos, digamos,  $R^2 = 0,75$ , a confiabilidade será de 75%, e assim por diante. Note que  $0 \leq R^2 \leq 1$ .

Outro modo de entendermos a razão de escolher  $R^2 = AA'$  como coeficiente de determinação é:

$$xy \equiv (Ax + B)(A'y + B'); \quad (3.8)$$

$$xy \equiv AA'xy + B'(Ax + B + \frac{A'B}{B'}y); \quad (3.9)$$

$$xy \equiv AA'xy + B'(y + \frac{A'B}{B'}y); \quad (3.10)$$

como,

$$\frac{A'B}{B'} = \frac{1}{A}B(-\frac{A}{B}), \quad (3.11)$$

então,

$$xy \equiv AA'xy + yB'(1 - 1) \quad (3.12)$$

$$xy \equiv AA'xy \quad (3.13)$$

Voltemos ao problema da calibração da mola. Intercambiando os dados como descrito acima obtemos a Figura 3.6. Observe que

$$A' = 1,7134 \approx 1,71,$$

logo,

$$AA' = 0,584 \times 1,71 = 0,999 \approx 1,00.$$

Isto nos diz que nossa medida da constante elástica da mola é bastante confiável.

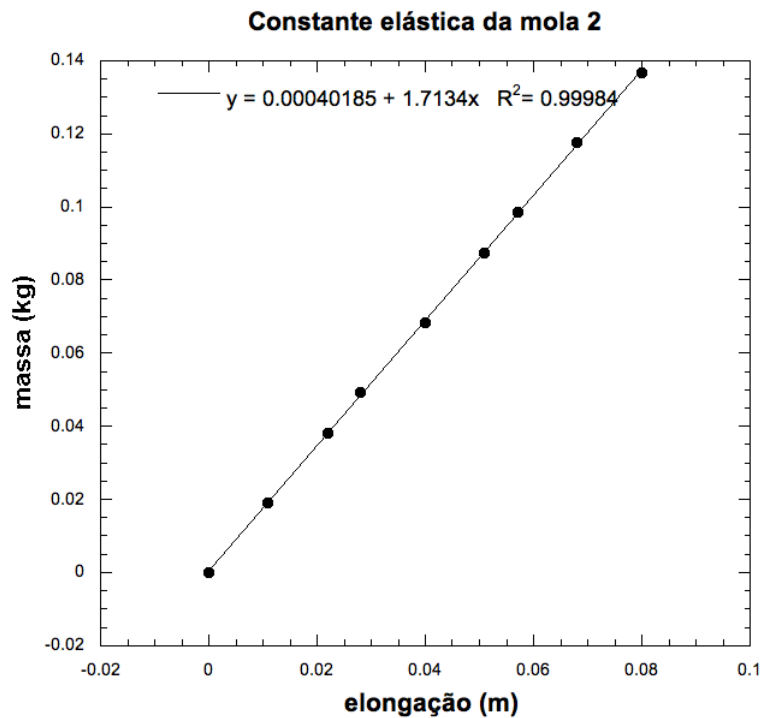


Figura 3.6: pré-atividade: significado e cálculo do coeficiente de determinação  $R^2$ .

### 3.2 Atividade 1: distensão da mola como consequência da adição de massa

O objetivo desta atividade é determinar a correlação entre a elongação da mola com a adição de massas sobre o carrinho deslizando. A massa total será igual à massa do carrinho deslizando mais a massa dos “pesos” adicionais. A massa do carrinho vale 0,0423 kg e as massas adicionais valem: 0,033 kg; 0,525 kg; 0,0847 kg; 0,0977 kg.

Durante essa atividade, a velocidade angular foi mantida constante em (aproximadamente) 7,69 rad/s - esse valor foi obtido através do microcontrolador Arduino que mede o valor do período de rotação com 3 algarismos significativos e o valor da velocidade angular é obtido através da equação (2.32).

A constante elástica da mola foi determinada na “Pré-atividade ” e o seu valor é igual à  $16,8\text{ N/m}$ . Observe que, para obtermos o valor do raio  $r$  da trajetória, devemos somar  $0,165\text{ m}$  à distensão da mola  $\Delta\ell$ , veja a Figura 3.7. Os dados obtidos para esta atividade são apresentados na Tabela 3.3 e as conversões foram feitas com uma calculadora eletrônica e os resultados arredondados para três dígitos significativos.

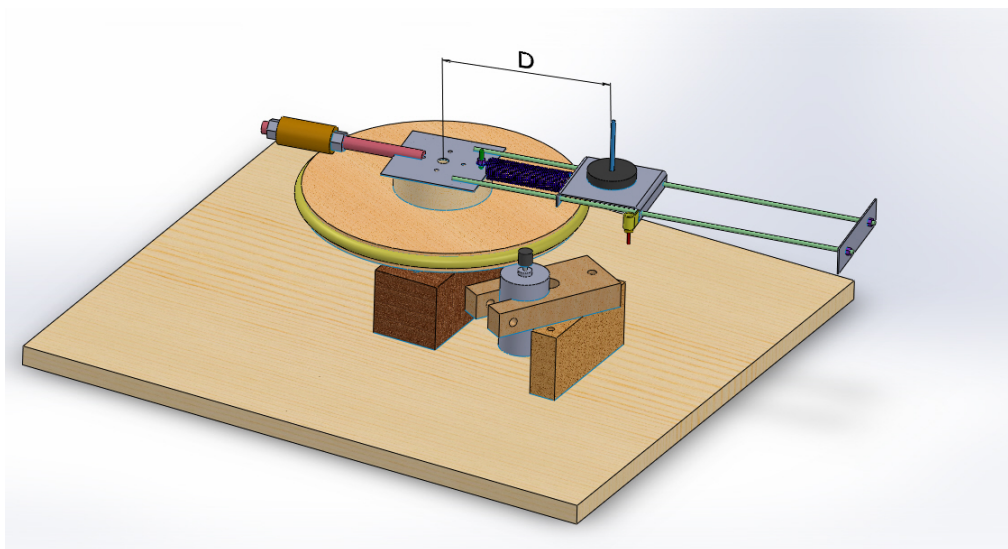


Figura 3.7: com a mola em seu tamanho natural, a distância  $D$  entre o centro do furo da placa metálica e o pino que mantém as massas adicionais vale  $0,165\text{ m}$ .

Tabela 3.3: Atividade 1: os dados obtidos diretamente pelo experimento são  $\Delta\ell$  e  $m$ .

Medida	1	2	3	4	5	6
$m$ (kg)	0,000	0,0423	0,0753	0,0948	0,127	0,140
$\Delta\ell$ (m)	0,000	0,023	0,059	0,089	0,124	0,145
$r = 0,165\text{ m} + \Delta\ell$ (m)	0,165	0,188	0,224	0,254	0,289	0,310
$mr$ (kg · m)	0,000	0,0080	0,0169	0,0241	0,0556	0,0368
$F_{\text{centripeta}} = \kappa\Delta\ell$	0,000	0,386	0,991	1,49	2,08	2,44

A primeira parte desta atividade será verificar o valor experimental da velocidade angular e compará-lo com o valor médio adotado, a saber:  $\omega =$



9.03  $rad/s$ . Aplicando a Equação (2.68) ao carrinho deslizando temos:

$$\kappa \Delta \ell = \omega^2 mr;$$

logo, podemos escrever:

$$\Delta \ell = \frac{\omega^2}{\kappa} mr.$$

Com os dados da Tabela 3.3 referentes ao  $\Delta \ell$  e  $mr$  e o software de análise de dados obtemos o gráfico da Figura 3.8. Com três dígitos significativos escrevemos:

$$\Delta \ell \approx 3,40 mr + 0,00020159,$$

com um coeficiente de determinação igual  $R^2 \approx 0.995$ . Portanto,

$$\frac{\omega^2}{\kappa} = 3,40; \therefore \omega^2 \approx 3,40 \times 16,8 \approx 57,1 \text{ rad}^2/\text{s}^2,$$

onde usamos o valor obtido experimentalmente para a constante elástica da mola. Segue que  $\omega \approx 7,56 \text{ rad/s}$ . O desvio percentual é:

$$\Delta\% = \frac{7,69 - 7,56}{7,69} \times 100 \approx 2\%.$$

Este desvio percentual se deve principalmente à dificuldade em manter a velocidade angular igual ao valor médio de 7,69  $rad/s$ , à leitura da elongação da mola, que é feita à olho nú e ao atrito existente entre os trilhos e o carrinho deslizando.

Na atividade de sala de aula, descrita mais adiante, observamos que os alunos sentem-se mais à vontade traçando o gráfico da força centrípeta contra o produto  $mr$ , embora um gráfico deste tipo consista basicamente em alterar a escala e as unidades do eixo vertical da Figura 3.8. De qualquer modo, com os dados da Tabela 3.3 podemos também construir o gráfico  $F_{\text{centrípeta}} = \kappa \Delta \ell \times mr$ , (ver Figura 3.9). Neste caso,

$$F_{\text{centrípeta}} = 0.00460 + 57.1 mr,$$

com um coeficiente de determinação  $R^2$  aproximadamente igual a 0.995.

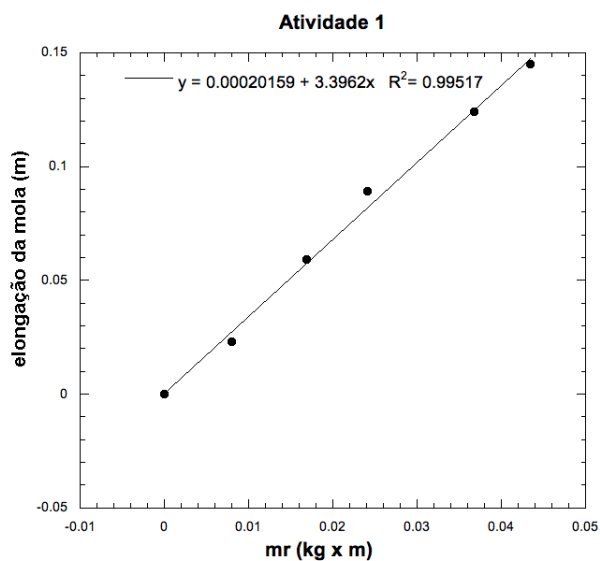


Figura 3.8: Atividade 1: aferição experimental da velocidade angular.

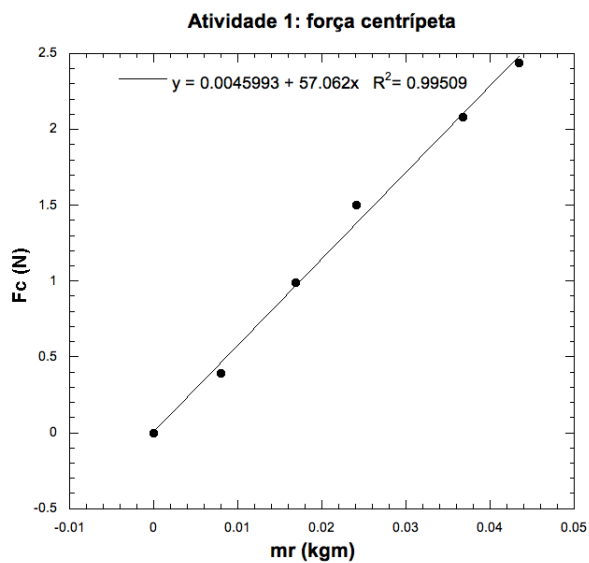


Figura 3.9: Atividade 1: força centrípeta como função do produto massa X raio da trajetória.

### 3.3 Atividade 2: distensão da mola como consequência do aumento da velocidade

Nesta atividade experimental, a massa total (carrinho + massas adicionais) é mantida constante:  $m = 0,0715$  kg, A velocidade angular é aumentada de modo gradual e o período é medido com o microcontrolador Arduino com uma precisão de três algarismos significativos assim como a elongação da mola. Os dados experimentais são mostrados na Tabela 3.4. Para converter a medida do período em velocidade angular usamos a Equação 2.32.

As conversões foram feitas com uma calculadora eletrônica e os resultados arredondados para três dígitos significativos.

Tabela 3.4: Atividade 2.

Medida	1	2	3	4	5	6	7
$\Delta\ell$ (m)	0,000	0,021	0,047	0,078	0,097	0,111	0,144
$T$ (s)	0,000	1,223	0,907	0,710	0,680	0,649	0,589
$r = 0.165$ m + $\Delta\ell$ (m)	0,165	0,186	0,212	0,243	0,262	0,276	0,309
$\omega$ (rad/s)	0,000	5,1349	6,9239	8,8451	9,2353	9,6764	10,662
$\omega^2 r$ [ (rad <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> ) · m ]	0,000	4,9	10,16	19,01	22,35	25,84	35,13
$F_{\text{centripeta}} = \kappa\Delta\ell$	0,000	0,351	0,785	1,303	1,620	1,854	2,405

Como nas atividades anteriores, podemos escrever:

$$\Delta\ell = \frac{m}{\kappa} \omega^2 r, \quad (3.14)$$

e inferir experimentalmente o valor da razão  $m/\kappa$ . Efetuando o ajuste linear com os dados da segunda e da sexta filas da Tabela 3.4, veja o gráfico mostrado na Figura 3.10,

$$\Delta\ell \approx 0.00248 + 0.00410 \omega^2 r. \quad (3.15)$$

Portanto, com os dados experimentais obtidos temos:

$$\frac{m}{\kappa} = \underbrace{0.00410}_{\text{obtido}} \text{ s}^2. \quad (3.16)$$

Por outro lado, a massa do conjunto carrinho + “peso” medida com uma balança digital vale 0,0715 kg, e a constante elástica da mola, também medida de modo independente (Pré-atividade), vale 16,8 N/m, logo

$$\frac{m}{\kappa} = \frac{0,0715}{16,8} = \underbrace{0,00426}_{\text{esperado}} \text{ s}^2. \quad (3.17)$$

O desvio percentual é:

$$\Delta\% = \frac{0,00426 - 0,00410}{0,00426} \times 100 \approx 3,8\%. \quad (3.18)$$

Este desvio percentual também se deve principalmente à dificuldade em manter a velocidade angular constante, à leitura da elongação da mola, que é feita à olho nú e ao atrito existente entre os trilhos e o carrinho deslizando.

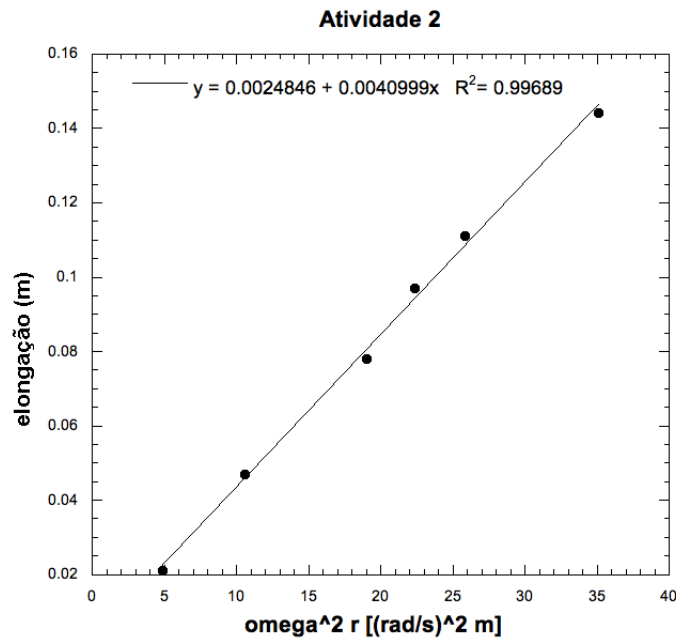


Figura 3.10: Atividade 2: determinação experimental da razão  $m/\kappa$ .

Como na atividade anterior, apresentamos também o gráfico da força centrípeta contra o produto  $\omega^2 r$ , que é o gráfico utilizado na atividade peda-

gógica. O resultado é mostrado na Figura 3.11.

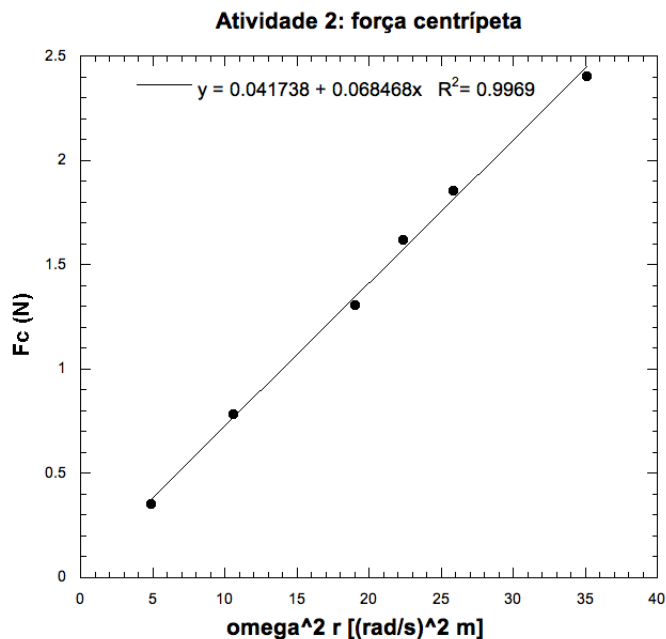


Figura 3.11: Atividade 2: força centrípeta como função de  $\omega^2 r$ .

### 3.4 Análise dos resultados

Os resultados práticos nos mostram que apesar do baixo custo e da rusticidade do nosso equipamento, é possível engajar os alunos nesta atividade “mão na massa” e obter bons resultados práticos e educacionais.

Este equipamento foi inspirado em um outro, comercializado pela empresa Phywe e a sua principal vantagem é o baixo custo. Entretanto, também existem desvantagens. O experimento comercializado pela Phywe, além de ser capaz de obter dados mais precisos, ele também permite manter constante o raio  $r$  da trajetória – diferente do nosso, de baixo custo, que só consegue manter a massa ou a velocidade angular constantes – e com isso, ele é capaz de analisar separadamente o comportamento da força centrípeta em função da velocidade angular  $\omega$ , da massa  $m$  e do raio  $r$ , sendo assim, capaz de construir três gráficos distintos:  $F_{cp} \times \omega$ ,  $F_{cp} \times m$  e  $F_{cp} \times r$ .

# Capítulo 4

## Metodologia de aplicação

A atividade que será descrita nessa seção foi aplicada a uma turma da segunda série do ensino médio do Colégio Pedro II, campus Humaitá II, no dia 23/11/2017, em uma aula que teve duração de duas horas e meia (Figura 4.1).

A turma, composta por 20 alunos, foi levada ao laboratório de informática, dividida em cinco grupos de, quatro alunos cada. Cada grupo dispunha de um computador com o software “Vernier Graphical Analysis ” previamente instalado.

A teoria sobre força centrípeta foi abordada em sala de aula durante as duas semanas anteriores à atividade experimental. A proposta tem como objetivo a corroboração experimental da teoria abordada a fim de possibilitar uma melhor compreensão do tema, a partir de uma abordagem mais prática e lúdica, gerando oportunidade para os alunos trabalharem com um software de análises de dados e uma maior compreensão de como a ciência pode ser construída.

Os alunos iniciaram a atividade recebendo um questionário prévio sobre o tema força centrípeta. Após a resolução do questionário, foi feita uma aula expositiva sobre função linear e de como usar o software “Vernier Graphical Analysis ” para a construção de gráficos, realização de ajustes e determinação dos coeficientes.

Seguindo com a atividade, eles receberam um roteiro da atividade expe-

rimental, isto é, uma espécie de guia para a atividade prática. No centro da sala, ao alcance de todos, estava o experimento de baixo custo. A atividade experimental foi de fato iniciada com uma breve explicação de como o experimento funciona. Dados foram então coletados, tabelas preenchidas, gráficos traçados, coeficientes determinados e os resultados obtidos foram discutidos e comparados. É importante ressaltar que o uso de calculadora foi totalmente incentivado para a execução dos devidos cálculos.

A atividade terminou com a realização de um questionário sobre o tema força centrípeta e uma avaliação sobre a atividade, na qual os alunos puderam deixar registrada a impressão que tiveram sobre a atividade.



Figura 4.1: aplicação da atividade no Colégio Pedro II – Campus Humaitá II – que ocorreu no dia 23/11/2017.

## 4.1 Plano de Aula

Colégio Pedro II, campus Humaitá II.

Departamento de Física.

Professor: Ronaldo Ayres.

Turma: 2204.

Duração da aula: 2h30.

Pré-requisitos: Algarismos significativos, função afim, movimento circular, força centrípeta e dinâmica.

Objetivos da aula: corroborar experimentalmente a teoria da força centrípeta, tornar o tema mais interessante e dinâmico, através de uma aula prática e lúdica e, despertar um maior interesse pela física, aproximando os alunos dos processos de criação da ciência.



<b>Momento da aula</b>	<b>Cronograma</b>	<b>Conteúdos</b>	<b>Procedimentos</b>	<b>Recursos</b>
Questionário prévio.	15 min.	Força centrípeta.	Alunos respondem individualmente o questionário.	Questionário prévio.
Introdução.	20 min.	Função linear.	Aula expositiva de revisão sobre função linear, focando na importância dos coeficientes; Demonstração de como se utiliza o software livre "Vernier Graphical Analysis" para a construção de gráficos e obtenção dos coeficientes.	Quadro, pilot, computador e data show.
Obtenção de dados experimentais.	50 min.	Nenhum.	Atividade experimental para coleta de dados.	Experimento e roteiro.
Construção dos gráficos.	50 min.	Função linear.	Os grupos seguem o roteiro, efetuam cálculos e conversões, preenchem tabelas, inserem os dados no software e obtêm os coeficientes.	Roteiro e calculadora.
Questionário pós-atividade e avaliação da atividade.	15 min.	Força centrípeta.	Alunos respondem individualmente o questionário e a avaliação.	Questionário pós-atividade e avaliação da atividade.

## 4.2 Questionário prévio

1) Quando você movimentar, numa trajetória circular, uma lata presa à extremidade de um barbante, qual é a direção e o sentido da força exercida sobre a lata?

- a) Direção radial, sentido para o centro da circunferência (para dentro).
- b) Direção radial, sentido oposto ao centro da circunferência (para fora).
- c) Direção tangente, sentido a favor do movimento.
- d) Direção tangente, sentido oposto ao do movimento.

2) É muito famosa a lei da Inércia: tendência natural que todos os corpos possuem de manter inalterado o seu estado de movimento desde que não haja forças externas agindo sobre ele. Assim, é possível que um corpo permaneça em movimento eterno sem ser impulsionado por nenhuma força. A Lua, nosso satélite natural, orbita ao redor da Terra e seu período de translação é de aproximadamente 27 dias. Em sua opinião, há alguma força agindo sobre a Lua, durante o seu movimento de órbita?

- a) Sim, a força centrípeta.
- b) Sim, a força gravitacional.
- c) Sim, a força orbital.
- d) Não.

3) Imagine a seguinte situação: você coloca uma bola de sinuca dentro de uma sacola de supermercado. Segurando as duas alças com uma de suas mãos, começa a girar a sacola e, conseqüentemente a bola, cada vez mais rápido. O que você pode afirmar a respeito do módulo da força que a sacola está fazendo sobre a bola, nessa situação:

- a) Está diminuindo.
- b) Permanece constante.
- c) Está aumentando.
- d) É impossível de determinar.

4) A aceleração é definida como sendo a taxa de variação temporal da velo-

cidade. Imagine um objeto descrevendo um movimento circular e uniforme (módulo da velocidade constante). Sobre esse móvel, é correto afirmar que a aceleração e a força resultante, respectivamente:

- a) Ambas são tangentes à trajetória.
- b) Ambas são nulas.
- c) Ambas apontam para o centro da trajetória.
- d) Ambas apontam contrárias ao centro da trajetória.

### 4.3 Roteiro experimental

A atividade experimental será dividida em duas partes. Na primeira parte, manteremos a velocidade angular constante em toda a atividade. Na segunda, manteremos a massa constante.

#### 4.3.1 Parte I: velocidade angular constante

Nessa primeira parte do experimento, discos de chumbo de diferentes massas, serão colocados em movimento circular, todos sob a mesma velocidade angular.

Iniciaremos pelo disco mais leve e, em seguida estabilizarmos a velocidade angular  $\omega$  em um valor constante, deveremos preencher a primeira linha da Tabela abaixo e calcular o valor dessa velocidade angular. Para isso, usaremos o valor do período  $T$  mostrado na tela do computador. Chamaremos essa velocidade angular medida através do sensor ótico de  $\omega_e$  e anotaremos o seu valor na linha de baixo.

$$\omega_e = \underline{\hspace{2cm}} \text{ rad/s.}$$

Agora, substituiremos o disco mais leve, por um outro, um pouco mais pesado, estabilizaremos a velocidade angular no mesmo valor do procedimento anterior e preencheremos a segunda linha da Tabela abaixo. Repetiremos a etapa anterior, até completarmos toda a Tabela abaixo.

Medida n°	massa do disco (g)	deformação da mola (cm)
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Usaremos os dados coletados na Tabela acima para preencher a Tabela abaixo. Atenção para as seguintes instruções:

- I) Fiquem atentos às unidades presentes nas tabelas e façam as devidas transformações (usem calculadora);
- II) A deformação da mola  $\Delta\ell$  não possui o mesmo valor do raio da trajetória  $r$ ;
- III) A constante elástica da mola foi aferida previamente e seu valor é  $k = 16,8 \text{ N/m}$ .

Medida n°	m (kg)	$\Delta L$ (m)	r (m)	mr (kg.m)	Fel (N)
1					
2					
3					
4					
5					
6					

Nessa parte iremos usar o software “Vernier Graphical Analysis ” para construir o gráfico da força elástica em função do produto da massa pelo raio da trajetória. Primeiro, iniciaremos o software, escolheremos a opção “Manual Entry”, preencheremos as duas colunas  $x$  e  $y$  com os valores das colunas

$mr(Kg.m)$  e  $Fel(N)$ , respectivamente e, por fim, clicaremos em “Graph Tools” (que se encontra no canto inferior esquerdo da tela), escolheremos em “Apply Curve Fit”, a opção “linear” e, por último, clicaremos em “Apply”.

Após isso, já é possível ver na tela do computador o gráfico e os coeficientes. Pela previsão teórica, o valor do coeficiente angular dessa reta é igual ao quadrado do valor da velocidade angular. Poderemos agora então, calcular o valor da velocidade angular através desse coeficiente angular. Vamos chamar essa velocidade angular de  $\omega_{med}$ , anotar seu valor e compara-lo com o valor da velocidade angular encontrada anteriormente.

$$\omega_{med} = \text{_____ rad/s.}$$

É possível perceber que esses valores não são iguais, porém são próximos. Para avaliarmos o quão próximos eles são, usamos uma ferramenta estatística chamada de desvio percentual ( $\Delta\%$ ). O desvio percentual é calculado pela expressão abaixo:

$$\Delta\% = \frac{|Valor1-Valor2|}{Valor1}(100\%).$$

Calcularemos o desvio percentual entre os dois valores encontrados para a velocidade angular e o anotaremos na linha de baixo.

$$\Delta\% = \text{_____}.$$

Desvios percentuais da ordem de 10% são esperados em nossa atividade de baixo custo.

### 4.3.2 Parte II: massa constante

Na segunda parte do experimento, manteremos sempre o mesmo disco de chumbo em movimento sob diferentes velocidades. Escolheremos o disco mais leve para essa atividade e chamaremos a sua massa de  $m_{exp}$  e a anotaremos na linha de baixo. Após estabilizarmos a velocidade angular  $\omega$  em um valor, preencheremos a primeira linha da Tabela abaixo.

$m_{exp} =$  \_\_\_\_\_ kg.

Agora, estabilizaremos a velocidade angular em valores cada vez mais elevados e, dessa forma, prosseguiremos preenchendo Tabela abaixo.

Medida n°	Deformação da mola (cm)	Período (ms)
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Iremos usar os dados coletados na Tabela acima para preencher a Tabela abaixo. Atenção novamente para as seguintes instruções:

- I) Fiquem atentos às unidades presentes nas tabelas e façam as devidas transformações;
- II) A deformação da mola  $\Delta\ell$  não possui o mesmo valor do raio da trajetória  $r$ ;
- III) A constante elástica da mola foi aferida previamente e seu valor é  $k = 16,8 \text{ N/m}$ .

Medida n°	X - Xo (m)	T (s)	$\omega$ (rad/s)	r (m)	$\omega^2 r$	Fel (N)
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Mais uma vez, usaremos o software “Vernier Graphical Analysis ” para construir um gráfico, porém, dessa vez será da força elástica em função do produto do quadrado da velocidade angular pelo raio da trajetória. Primeiro, iniciaremos o software, escolheremos a opção “Manual Entry”, preencheremos as duas colunas  $x$  e  $y$  com os valores das colunas  $mr(Kg.m)$  e  $Fel(N)$ , respectivamente e, por fim, clicaremos em “Graph Tools” (que se encontra no canto inferior esquerdo da tela), escolheremos em “Apply Curve Fit”, a opção “linear” e, por último, clicaremos em “Apply”.

Dessa forma, já podemos visualizar na tela do computador o gráfico e os seus coeficientes. Pela previsão teórica, o valor do coeficiente angular  $m$  é igual à massa total do carrinho deslizando. Poderemos então, calcular o valor da massa do carrinho deslizando através desse coeficiente angular. Vamos chamar essa massa de  $m_{med}$ , anotar seu valor e compara-lo com o valor da massa medida anteriormente pela balança.

$m_{med} =$  \_\_\_\_\_ Kg.

Novamente, esses valores não são iguais. Porém, eles são próximos. Para medirmos o quão próximos eles são, usamos o desvio percentual ( $\Delta\%$ ). Calcularemos o desvio percentual entre os dois valores encontrados para a massa total do carrinho deslizando e o anotaremos na linha abaixo.

$\Delta\% =$  \_\_\_\_\_. Mais uma vez, o desvio percentual esperado nessa atividade é da ordem dos 10%.

Para concluir a atividade vocês deverão responder aos questionário pós-atividade e à avaliação da atividade.

## 4.4 Questionário pós-atividade

1) Imagine uma máquina de lavar roupas no modo de "secagem" ou "centrifugação", onde o tambor gira em alta velocidade. Nesse momento, o tambor da máquina exerce sobre as roupas uma força cuja direção e sentido está melhor representado por qual alternativa?

- a) Para o centro do tambor.
  - b) Contrário ao centro do tambor.
  - c) Tangente ao tambor e a favor do movimento.
  - d) Tangente ao tambor e contrário ao movimento.
- 2) Infelizmente, acidentes de carro são comuns. Alguns deles são decorrentes do excesso de velocidade. Imagine um automóvel que irá realizar uma curva, em um plano horizontal. Qual é a força responsável pela trajetória curvilínea do automóvel?
- a) Centrífuga.
  - b) Centrípeta.
  - c) Atrito.
  - d) Normal.
- 3) Um objeto é preso a uma das extremidades de uma mola e é acelerado de modo a percorrer trajetórias circulares, sobre um plano horizontal. O que podemos afirmar sobre o raio da trajetória e sobre o módulo da força que a mola exerce sobre o objeto, respectivamente, a medida que a velocidade do objeto for sendo aumentada?
- a) Aumenta e aumenta.
  - b) Aumenta e diminui.
  - c) Diminui e aumenta.
  - d) Diminui e diminui.
- 4) Devido a um congestionamento aéreo, o avião em que Flávia viajava permaneceu voando em uma trajetória horizontal e circular, com velocidade de módulo constante. Considerando essas informações, é correto afirmar que, em certo ponto da trajetória, a resultante das forças que atuam no avião é:
- a) Horizontal.
  - b) Vertical, para baixo.
  - c) Vertical, para cima.
  - d) Nula.



## 4.5 Avaliação da atividade

A avaliação da atividade é anônima porque gostaríamos de receber sinceras respostas.

1) Você gostou da atividade realizada?

- a) Sim.
- b) Não.

2) Você considera a atividade realizada mais interessante que uma aula tradicional?

- a) Sim.
- b) Não.

3) Você acha que a atividade de hoje resultou em uma melhor compreensão de temas já vistos em sala de aula?

- a) Sim.
- b) Não.

4) Caso queira, deixe aqui suas opiniões, elogios ou críticas.

---

---

---

## 4.6 Resultados obtidos

Os questionários pré-atividade e pós-atividade, foram construídos com a finalidade de verificar mudanças nas concepções dos discentes. Eles foram construídos com o objetivo de avaliar alguns "erros comuns" dos estudantes nesse tema. A Figura 4.2 mostra os percentuais de acertos das questões nos

questionários.

<b>Questão</b>	<b>Questionário prévio</b>	<b>Questionário pós atividade</b>
1	35%	80%
2	20%	65%
3	45%	80%
4	20%	70%

Figura 4.2: percentual de acertos dos questionários pré e pós-atividade.

As avaliações realizadas pelos discentes na "avaliação da atividade" também foram bastantes positivas. A Figura 4.3 mostra a estatística de respostas.

<b>Questão</b>	<b>"sim"</b>	<b>"não"</b>
1	95%	5%
2	95%	5%
3	90%	10%

Figura 4.3: estatística de respostas sobre a avaliação da atividade.

Alguns alunos também preencheram o item 4 da "avaliação da atividade" deixando suas opiniões, elogios ou críticas. A Figura 4.4 nos mostra as avaliações apresentadas.

O interesse dos alunos na atividade em si, o avanço que foi observado entre os questionários pré e o pós atividade e a positiva avaliação da atividade representaram um indicativo de que a metodologia foi pedagogicamente relevante para os estudantes.

Aluno	Opiniões, elogios ou críticas.
a	“Adorei a atividade. A física fica muito mais fácil de compreender quando vemos na prática o que está acontecendo”.
b	“Achei muito interessante saber como se comprova uma teoria”.
c	“Por mais aulas assim!”
d	“Não entendi muito bem o lance dos coeficientes, mas a atividade foi show.”
e	“Foi tudo muito legal. Usar o computador para criar gráficos foi incrível. Papel milimetrado nunca mais.”
f	“Poderíamos comprovar todas a teorias como fizemos na aula de hoje!?”

Figura 4.4: opiniões, elogios ou críticas registrados pelos alunos.

# Apêndice A

## Manual de montagem do experimento de baixo custo

Nessa parte, iremos detalhar todas as etapas de construção do experimento que tem como finalidade a comprovação experimental da expressão da força centrípeta, assim como as especificações de todas as peças e materiais utilizados. Para facilitar o entendimento, iremos dividir o detalhamento do projeto em algumas etapas: parte inferior, parte superior e Arduino.

### A.1 Parte inferior

A Figura A.1 nos dá uma visão geral dos principais componentes que formam a parte inferior do projeto. Cada um deles foi numerado de 1 a 12.

A seguir, iremos descrever detalhadamente cada componente. É aconselhável a assistência de um marceneiro para a produção dos componentes 1, 3, 4, 8, 9, 10 e 11, assim como a de um torneiro mecânico para o componente de número 6.

Componente 1: disco de espaçamento entre a polia e o carro dos pesos. Em formato circular, produzido com madeira do tipo "madeirite" de 10 mm de espessura, essa parte possui diâmetro de 6 cm com um furo central de 8 mm de diâmetro.

Componente 2: borracha de garrote. Teve suas extremidades coladas com

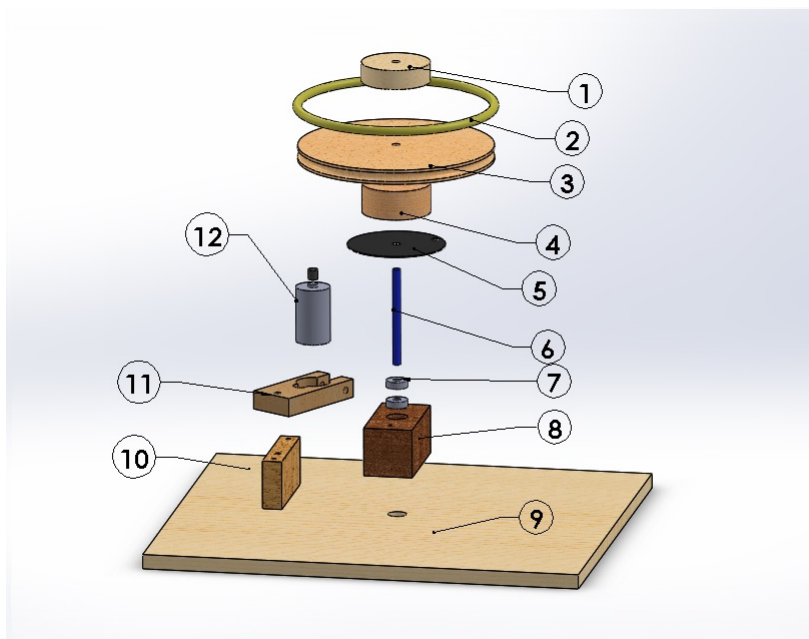


Figura A.1: parte inferior com seus componentes numerados de 1 a 12 (Ilustração H.P. Cordova.).

cola do tipo "Superbonder", fazendo com que ela fique no formato circular e com 18 cm de diâmetro. Essa peça será apenas encaixada à base circular (componente 3).

Componente 3: polia circular. No formato circular, produzido com madeira do tipo "madeirite" de 10 mm de espessura, possui diâmetro de 20 cm com furo central com 8 mm de diâmetro. Nas laterais, foi talhado um "canal" para que o garrote (componente 2) seja melhor encaixado.

Componente 4: suporte da polia. No formato circular, produzido com madeira do tipo "madeirite" com 3 cm de espessura e 6 cm de diâmetro.

Componente 5: disco encoder. Disco circular com 26 mm de diâmetro, contendo 20 furos, próprio para ser usado com sensores Arduino. Este componente foi fixado ao suporte da polia (componente 4) através de 4 parafusos atarraxantes (4,2 x 22 mm), próprio para madeiras. Esse disco pode ser facilmente adquirido em lojas de produtos eletrônicos sob o nome de "disco encoder".

Componente 6: eixo retificado. No formato cilíndrico, possui 8 mm de diâmetro e 100 mm de altura.

Componente 7: rolamentos de skate. Duas unidades com dimensões de 8 x 22 mm. Pode ser facilmente adquirido em lojas de equipamentos para skates.

Componente 8: mancal dos rolamentos. No formato de um paralelepípedo de dimensões 50 x 50 x 100 mm. Produzido com madeira do tipo "reflorestamento", possui um furo central com 20 mm de diâmetro. Os dois rolamentos (componentes 7) são encaixados aqui sob uma certa pressão.

Componente 9: base de madeira. No formato retangular de dimensões 40 x 45 cm, foi produzido com madeira do tipo "madeirite" com 15mm de espessura.

Componente 10: base do motor. No formato de um paralelepípedo de dimensões 13 x 4 x 3 cm. Foi produzido com madeira do tipo "reflorestamento". Essa peça é fixada à base (componente 9) através de dois parafusos atarraxantes 4,2 x 52 mm para madeira.

Componente 11: suporte para o motor elétrico. No formato de um paralelepípedo de dimensões 13 x 5 x 2 cm. Foi produzido com madeira do tipo "reflorestamento". Essa peça é fixada à base do motor (componente 10), através de um parafuso sextavado (5/16 x 60 mm) de rosca soberba. Pelo alto nível de detalhes que esse componente possui, foi adicionado um desenho técnico (Figura A.2) para auxiliar a construção do mesmo.

Componente 12: motor elétrico. Tensão nominal máxima: 12 volts; potência nominal máxima: 120 Watts; dimensões: 350 mm de diâmetro e 7 cm de altura. Ele é fixado ao suporte (componente 11) através de um parafuso sextavado (5/16 x 60 mm), rosca soberba. Esse componente pode ser facilmente adquirido em lojas de equipamentos eletrônicos.

A Figura A.3 mostra como fica a parte inferior do projeto quando os componentes forem conectados. Essa será a primeira parte do projeto.

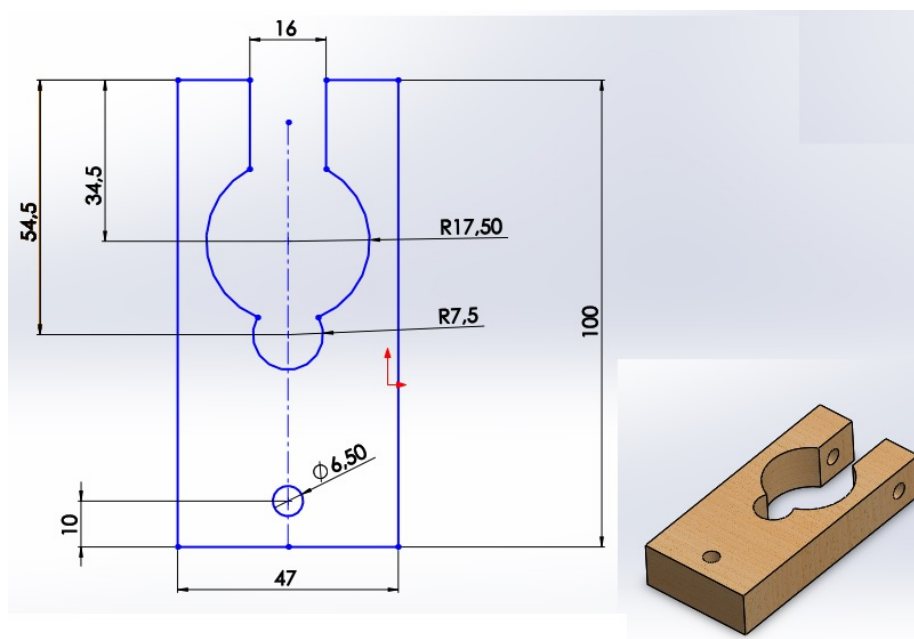


Figura A.2: desenho técnico para auxiliar na construção do componente 11: suporte para o motor.

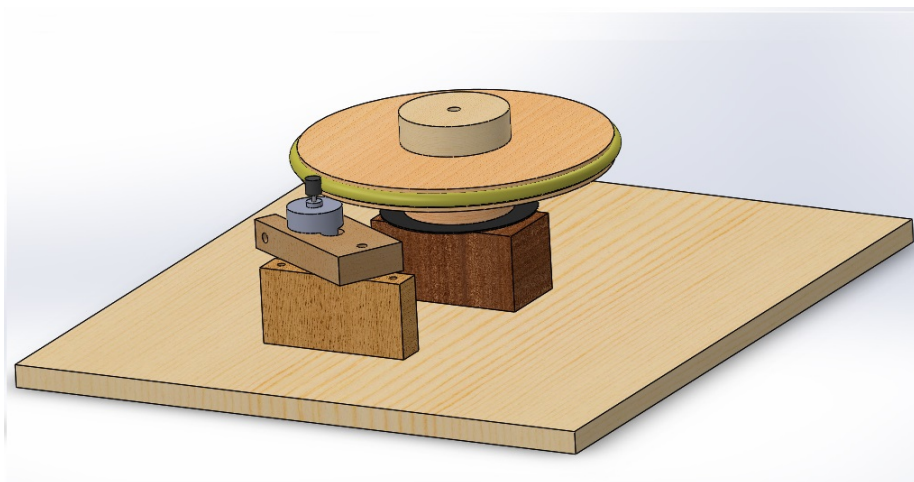


Figura A.3: parte inferior com seus componentes conectados.

## A.2 Parte superior

A Figura A.4 oferece uma visão geral dos principais componentes que formam a parte superior do projeto. A figura A.5 nos mostra cada um dos

componentes que foi enumerado de 1 a 14.

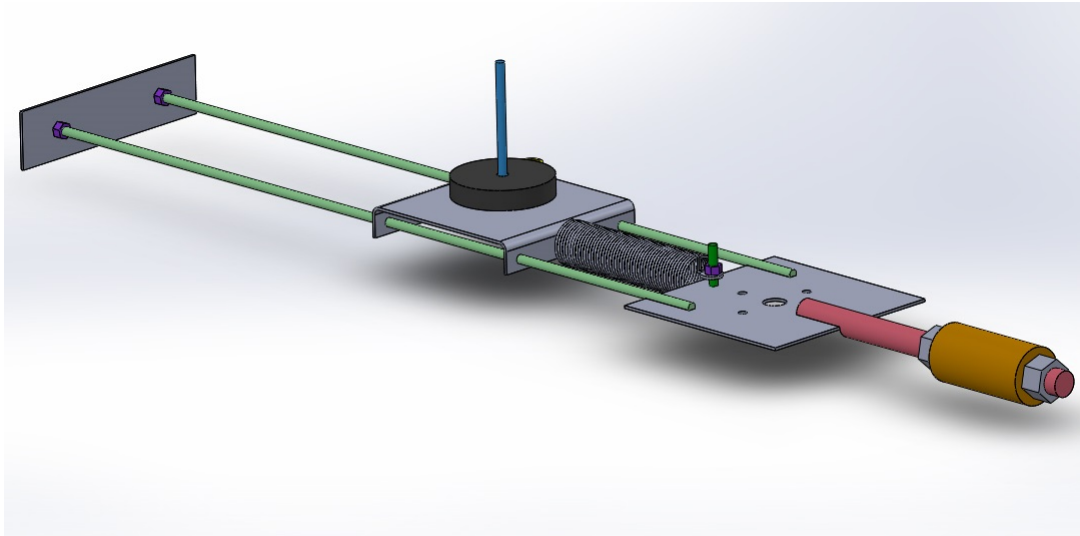


Figura A.4: parte superior: carrinho deslizante, trilhos, contra peso e mola.

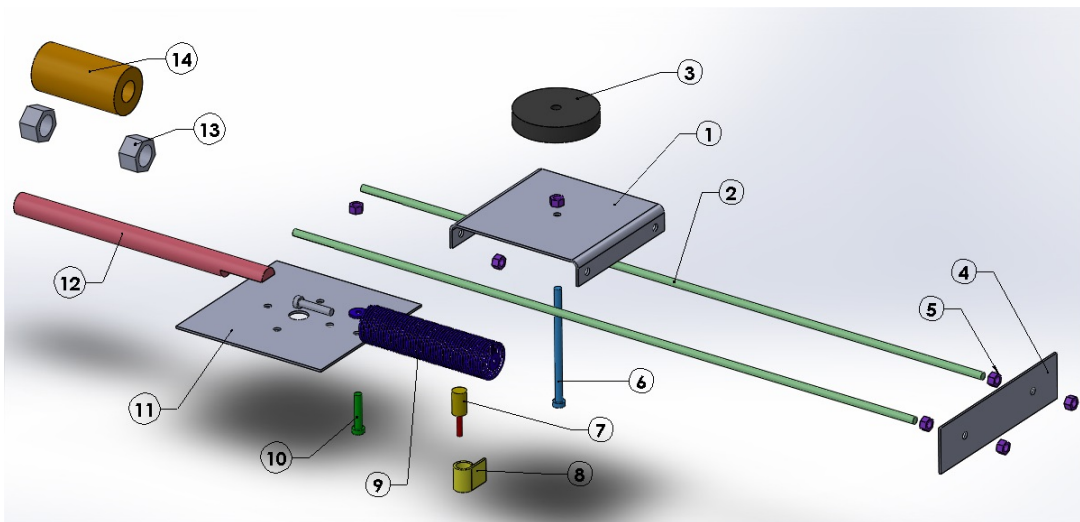


Figura A.5: parte superior: componentes numerados de 1 a 14.

A seguir, iremos descrever detalhadamente cada componente, assim como alguns detalhes importantes para a construção do projeto. É aconselhável a



assistência de um torneiro mecânico para a produção dos componentes 1, 2, 3, 4, 8, 9, 11 e 12.

Componente 1: carro de pesos. A Figura A.6 representa o desenho técnico necessário para auxiliar a sua construção.

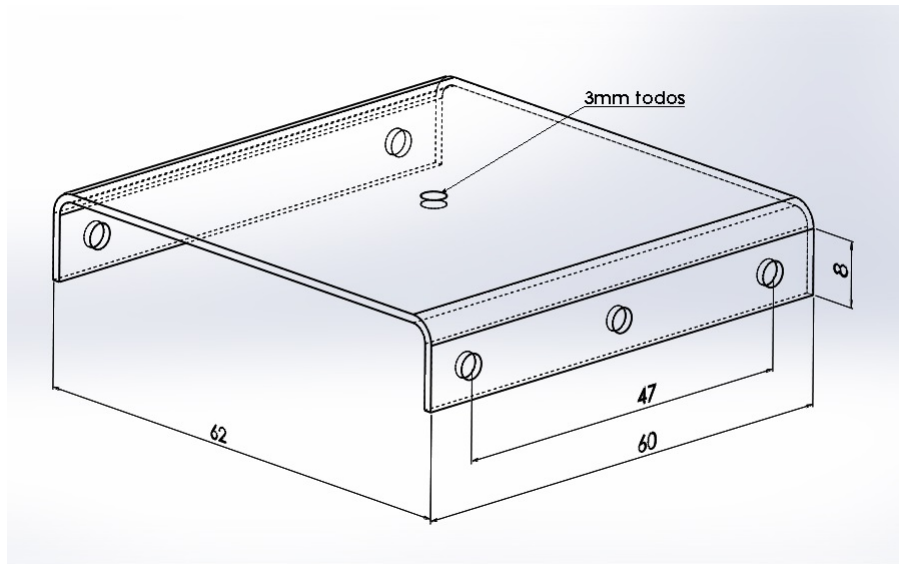


Figura A.6: desenho técnico para auxiliar na construção do componente 1: carro de pesos.

Componente 2: haste de aço de dimensões  $1/8"$  x 300 mm.

Componente 3: discos de chumbo, com gramaturas diferentes variando de 30 até 200 g, cada. Possuem um furo, no centro, de 3,5 cm de diâmetro, para que sejam encaixadas ao parafuso central (componente 6).

Componente 4: placa fim de curso. A Figura A.7 representa o desenho técnico necessário para auxiliar a sua construção.

Componente 5: porcas de  $1/8"$ .

Componente 6: parafuso de dimensão  $1/8"$  x 6 cm.

Componente 7: módulo laser de potência nominal 1 mW. O componente foi adquirido em uma loja de eletrônica.

Componente 8: suporte de fixação do laser (componente 7). Foi produzido a partir de uma chapa metálica com dimensões 10 x 30 mm, curvada ao redor do laser e chumbada com estanho ao carro de pesos (componente 1).

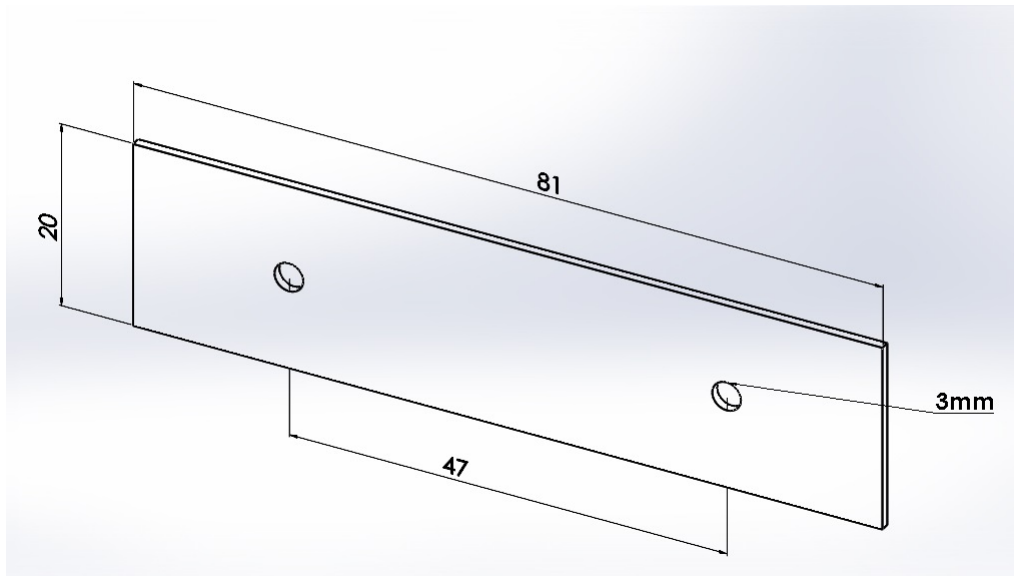


Figura A.7: desenho técnico para auxiliar na construção do componente 4: placa fim de curso.

Componente 9: mola no formato cilíndrico. Em seu tamanho natural possui 7 cm de comprimento e 1 cm de diâmetro.

Componente 10: parafuso de dimensão 1/8"x 1/2".

Componente 11: placa base. A figura A.8 representa o desenho técnico necessário para auxiliar sua construção.

Componente 12: suporte de contra peso. Feito de uma haste rosqueável de dimensões 3/8 x 6".

Componente 13: duas porcas de dimensões 3/8".

Componente 14: contra peso. Foram usadas setenta arruelas de dimensões 3/8".

É importante ressaltar algumas instruções para a correta montagem: os componentes 2, 7 e 12 deverão ser soldados ao componente 11. A Figura A.9 mostra a posição exata dessas soldas. Em nosso projeto, utilizamos o estanho como material de solda. A Figura A.9 também representa a fixação da mola (componente 9) ao componente 11, ela é feita através de um parafuso e uma porca.

Após a construção das duas primeiras etapas do projeto - partes inferior

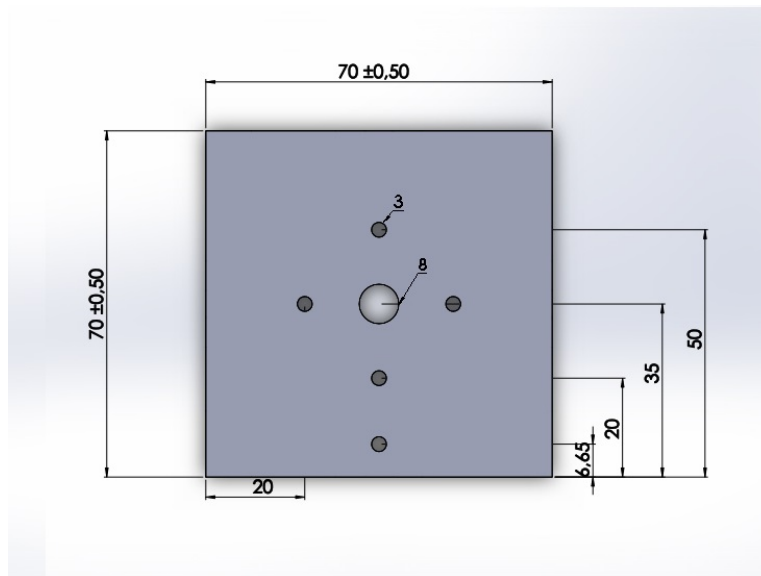


Figura A.8: desenho técnico para auxiliar na construção do componente 11: placa base.

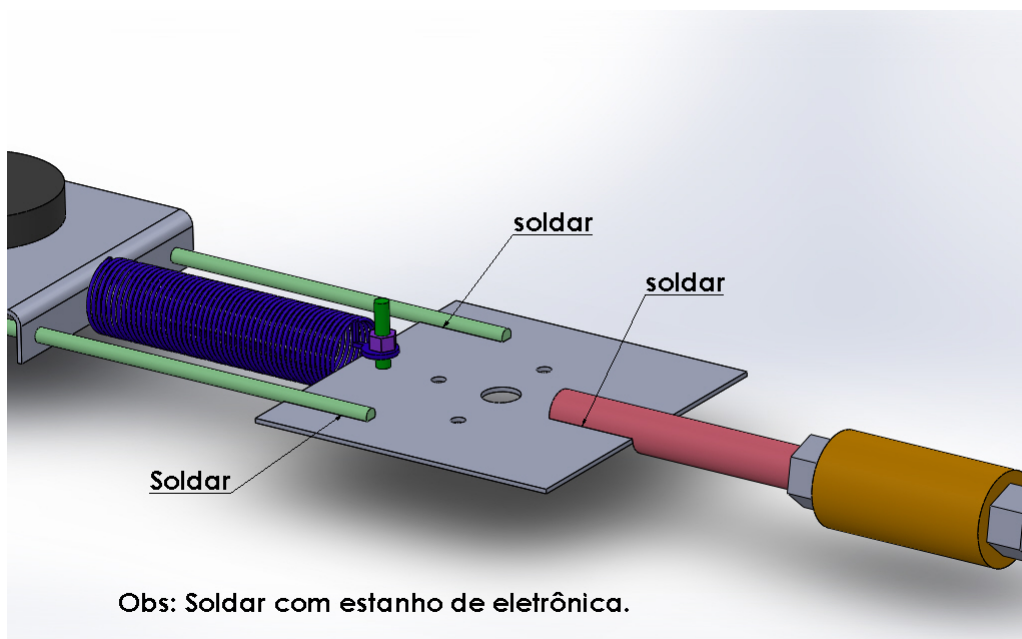


Figura A.9: instruções para a correta soldagem.

e superior - já é possível a junção deles em uma peça única. Para isso, basta fixar o componente 11 da parte superior no componente 1 da parte inferior, utilizando quatro parafusos atarraxantes para madeira e de dimensões 4,2 x 22 mm. A Figura A.10 ilustra como deve ficar essa "peça única".

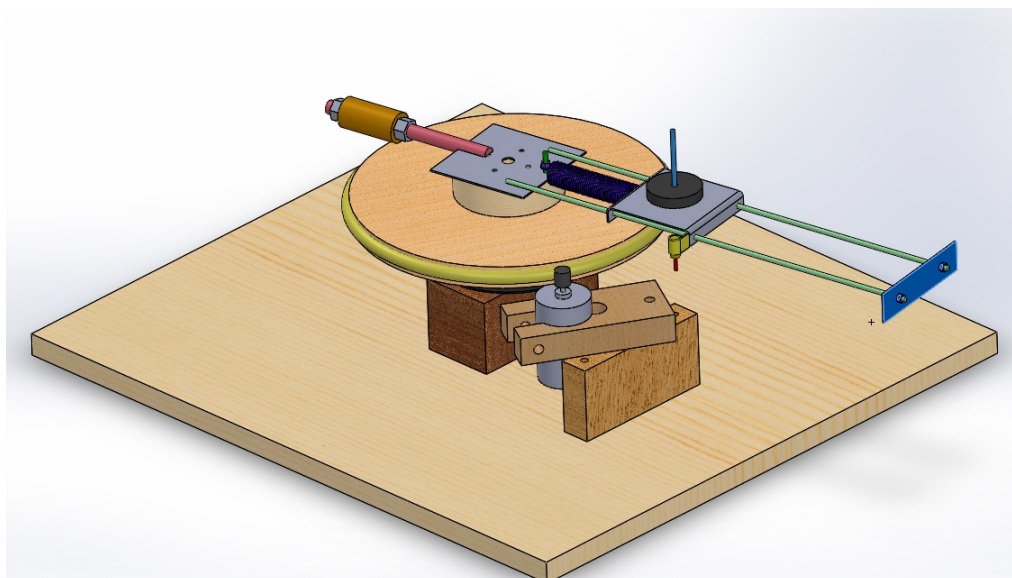


Figura A.10: ilustração da peça única formada após a fixação das partes inferior e superior.

### A.3 Arduino

A placa de Arduino foi de imensa importância para este projeto. Inicialmente, as aferições dos períodos de rotação eram feitas apenas com o auxílio de um cronômetro. Era aferido o tempo de algumas voltas e calculava-se o período médio.

Esse tipo de aferição não funcionou bem nesse projeto, pois como veremos nas páginas adiante, uma das propostas desse experimento é a aferição das deformações provocadas por diferentes massas girando sob a mesma velocidade angular. Como o ajuste da velocidade é feito por um potenciômetro, era quase impossível ajustar novamente a velocidade angular após desligar o

motor para a troca dos discos de diferentes massas, pois era preciso a cada pequeno ajuste no potenciômetro, uma nova aferição da velocidade angular.

A solução seria a obtenção automatizada e instantânea do período de translação dos discos. Para isso, foi usado uma placa de Arduino Uno e um sensor ótico (Figura A.11) que utiliza o chip comparador LM393 (datasheet) e na sua extremidade tem um optointerruptor com um vão de 5 mm.

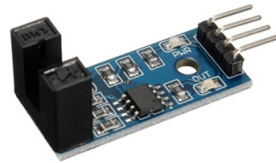


Figura A.11: sensor ótico LM393.

A ligação entre a placa Arduino e o sensor ótico é feita através de três fios. A Figura A.12 ilustra como deve ser feita a ligação entre a placa e o sensor.

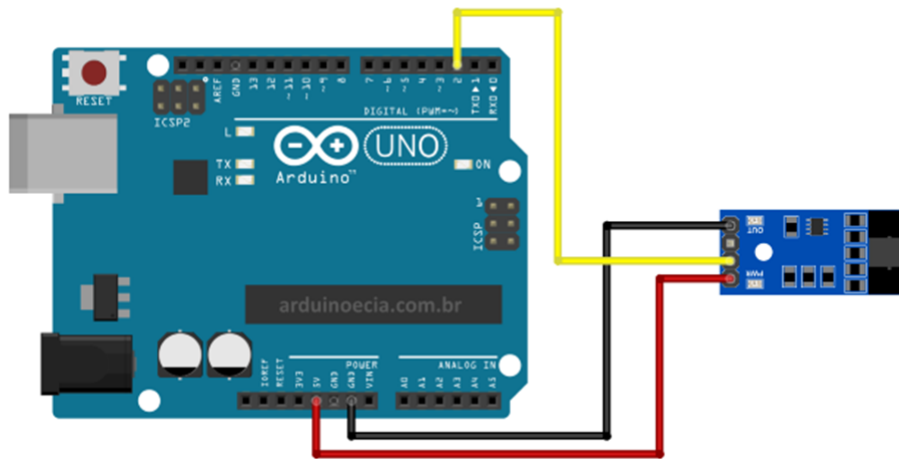


Figura A.12: esquema de ligação entre a placa Arduino e o sensor ótico.

O sensor ótico deve ser fixado junto à base do experimento de modo que o disco encoder (componente 5 da base inferior) fique centralizado no vão existente entre o emissor e o receptor ótico. Dessa forma, quando o disco

encoder entrar em movimento, o sinal do feixe oscilará e será possível aferir o período de translação.

O código de programação usado, mais conhecido como sketch, está ilustrado na Figura A.13 e serve de referência.



```
sketch_dec11a | Arduino 1.8.5
Arquivo Editar Sketch Ferramentas Ajuda
sketch_dec11a$
int t;
volatile byte pulsos;
unsigned long tempo;

void contador()
{
  pulsos++;
}

void setup()
{
  Serial.begin(9600);
  pinMode(2, INPUT);
  attachInterrupt(0, contador, FALLING);
  pulsos = 0;
  t = 0;
  tempo = 0;
}

void loop()
{
  if (millis() - tempo >= 1000)
  {
    detachInterrupt(0);
    t = (millis() - tempo) / ( pulsos / 20 );
    tempo = millis();
    pulsos = 0;
    Serial.print("T = ");
    Serial.println(t, DEC);
    attachInterrupt(0, contador, FALLING);
  }
}
```

Figura A.13: sketch utilizado no microcontrolador Arduino.

# Referências Bibliográficas

- [1] Brasil, Ministério da Educação, Secretaria da Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio*. Brasília: Ministério da Educação, 1999.
- [2] Brasil, Ministério da Educação, Orientações curriculares para o ensino médio. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: Ministério da Educação Básica, 2006.
- [3] Higa, I., Oliveira, O.B. Experimentação nas pesquisas sobre o ensino de Física: fundamentos epistemológicos e pedagógicos. Curitiba: Educar em Revista, n 44, p. 75-92, 2012.
- [4] Ferreira, N. C. Proposta de laboratório para a escola brasileira: um ensaio sobre a instrumentação no ensino de Física. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências) - IFUSP/FEUSP. São Paulo, 1978.
- [5] Carvalho, A. M. P. O ensino de ciências e a proposição de sequências de ensino investigativas. In: CARVALHO, A. M. P. (Org.) Ensino de Ciências por Investigação: Condições para implementação em sala de aula. São Paulo: Cengage Learning, p. 1-20, 2013.
- [6] Newton, I., Henry, R.C. Circular motion. American J. Physics, v.68, n.7, p. 637-639, 2000.
- [7] Dias, P. M. C.,  $F = ma$  ?!! O nascimento da lei dinâmica. Revista Brasileira de Ensino de Física, v.28, n.2, p. 205-234, 2006.
- [8] Dias, P. M. C., Santos, W. M. S., Souza, M. T. M., *A gravitação universal (um texto para o ensino médio)*. Revista Brasileira de Ensino de Física, v.26, n.3, 2004.
- [9] Doca, R. H., Biscuola, G. J., Bôas, R. H. Tópicos de Física 1 – Mecânica. São Paulo: Saraiva, p. 113 - 116, 2007.

- [10] Halliday, D., Resnick, R., Walker, J. Fundamentos da Física, volume 1: Mecânica. 8 ed. Tradução e revisão técnica Ronaldo Sérgio Biasi. Rio de Janeiro: LTC, 2008.
- [11] Taylor, J.R. An Introduction to Error Analysis 2nd edition University Science Books, 1997.
- [12] Squires, G.L. Practical Physics 4th ed; CUP, Cambridge, 2001.
- [13] Cordova, H., Tort, A.C., Medida de  $g$  com a placa Arduino em um experimento simples de queda livre. Revista Brasileira de Ensino de Física, v.38, n.2, 2308 (2016).