



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Física
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física
Mestrado Profissional em Ensino de Física
Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física



Impedância e Transferência de Energia em Mecânica e Óptica

Leonardo Rodrigues de Jesus
&
Carlos Eduardo Aguiar

Material instrucional associado à dissertação de mestrado de Leonardo Rodrigues de Jesus, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2019

Impedância e Transferência de Energia em Mecânica e Óptica

Leonardo Rodrigues de Jesus
Carlos Eduardo Aguiar

Sumário

1	Casamento de impedâncias em colisões mecânicas	3
1.1	Impedância em colisões mecânicas	4
1.2	Casamento de impedâncias em colisões mecânicas	6
2	Experimentos com o casador de impedâncias	16
2.1	Experimento de colisão: análise com vídeo	17
2.2	Um método simples para medir o alcance	22
2.3	Casamento de impedâncias em bolas quicando	24
3	Outro tipo de casador de impedâncias	28
3.1	Experimentos com o casador-alavanca	31
4	Casamento de impedâncias em óptica	33
4.1	Transmissão de luz na interface entre dois meios	33

1 Casamento de impedâncias em colisões mecânicas

Imagine um sistema físico A que pode transferir energia para outro sistema físico, que chamaremos de B . Mais adiante vamos dar exemplos de A e B , mas por enquanto manteremos a discussão em termos bem gerais, como ilustrado na figura 1.

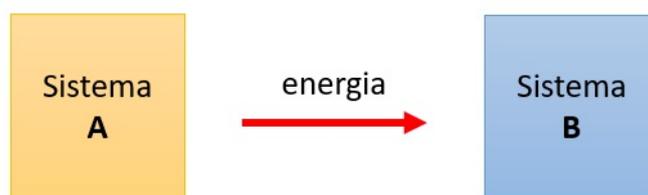


Figura 1: Transferência de energia do sistema A para o sistema B .

Um aspecto importante da transferência de energia de A para B é a eficiência desse processo. Idealmente, gostaríamos que toda a energia disponível em A fosse transferida para B , mas na prática isso pode não ser possível. Para compreender em que condições a transferência de energia é máxima, é útil introduzir o conceito de *impedância*. Dizemos que cada um dos sistemas A e B têm uma dada impedância e que, se essas forem iguais, a transferência de energia será a maior possível. Outra maneira de expressar isso é dizendo que as impedâncias de A e B estão *casadas*.

No caso em que as impedâncias são diferentes (estão *descasadas*) a transferência de energia não é a melhor possível. Nesse caso, como veremos, é possível melhorar a transmissão de energia de A para B colocando um terceiro sistema entre eles, o *casador de impedâncias*.

A definição exata do que sejam impedância e casador de impedâncias depende da natureza dos sistemas envolvidos. Nas próximas seções mostraremos como esses conceitos podem ser definidos em uma situação familiar: a colisão elástica de partículas.

1.1 Impedância em colisões mecânicas

Vamos supor que duas partículas, de massas M e m , colidem elasticamente uma com a outra conforme ilustrado na figura 2. Inicialmente, a massa M move-se com energia cinética E e m encontra-se em repouso. Durante a colisão uma determinada energia e é transferida de M para m . Como a colisão é elástica, a energia cinética final de M é $E - e$. Vamos supor que a colisão é ‘frontal’, ou seja, que as massas movem-se ao longo de uma linha reta como ilustrado na figura 2.

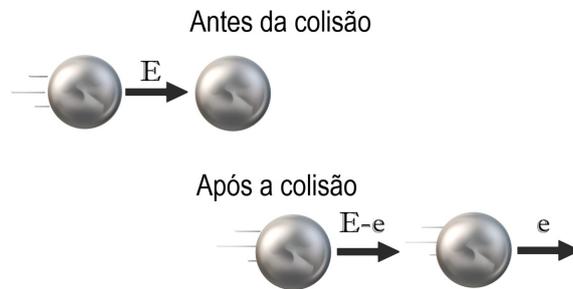


Figura 2: Colisão elástica entre uma partícula de massa M e energia E e outra de massa m em repouso. Na colisão, m recebe uma energia cinética e , deixando M com energia $E - e$.

Podemos calcular a energia transferida e utilizando as leis de conservação da energia e do momento linear. A conservação do momento pode ser escrita como

$$MU = Mu + mv, \quad (1)$$

onde U e u são as velocidades de M antes e depois da colisão e v é a velocidade final de m . Da mesma forma, a conservação da energia leva a

$$\frac{1}{2}MU^2 = \frac{1}{2}Mu^2 + \frac{1}{2}mv^2. \quad (2)$$

Calculando u a partir da equação (1) e substituindo o resultado em (2) obtemos uma relação entre as velocidades v e U , que pode ser colocada na

forma

$$\frac{v}{U} = \frac{2M}{M+m} . \quad (3)$$

A eficiência η_0 da transferência de energia de M para m é definida como

$$\eta_0 = \frac{e}{E} . \quad (4)$$

Como $E = MU^2/2$ e $e = mv^2/2$, temos que

$$\eta_0 = \frac{m}{M} \left(\frac{v}{U} \right)^2 , \quad (5)$$

e finalmente, utilizando (3), obtemos

$$\eta_0 = \frac{4Mm}{(M+m)^2} . \quad (6)$$

Na situação em que ocorre a máxima transferência de energia, toda a energia cinética de M é transferida a m , ou seja, a eficiência é $\eta_0 = 1$. Nesse caso temos que

$$4Mm = (M+m)^2 \implies (M-m)^2 = 0 , \quad (7)$$

e portanto

$$\eta_0 = 1 \iff M = m . \quad (8)$$

Essa relação nos permite identificar as impedâncias relevantes em uma colisão mecânica: são as massas das partículas. A transferência de energia é máxima quando as impedâncias estão casadas, ou seja, se as massas M e m são iguais. Se as massas forem diferentes a transferência de energia de M para m não será completa. Podemos perguntar se é possível aumentar essa transferência sem alterar as massas e as velocidades iniciais. Na próxima seção veremos que a resposta é sim, utilizando para isso um sistema auxiliar chamado *casador de impedâncias*.

1.2 Casamento de impedâncias em colisões mecânicas

No caso de impedâncias não casadas, apenas uma parcela de energia disponível no sistema A é recebida por B . Frequentemente é possível inserir entre A e B um terceiro sistema, o casador de impedâncias, que aumenta a quantidade de energia transferida (sem produzir energia extra), conforme ilustrado na figura 3.



Figura 3: Para sistemas A e B de impedâncias descasadas, um casador de impedâncias colocado entre eles aumenta a transferência de energia.

Na colisão de partículas de massas diferentes M e m , vamos investigar se uma terceira partícula de massa μ colocada entre as duas primeiras pode atuar como casador de impedâncias. A nova configuração está mostrada na figura 4. Como antes, se E é a energia inicial da massa M e e a energia final de m , a eficiência da transferência de energia é

$$\eta = \frac{e}{E}, \quad (9)$$

que pode ser escrita como

$$\eta = \frac{e}{\epsilon} \frac{\epsilon}{E}, \quad (10)$$

onde ϵ é a energia transferida de M para μ na primeira colisão (ver figura 4). Os dois fatores na equação acima são, respectivamente, as eficiências das duas colisões intermediárias $M \rightarrow \mu$ e $\mu \rightarrow m$, que podem ser calculadas aplicando a equação (6) obtida na seção anterior. O resultado é

$$\eta = \frac{16Mm\mu^2}{(M + \mu)^2(\mu + m)^2}. \quad (11)$$

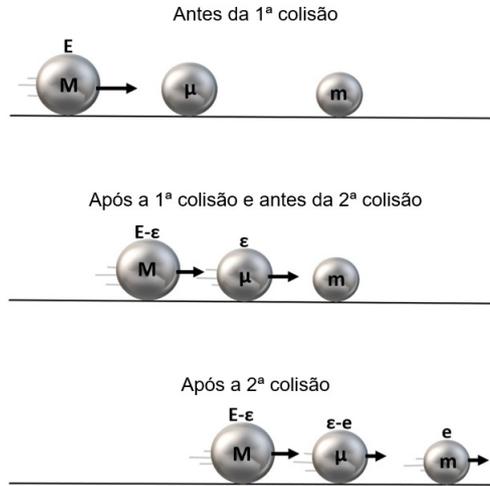


Figura 4: Antes da 1ª colisão a esfera M tem energia E , enquanto as outras esferas estão em repouso. Após a 1ª e antes da 2ª colisão, M transfere para μ uma energia ϵ . Após a 2ª colisão, m recebe de μ uma energia e .

A razão entre η e a eficiência η_0 sem a partícula intermediária, dada pela equação (6), é

$$\frac{\eta}{\eta_0} = \left[\frac{2}{1 + \frac{(\mu^2 + mM)}{\mu(m + M)}} \right]^2. \quad (12)$$

A inserção da massa μ causa um aumento da eficiência desde que $\eta > \eta_0$, ou seja, que

$$\frac{(\mu^2 + mM)}{\mu(m + M)} < 1. \quad (13)$$

Isso implica em

$$\mu^2 - \mu(m + M) + mM < 0, \quad (14)$$

que pode ser escrita como

$$(\mu - M)(\mu - m) < 0. \quad (15)$$

A desigualdade (15) significa que $\mu - M$ e $\mu - m$ têm sinais opostos. Supondo

que $m < M$, isso implica em

$$m < \mu < M . \quad (16)$$

De forma mais geral, qualquer valor de μ entre m e M aumenta a eficiência da transferência de energia, não importando qual é a maior massa. Para esses valores de μ a terceira partícula é um casador de impedâncias na colisão.

O mesmo resultado pode ser obtido a partir da figura 5, que mostra o gráfico da parábola $(\mu - M)(\mu - m)$ encontrada na desigualdade (15). A região de valores negativos, que satisfaz essa inequação do segundo grau, está entre as raízes m e M .

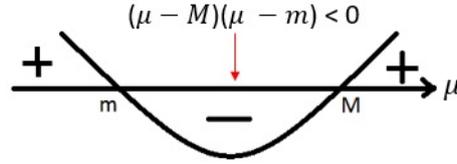


Figura 5: A função $(\mu - M)(\mu - m)$ assume resultados positivos para valores de μ inferiores a m ou superiores a M . Para valores de μ compreendidos entre m e M a função é negativa, satisfazendo a inequação (15).

Para identificar o valor de μ que promove o maior aumento na eficiência reescrevemos a equação (11), colocando-a na forma

$$\eta = \frac{16}{\left[x + \frac{1}{x} + \frac{M + m}{\sqrt{Mm}} \right]^2}, \quad (17)$$

onde definimos a quantidade x por

$$x = \frac{\mu}{\sqrt{Mm}} . \quad (18)$$

A maior eficiência é obtida quando o termo $x + 1/x$ assume o seu valor mínimo. Vamos definir a função

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad (19)$$

cujo gráfico está na figura 6. Esse gráfico indica que $f(x)$ tem um mínimo em $x = 1$, no qual a função vale $f(1) = 2$.

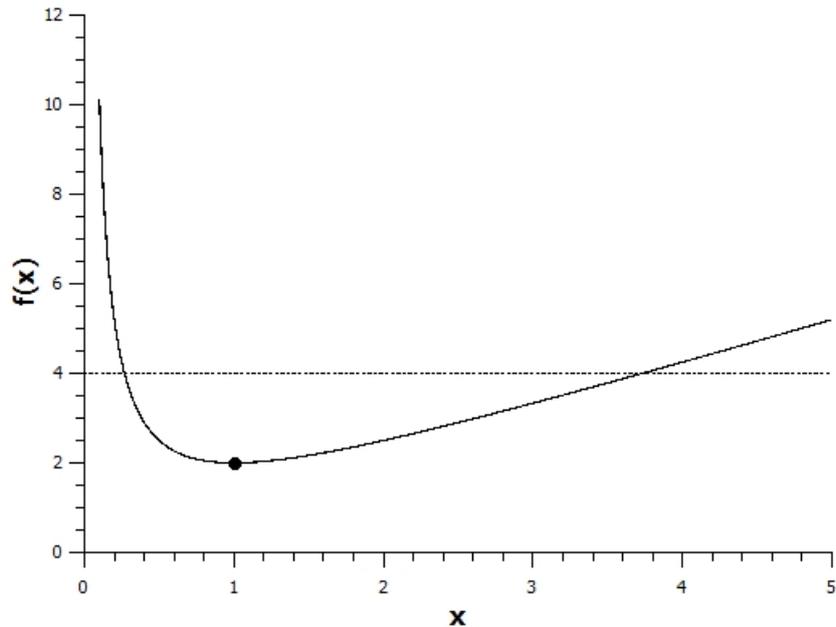


Figura 6: Gráfico de $f(x) = x + 1/x$. A função $f(x)$ tem um mínimo em $x = 1$, onde vale $f(1) = 2$. As raízes de $f(x) = b$ são dadas pela interseção da curva com linhas horizontais, como mostrado no caso particular $b = 4$. O mínimo corresponde ao valor de b para o qual há apenas uma raiz.

Uma demonstração simples desse resultado pode ser feita notando que a equação $f(x) = b$ pode ter duas raízes, uma raiz ou nenhuma raiz, dependendo de b ser maior, igual ou menor que o mínimo de $f(x)$. Por exemplo, a linha horizontal na figura 6 indica a localização das duas raízes para o caso $b = 4$. As raízes são encontradas resolvendo a equação do segundo grau

$$x^2 - bx + 1 = 0, \quad (20)$$

ou seja,

$$x = \frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \quad (21)$$

onde $\Delta = b^2 - 4$ é o discriminante da equação. A raiz única corresponde ao

mínimo de $f(x)$. Nesse caso o discriminante é nulo, o que implica em

$$b = 2 \quad (22)$$

e

$$x = 1 . \quad (23)$$

Assim, a eficiência máxima é alcançada para $x = 1$. Pela equação (18) isso corresponde à massa intermediária

$$\mu = \sqrt{Mm} . \quad (24)$$

Em outras palavras, o melhor casador de impedâncias na colisão de um par de partículas é uma terceira partícula com massa igual à média geométrica das massas do par.

Substituindo $\mu = \sqrt{Mm}$ na equação (11) encontramos a eficiência da transferência de energia com esse casador de impedâncias,

$$\eta_{max} = \frac{16M^2m^2}{(\sqrt{Mm} + M)^2(\sqrt{Mm} + m)^2} , \quad (25)$$

um resultado que pode ser colocado na forma

$$\eta_{max} = \frac{16 m/M}{\left(1 + \sqrt{m/M}\right)^4} . \quad (26)$$

É importante lembrar que qualquer partícula de massa μ compreendida no intervalo entre m e M é um casador de impedâncias, pois aumenta a eficiência da colisão. A massa $\mu = \sqrt{Mm}$ não é a única a aumentar a eficiência, é apenas aquela para a qual esse aumento é máximo.

O gráfico de η_{max} como função de m/M está mostrado na figura 7. Vemos que o casamento das impedâncias não leva a eficiência a 100%, a não ser no caso trivial em que $m/M = 1$ (as massas são iguais) no qual, como já vimos, não há sequer necessidade do casador.

É possível aumentar a eficiência da transmissão de energia empregando

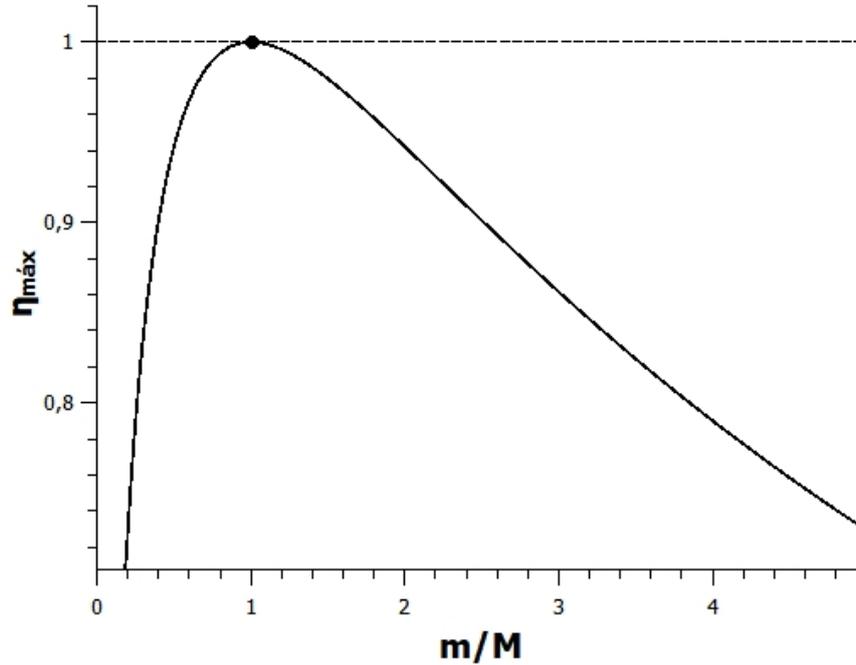


Figura 7: A eficiência máxima η_{max} da transferência de energia em função de m/M , no caso em que uma única partícula é o casador de impedâncias. Mesmo com esse casamento a eficiência não atinge 100%, a não ser no caso trivial de massas iguais, $m/M = 1$.

um casador mais eficaz. Para isso vamos considerar duas massas μ_1 e μ_2 , ao invés da massa μ , entre os mesmos projétil e alvo. Nessa nova configuração teremos três colisões elásticas sucessivas: $M \rightarrow \mu_1$, $\mu_1 \rightarrow \mu_2$ e $\mu_2 \rightarrow m$, respectivamente.

A eficiência da transferência de energia pode ser calculada estendendo o raciocínio que nos levou à equação (11). O resultado é o produto das eficiências de cada uma das colisões intermediárias (dadas pela equação (6))

$$\eta = \frac{4M\mu_1}{(M + \mu_1)^2} \cdot \frac{4\mu_1\mu_2}{(\mu_1 + \mu_2)^2} \cdot \frac{4\mu_2m}{(\mu_2 + m)^2}. \quad (27)$$

Para calcular a eficiência máxima produzida pelo casador de duas partículas basta notar que, por analogia com o caso anterior (uma partícula intermediária), a escolha $\mu_1 = \sqrt{M\mu_2}$ otimiza a transferência de energia de

M para μ_2 e a escolha $\mu_2 = \sqrt{\mu_1 m}$ faz o mesmo para a transferência de μ_1 para m . É fácil ver que, nesse caso, a razão entre as massas sucessivas é constante

$$\frac{\mu_1}{M} = \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{m}{\mu_2} = r, \quad (28)$$

onde chamamos de r essa constante. Da (28) temos que

$$r \cdot r \cdot r = \frac{\mu_1}{M} \cdot \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot \frac{m}{\mu_2} = \frac{m}{M}, \quad (29)$$

ou seja,

$$r = (m/M)^{1/3}. \quad (30)$$

Conhecendo o valor de r , as massas μ_1 e μ_2 são facilmente determinadas:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= rM, \\ \mu_2 &= r^2 M. \end{aligned} \quad (31)$$

A eficiência dada pela equação (27) pode ser então escrita como

$$\eta = \frac{64m/M}{(1 + \mu_1/M)^2 \cdot (1 + \mu_2/\mu_1)^2 \cdot (1 + m/\mu_2)^2}, \quad (32)$$

de modo que, juntando as equações (28), (30) e (32), obtemos que a eficiência máxima é dada por

$$\eta_{max} = \frac{64r^3}{(1 + r)^2 \cdot (1 + r)^2 \cdot (1 + r)^2}, \quad (33)$$

ou seja,

$$\eta_{max} = \frac{64m/M}{[1 + (m/M)^{1/3}]^6}. \quad (34)$$

A eficiência máxima obtida com o casador de duas partículas, eq. (34), é maior que a do casador de uma partícula, eq. (26), como mostra o gráfico da figura 8. Entretanto, como também podemos ver no gráfico, mesmo no caso de duas partículas a eficiência máxima ainda é inferior a 100% (com exceção do caso trivial $m = M$).

O caso geral, com n partículas como casadoras de impedâncias, pode ser

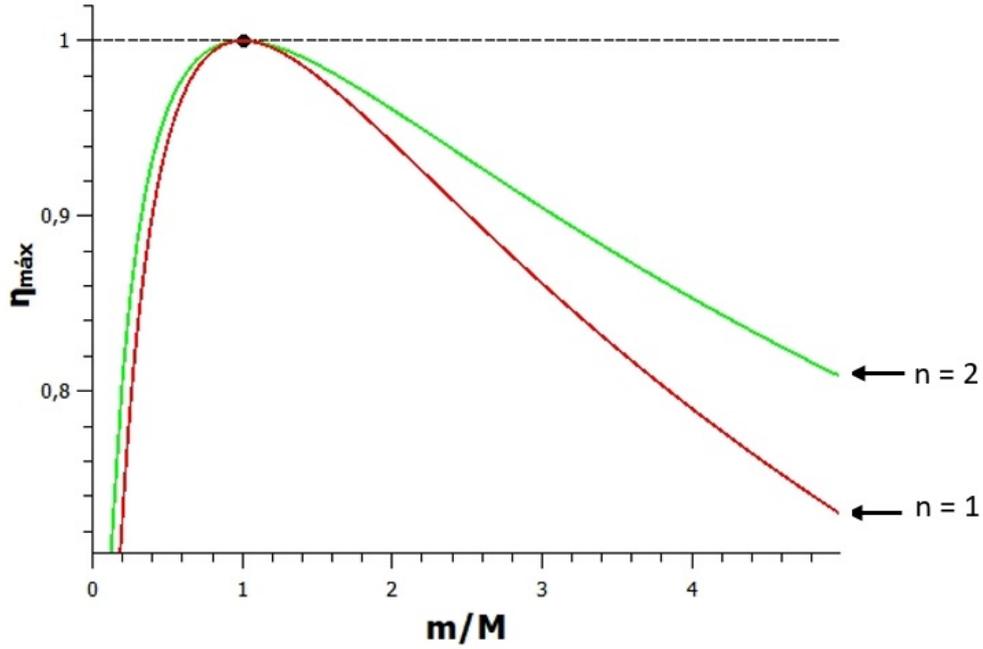


Figura 8: A eficiência máxima η_{max} da transferência de energia como função da razão de massas m/M , para casadores com uma e duas partículas. O casador com duas partículas é mais eficiente que o de uma.

analisado com o mesmo raciocínio utilizado para chegar às equações (26) e (34). Se as partículas intermediárias têm massas $\mu_1, \mu_2 \dots \mu_n$, a eficiência máxima será obtida escolhendo essas massas como

$$\begin{aligned}
 \mu_1 &= rM, \\
 \mu_2 &= r^2M, \\
 &\vdots \\
 \mu_n &= r^nM,
 \end{aligned}
 \tag{35}$$

onde

$$r = (m/M)^{1/(n+1)},
 \tag{36}$$

e portanto

$$\eta_{max} = \frac{2^{2(n+1)}m/M}{[1 + (m/M)^{1/(n+1)}]^{2(n+1)}}.
 \tag{37}$$

É fácil ver que para $n = 1$ e $n = 2$ a equação (37) recupera os resultados das eqs. (26) e (34). Mesmo para $n = 0$ a fórmula (37) ainda se aplica, reduzindo-se ao caso sem casador dado pela equação (6).

A figura 9 mostra a eficiência máxima para diferentes números de partículas intermediárias (inclusive $n = 0$). Podemos ver nos gráficos que a eficiência máxima cresce com n e se aproxima cada vez mais de 100%. Da equação (37) vemos que no limite de um casador de infinitas partículas a eficiência máxima seria $\eta_{max} = 100\%$ para qualquer valor de m/M .

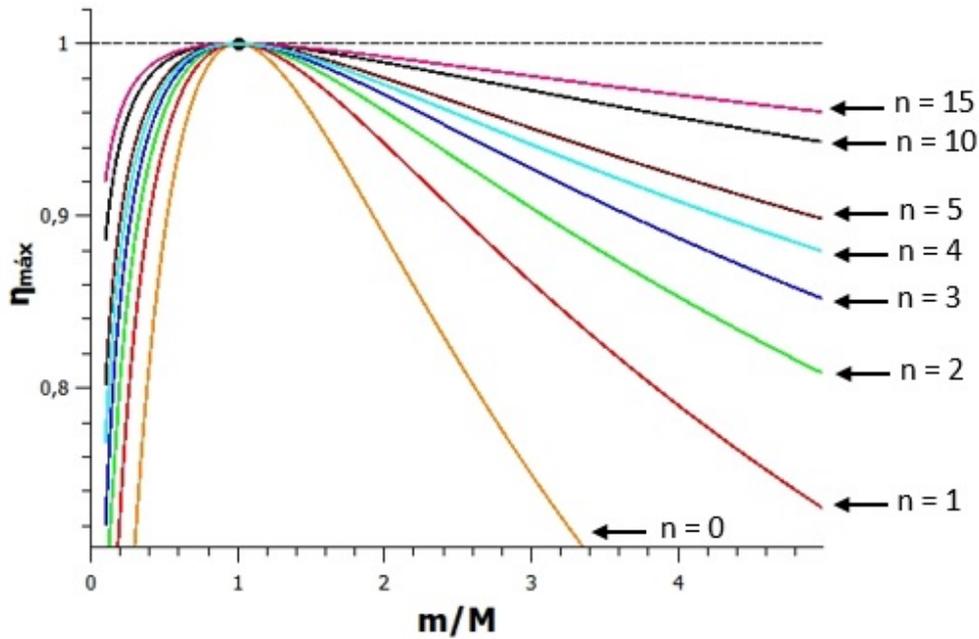


Figura 9: A eficiência máxima η_{max} da transferência de energia em função da razão de massas m/M para $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 10, 15$. A eficiência aumenta com o número de partículas intermediárias, tendendo a 100% quando $n \rightarrow \infty$.

É interessante discutir por que a energia tende a ser totalmente transmitida quando $n \rightarrow \infty$. A massa da primeira esfera no casador é, segundo as equações (35) e (36),

$$\mu_1 = M(m/M)^{1/(n+1)}. \quad (38)$$

De mesma forma, a massa da última (a n -ésima) esfera do casador é

$$\mu_n = M(m/M)^{n/(n+1)} = m(M/m)^{1/(n+1)}. \quad (39)$$

Quando $n \rightarrow \infty$, $\mu_1 \rightarrow M$ e $\mu_n \rightarrow m$. Isso significa que a impedância da primeira esfera tende a ficar casada à do projétil e a da última esfera à do alvo. Mais ainda, as impedâncias de esferas vizinhas dentro do casador também tendem a ficar iguais, já que das equações (35) e (36) obtemos

$$\frac{\mu_i}{\mu_{i+1}} = (M/m)^{1/(n+1)}, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (40)$$

e, portanto, $\mu_i/\mu_{i+1} \rightarrow 1$ quando $n \rightarrow \infty$. É por isso que a transferência de energia é completa quando o número de esferas intermediárias tende a infinito. O projétil perde toda sua energia ao colidir com a primeira esfera (pois ambas têm a mesma massa), essa energia passa de uma esfera para a seguinte ao longo do casador (pois a diferença de massas entre vizinhas tende a zero) e finalmente a última esfera transfere toda essa energia para o alvo (pois novamente a massa é igual).

Essa análise mostra que é útil atribuir *duas* impedâncias a um casador: a impedância de *entrada* e a impedância de *saída*. No caso que acabamos de discutir, a impedância de entrada é a massa da primeira esfera da sequência, μ_1 , e a impedância de saída é a massa da última esfera, μ_n . Se a impedância de entrada estiver casada à do projétil e a de saída à do alvo, a eficiência do casador é 100%.

Embora a transferência completa de energia seja possível apenas no limite $n \rightarrow \infty$, os conceitos de impedância de entrada e saída nos ajudam a compreender porque a eficiência aumenta quando colocamos mais esferas no casador: de acordo com as equações (38) e (39), à medida que n aumenta as impedâncias de entrada e saída se aproximam das impedâncias do projétil e do alvo, estabelecendo um casamento cada vez mais efetivo entre elas. Voltaremos a esse assunto mais à frente, na seção 3, quando discutirmos outro tipo de casador de impedâncias.

2 Experimentos com o casador de impedâncias

Nesta seção apresentaremos dois experimentos de colisão mecânica envolvendo o casador de impedâncias discutido na seção anterior. No primeiro experimento uma esfera desce uma rampa e colide com outra esfera, lançando-a para fora de uma mesa, conforme ilustrado na figura 10. O alcance da segunda esfera (o ponto onde ela toca o chão) é usado como medida da energia transferida na colisão. Com isso, o efeito da introdução de esferas intermediárias – o casador de impedâncias – pode ser observado. Dois métodos diferentes para medir o alcance serão discutidos.

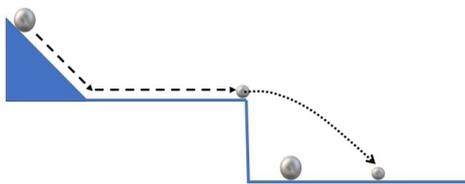


Figura 10: Esquema do experimento de colisão. Apenas a trajetória da esfera alvo é mostrada após a colisão.

No segundo experimento tomamos duas bolas de massas diferentes, colocamos a menor sobre a maior e em seguida deixamos o conjunto cair e quicar no chão, como representado na figura 11. Após o quique a bola pequena atinge uma altura bem maior que aquela de onde foi largada, indicando que houve uma transferência de energia da bola grande para ela. Como veremos, isso é resultado de um casamento de impedâncias.

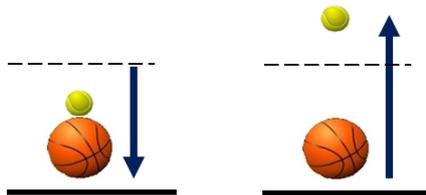


Figura 11: Esquema do experimento de queda de bolas empilhadas.

2.1 Experimento de colisão: análise com vídeo

Nesta subseção discutiremos o experimento com a rampa. Os dados foram obtidos a partir de gravações em vídeo analisadas com o programa *Tracker* [?, ?]. O programa foi usado para medir o alcance da esfera alvo e, conseqüentemente, a energia transferida. As massas das esferas projétil e alvo são $M = 111,5\text{g}$ e $m = 16,4\text{g}$, respectivamente. Como casadoras de impedâncias utilizamos esferas de massas 28,1g, 44,7g e 66,7g. Todas essas esferas são de aço, retiradas de rolamentos de veículos.

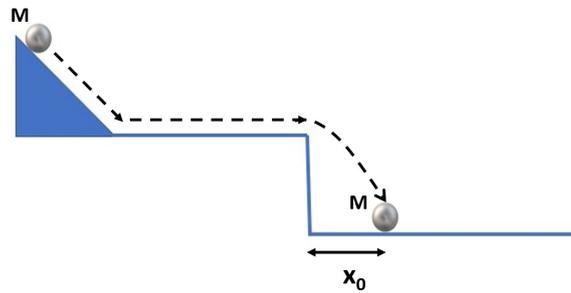


Figura 12: Experimento para determinar a energia da esfera projétil.

Na nossa primeira medida utilizamos apenas a esfera projétil (massa M), sem qualquer colisão. Como mostrado na figura 12, a esfera é solta no alto de uma rampa cuja base está sobre uma mesa, a uma dada altura do chão. Após descer a rampa a esfera desloca-se na horizontal por um curto período e em seguida cai da mesa, percorrendo uma distância horizontal x_0 até chegar ao chão. O objetivo desse experimento inicial é determinar a energia E do projétil. Medido o alcance x_0 , a velocidade U do projétil ao final da rampa será

$$U = \frac{x_0}{t} \quad (41)$$

onde t é o tempo de queda, dado por

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}}, \quad (42)$$

sendo y a altura de queda e g a aceleração gravitacional. Com isso a veloci-

dade inicial do projétil é

$$U = \sqrt{\frac{g}{2y}} x_0 \quad (43)$$

e a energia inicial é

$$E = \frac{1}{2}MU^2 = \frac{Mg}{4y}x_0^2. \quad (44)$$

A próxima etapa está esquematizada na figura 13. Ela envolve a colisão do projétil M com o alvo m , que está inicialmente em repouso sobre a base da rampa. Dessa vez medimos o alcance x da esfera alvo ao cair no chão. Um raciocínio análogo ao anterior mostra que logo após a colisão a velocidade v e a energia e da esfera alvo são determinadas por x e valem respectivamente

$$v = \sqrt{\frac{g}{2y}} x \quad (45)$$

e

$$e = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{mg}{4y}x^2. \quad (46)$$

Com isso, a razão entre a velocidade final do alvo e a inicial do projétil pode ser escrita como

$$\frac{v}{U} = \frac{x}{x_0} \quad (47)$$

e a eficiência da transferência de energia na colisão é dada por

$$\eta = \frac{e}{E} = \frac{m}{M} \left(\frac{x}{x_0} \right)^2. \quad (48)$$

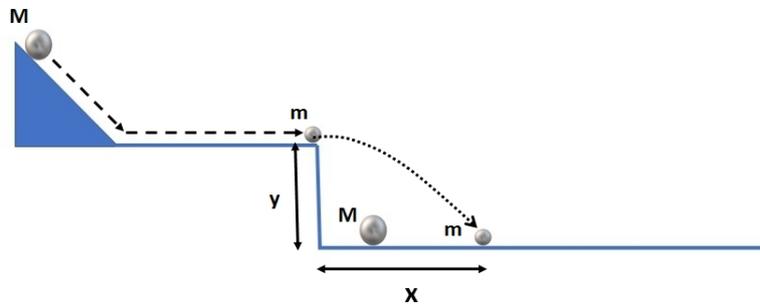


Figura 13: Colisão do projétil M com o alvo m .

A última etapa do experimento envolve a colocação de uma ou mais esferas como casador de impedâncias entre o projétil M e o alvo m . A figura 14 mostra a montagem com o casador de uma esfera. Chamando de x o alcance de m em colisões com um casador qualquer, a eficiência η da transferência de energia de M para m continua sendo dada pela equação (48); da mesma forma a razão v/U é dada pela equação (47). Essas equações mostram que um aumento da eficiência η corresponde a um aumento do alcance x .

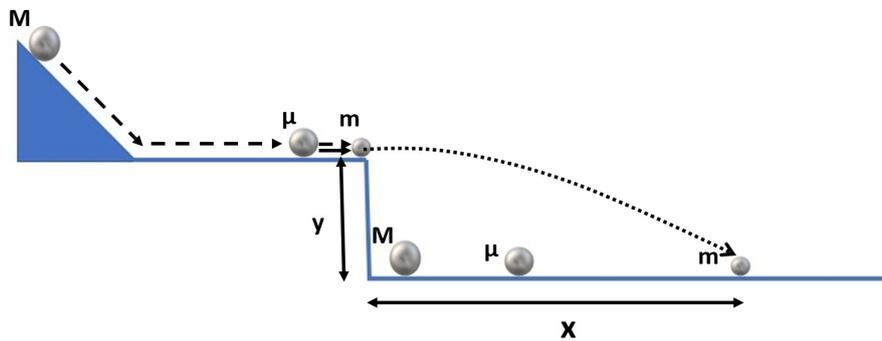


Figura 14: Colisão do projétil com o casador μ e do casador com o alvo m .

Os vídeos do experimento foram analisados no programa *Tracker*. No programa marcamos quadro a quadro a posição da esfera de interesse. O alcance x não foi definido pelo ponto em que a esfera atinge o chão, mas pelo ponto onde ela cruza uma régua horizontal colocada a uma distância $y = 40\text{cm}$ abaixo da mesa. Para determinar esse alcance traçamos uma parábola pelos pontos marcados nos quadros e determinamos o local em que a trajetória cruza a régua, como mostrado nas marcações feitas nas imagens da figura 15. Estabelecendo um sistema referência com origem no ponto onde a esfera começa a cair e utilizando o tamanho da régua para calibrar a escala de distâncias, determinamos (em centímetros) a distância horizontal entre a origem e o ponto de interseção com a régua. Essa distância é o valor de x .

Para o casador de uma esfera, a eficiência máxima da colisão é obtida com a massa $\mu = 42,8\text{g}$. No casador de duas esferas as massas ideais são $\mu_1 = 58,9\text{g}$ e $\mu_2 = 31,1\text{g}$ (ver as equações (35) e (36)). Como não encontramos esferas com essas massas ideais, utilizamos as massas mais próximas que tínhamos à disposição: $\mu = 44,7\text{g}$ para o casador de uma esfera e $\mu_1 = 66,7\text{g}$

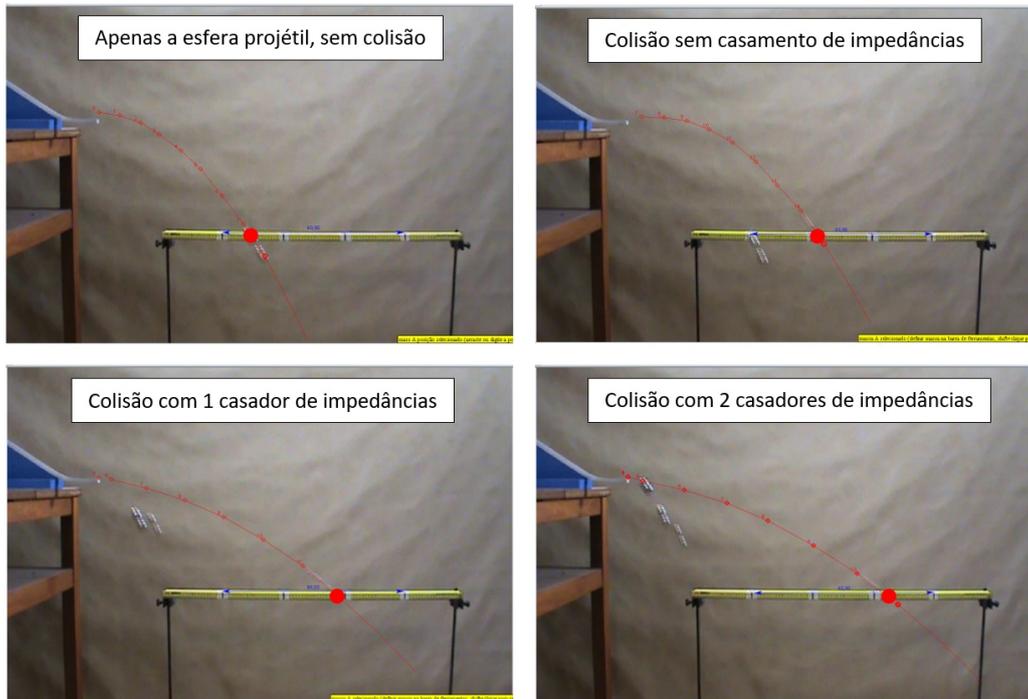


Figura 15: Imagens obtidas no *Tracker* nas etapas do experimento. Em cada uma das imagens está indicado o ponto em que a esfera cruza a régua.

e $\mu_2 = 28,1\text{g}$ para o de duas.

A tabela 1 apresenta os resultados das medidas de alcance nas três etapas do experimento: apenas o projétil, projétil-alvo e projétil-casadores-alvo. Para cada situação analisamos os vídeos que fizemos (dois ou três dependendo do caso) e calculamos a média dos valores encontrados. Vemos que, nos casos em que há colisão, o alcance médio de m aumenta com a inserção do casador de uma esfera e mais ainda com o de duas esferas. O mesmo resultado pode ser observado qualitativamente nas fotos mostradas na figura 15.

A tabela 2 mostra o número n de esferas no casador de impedâncias ($n = 0$ corresponde a nenhum casador), o alcance x , a razão x/x_0 e os valores de v/U e da eficiência η derivados dessa razão com auxílio das equações (47) e (48). Como esperado, a eficiência da transferência de energia e a a razão de velocidades aumentam com o número de esferas utilizadas no casador.

Esferas	Medidas (cm)			Alcance Médio (cm)
M	51,7	52,1	51,5	51,8
M→m	66,2	63,9	-	65,0
M→μ→m	79,8	78,5	81,0	79,7
M→μ₁→μ₂→m	84,9	87,4	-	86,1

Tabela 1: Resultado das medidas de alcance e suas respectivas médias. A primeira linha é o alcance x_0 do projétil M . As demais referem-se ao alcance x do alvo m , sem e com casadores de impedância.

Resultados				
n	x (cm)	x/x₀	v/U	η
0	65,0	1,3	1,3	0,23
1	79,7	1,5	1,5	0,35
2	86,1	1,7	1,7	0,41

Tabela 2: Os resultados do experimento. O número de esferas no casador é n . A razão x/x_0 é calculada com os resultados da tabela 1 e utilizada para obter a razão de velocidades v/U e a eficiência da transferência de energia η .

Os resultados da tabela 2 estão apresentados nos gráficos da figura 16, juntamente com os valores máximos correspondentes ao casamento “ideal” de impedâncias,¹ aquele que levaria à maior eficiência possível (ver equação 37). Os nossos resultados são menores que os máximos por, pelo menos, dois motivos: as colisões entre as esferas não são elásticas e os casadores usados não são os mais eficientes. Mesmo assim vemos que o efeito do casamento de impedâncias é claramente perceptível.

¹Como já mencionamos, as massas utilizadas no casador não foram as ideais. Entretanto as eficiências calculadas com as massas disponíveis, via eqs. (11) e (27), são muito semelhantes aos valores ideais.

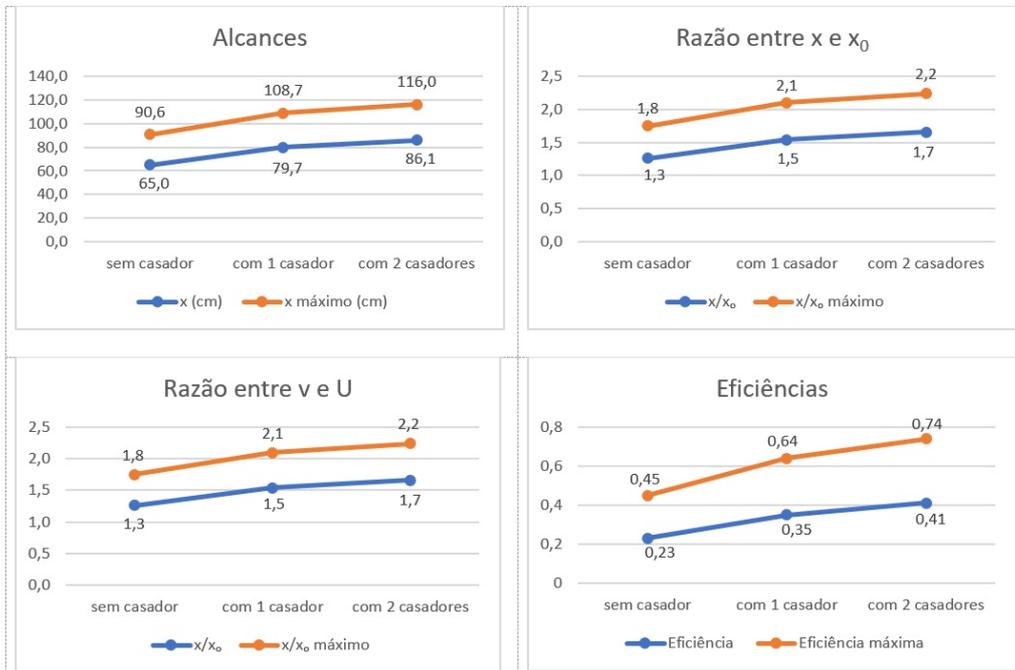


Figura 16: Gráficos dos resultados experimentais. Os valores máximos correspondentes a um casamento ideal de impedâncias também são mostrados.

2.2 Um método simples para medir o alcance

O experimento anterior envolve a gravação de um vídeo para posterior análise no computador. Existe uma forma mais simples e rápida, porém menos precisa, de medir o alcance da esfera alvo. Para isso colocamos uma sequência de caixas idênticas no chão, uma em contato com a outra e alinhadas com a trajetória das bolas, conforme mostrado na figura (17).

As caixas foram colocadas de tal forma que na colisão sem casamento de impedâncias a esfera alvo caísse nas primeiras caixas da fila. A partir daí, à medida que o alcance aumenta devido à inserção de casadores, a esfera alvo passa a cair dentro das caixas seguintes, cada vez mais afastadas da mesa onde ocorreu a colisão. Em nosso experimento utilizamos sete caixas de sapato com cerca de 13 cm de largura (o comprimento na direção do movimento das esferas). A cada colisão registramos a caixa onde caiu a esfera alvo. Essa medida do alcance foi repetida 20 vezes para cada número



Figura 17: As caixas utilizadas no experimento.

de casadores. Por exemplo, sem casamento a esfera alvo atingiu a primeira caixa 11 vezes e a segunda 9 vezes. Uma camada de isopor foi colocada no fundo das caixas para minimizar a possibilidade da esfera cair em uma delas e quicar para a seguinte. As caixas foram fixadas ao chão por uma fita adesiva dupla face e presas com cliques às suas vizinhas, para impedir deslocamentos durante a captura das esferas.



Figura 18: Frequência dos alcances da bola alvo, determinados pela caixa onde essa caiu. As cores identificam o número de casadores: 0, 1 e 2.

Os resultados obtidos com esse procedimento estão mostrados na figura 18. Vemos novamente que o casamento de impedâncias aumenta o alcance

da esfera alvo e que ganhos maiores são alcançadas com mais esferas casadoras. Embora a medida do alcance seja pouco precisa, isso não compromete a observação do efeito do casamento de impedância. A simplicidade da montagem e o fato dos resultados serem obtidos imediatamente, sem necessidade de análise posterior, tornam o método particularmente recomendado para uso em sala de aula.

2.3 Casamento de impedâncias em bolas quicando

O conceito de casamento de impedâncias pode ser usado para estudar um experimento muito interessante e fácil de realizar em qualquer sala de aula. Para isso basta tomar duas bolas de massas diferentes, colocar a menor sobre a maior e deixar ambas caírem de uma certa altura, como está representado na figura 11. Após quicarem no chão as bolas voltam a subir, mas a pequena atinge uma altura muito maior que aquela de onde foi largada. A observação desse efeito costuma surpreender os alunos e, como veremos, o ganho na altura é resultado do casamento de impedâncias entre a bola pequena e a Terra.

Para entender isso, vamos supor inicialmente que apenas a bola pequena, de massa m , foi deixada cair sobre o chão. Considerando a Terra como outra bola cuja massa é M , podemos imaginar que o quique da bola pequena no chão é uma colisão entre as massas m e M , o tipo de problema que temos analisado neste capítulo. Voltando à situação original, uma bola pequena e uma grande caindo sobre a Terra, fica fácil entender porque a bola pequena agora vai mais alto: a bola grande atua como um casador de impedâncias entre a pequena e a Terra.

Podemos analisar quantitativamente esse efeito aplicando os resultados de nossa análise de colisões, mas para isso é necessário fazer uma troca de referencial. Aqueles resultados foram obtidos considerando que o casador e o alvo estavam em repouso antes da colisão, mas isso não ocorre na presente situação: agora ambos têm velocidade $-V$ antes de atingir o chão (velocidades positivas são para cima). Para recuperar o caso já estudado devemos descrever a colisão em um referencial R que se move com velocidade vertical

– V em relação à Terra. Nesse referencial as bolas pequena e grande (o casador) estão em repouso no momento da colisão e a Terra tem velocidade V . Do ponto de vista do referencial R a Terra é um projétil que vai em direção a duas bolas em repouso, exatamente a situação que já analisamos.

Se v é a velocidade, *no referencial da Terra*, da bola pequena logo após o quique, em R essa velocidade é $v + V$. A eficiência da colisão no referencial R , portanto, é dada por

$$\eta = \frac{m(v + V)^2/2}{MV^2/2} = \frac{m}{M} \left(\frac{v}{V} + 1 \right)^2, \quad (49)$$

de modo que o ganho de velocidade da bola pequena no referencial da Terra é

$$\frac{v}{V} = \sqrt{\eta \frac{M}{m}} - 1. \quad (50)$$

Substituindo na equação acima a eficiência máxima dada pela equação (26) obtemos o ganho máximo de velocidade

$$\frac{v}{V} = \frac{4}{[1 + (m/M)^{1/2}]^2} - 1. \quad (51)$$

Como a massa da Terra é muito maior que m podemos tomar $m/M = 0$ e obter

$$\frac{v}{V} = 3, \quad (52)$$

ou seja, a velocidade da bola pequena após o quique é três vezes maior que a velocidade com que ela atinge o chão.²

O efeito do casamento de impedâncias é mais perceptível pelo aumento altura alcançada pela bola pequena. Se H_0 é a altura de onde as bolas foram soltas e H é a altura atingida por m após o quique, um pouco de cinemática mostra que

$$\frac{H}{H_0} = \left(\frac{v}{V} \right)^2 \quad (53)$$

²Como o casamento ideal de impedâncias só ocorrerá se a massa μ da bola maior for \sqrt{mM} , esse resultado parece inalcançável. Entretanto, é fácil mostrar que para valores razoáveis de m/μ já podemos chegar bem próximo do valor máximo (52). Por exemplo, para $m/\mu = 0,1$ encontramos $v/V = 2,6$.

e portanto, no caso ideal,

$$\frac{H}{H_0} = 9. \quad (54)$$

Esse resultado é o motivo da surpresa dos estudantes ao presenciarem uma demonstração desse efeito: a bola pode bater no teto da sala de aula.

Com o que já sabemos sobre casamento de impedâncias, podemos prever que a colocação de mais bolas entre m e o chão aumentará ainda mais o ganho de altura. Se deixarmos N bolas caírem, teremos o equivalente a $n = N - 1$ casadores de impedâncias entre a bola superior e a Terra. Substituindo na equação (50) a eficiência máxima para n casadores, dada por (37), encontramos

$$\frac{v}{V} = \frac{2^{(n+1)}}{[1 + (m/M)^{1/(n+1)}]^{(n+1)}} - 1. \quad (55)$$

Da mesma forma que anteriormente, tomando o limite $m/M \rightarrow 0$ obtemos

$$\frac{v}{V} = 2^{(n+1)} - 1, \quad (56)$$

ou ainda, em termos do número $N = n + 1$ de bolas em queda,

$$\frac{v}{V} = 2^N - 1. \quad (57)$$

Substituindo esse resultado na equação (53) obtemos o ganho na altura alcançada da bola superior:

$$\frac{H}{H_0} = (2^N - 1)^2. \quad (58)$$

Esse resultado mostra que a altura H cresce exponencialmente com o número de bolas. Com três bolas a altura máxima já é 49 vezes maior que a inicial.³

Nós realizamos experimentos com a queda de duas e três bolas e filmamos sua evolução. Não tentamos analisar esses vídeos quantitativamente; a magnitude do efeito é tão grande que sua simples observação já demonstra os aspectos principais.

³Novamente esse é um resultado ideal, do qual podemos nos aproximar diminuindo a razão entre massas sucessivas na pilha de bolas. Por exemplo, se essa razão for 0,1 obtemos $v/V = 5,4$ e $H/H_0 = 29$.

No primeiro experimento utilizamos uma bola de basquete e uma bola de tênis. As bolas foram empilhadas na vertical e soltas da altura do ombro. O resultado está na figura 19, que mostra dois quadros extraídos do vídeo. As imagens demonstram que a bola de tênis atingiu uma altura bem maior que a inicial (cerca de três vezes mais).



Figura 19: Queda de duas bolas, uma de tênis e outra de basquete. As imagens do vídeo mostram que a altura máxima atingida pela bola de tênis após o quique é cerca de três vezes maior que sua altura inicial.

No segundo experimento empilhamos uma bola de basquete, uma de tênis e uma de golfe, colocando fita dupla face na superfície de contato entre elas para melhor equilibrá-las. Novamente, o conjunto foi solto à altura do ombro. O resultado pode ser avaliado a partir dos dois quadros de vídeo mostrados na figura 20. A bola de golfe atingiu uma altura tão grande que não fomos capazes de filmar toda a sua trajetória; o segundo quadro mostra a bola ainda enquanto ela subia, logo antes de sair completamente do vídeo.

Os dois experimentos produzem efeitos surpreendentes, que atraem a atenção da maioria dos estudantes. A explicação a partir do conceito de impedância pode ser uma boa forma de introduzir esse tema em cursos introdutórios de física.

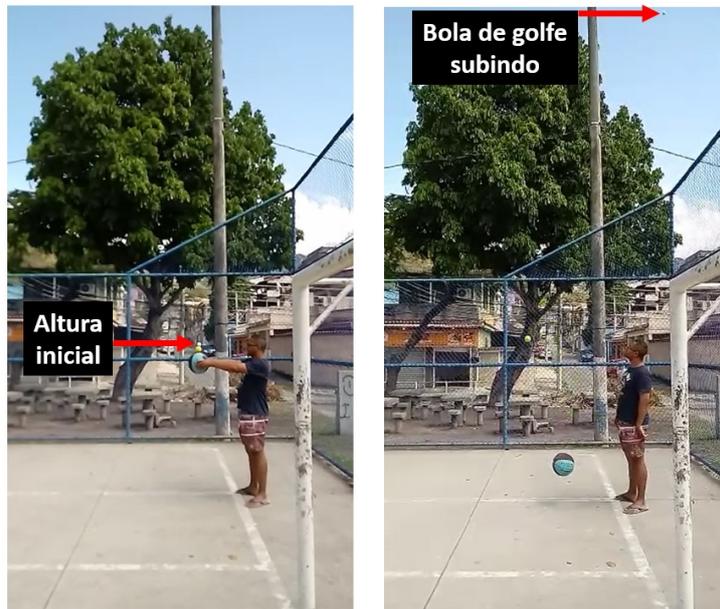


Figura 20: Queda de três bolas: de basquete, tênis e golfe. Após o quique a bola de golfe sobe tanto que sai do vídeo; o quadro à direita é o último a conter a bola.

3 Outro tipo de casador de impedâncias

Existem diferentes formas de se realizar um casamento de impedâncias. Nesta seção mostraremos como uma simples alavanca colocada entre o projétil de massa M e o alvo de massa m pode casar suas impedâncias.

O funcionamento desse casador-alavanca está descrito na figura 21. O projétil com velocidade U atinge a alavanca a uma distância L_1 do eixo de rotação. A alavanca, por sua vez, colide com o alvo que está a uma distância L_2 do mesmo eixo, colocando-o em movimento com velocidade v .

Vamos supor que o casamento de impedâncias seja perfeito, ou seja, a energia cinética do projétil é completamente transferida para o alvo. Nesse caso, na primeira colisão o projétil transmite toda sua energia à alavanca e fica em repouso. Na colisão seguinte a alavanca passa toda sua energia para o alvo e volta a ficar em repouso.

Na primeira colisão temos, pela conservação da energia e momento angu-

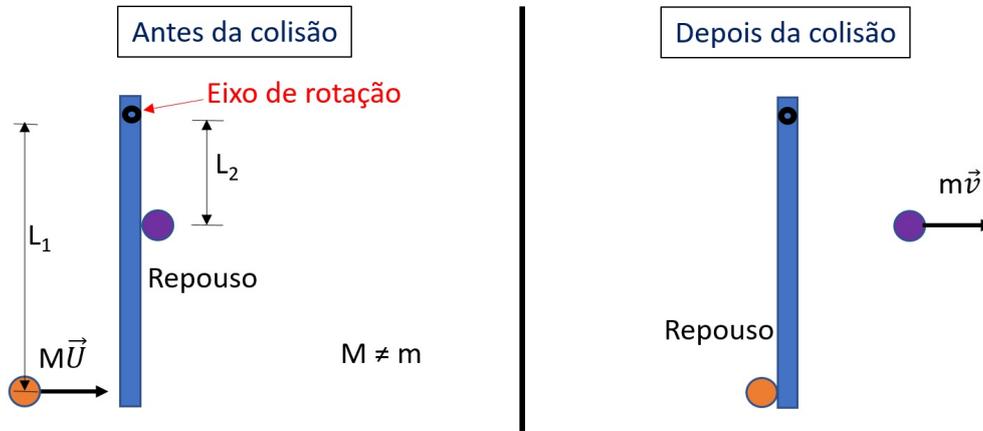


Figura 21: Casamento de impedâncias com uma alavanca. O diagrama à esquerda mostra o sistema projétil-alavanca-alvo antes da colisão. À direita vemos o sistema após a colisão.

lar, que

$$\frac{1}{2}MU^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (59)$$

e

$$MUL_1 = I\omega, \quad (60)$$

onde I é o momento de inércia da alavanca e ω é sua velocidade angular. Dividindo a equação (59) pela (60) encontramos que a velocidade da partícula projétil é

$$U = \omega L_1. \quad (61)$$

Substituindo a equação (61) em (59) ou (60) descobrimos que a distância L_1 para a qual toda a energia do projétil passa para a alavanca é

$$L_1 = \sqrt{\frac{I}{M}}. \quad (62)$$

Na segunda colisão, as mesmas leis de conservação conduzem a

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 \quad (63)$$

e

$$I\omega = mvL_2. \quad (64)$$

Como no caso anterior, encontramos que a velocidade final da partícula alvo é

$$v = \omega L_2 \quad (65)$$

e que

$$L_2 = \sqrt{\frac{I}{m}}, \quad (66)$$

é o ponto onde a alavanca deve colidir com o alvo de forma a transferir toda a sua energia. A razão entre os braços L_1 e L_2 é

$$\frac{L_1}{L_2} = \sqrt{\frac{m}{M}}, \quad (67)$$

que depende apenas das massas M e m .

Para entender melhor como a alavanca casa as impedâncias do projétil e do alvo, vamos retomar a discussão feita ao final da seção 1.2 e pensar na alavanca como um sistema com duas impedâncias: uma de entrada e outra de saída. A impedância de entrada é determinada pelo ponto onde o projétil atinge a alavanca e é definida por

$$\mu_1 = \frac{I}{\ell_1^2}, \quad (68)$$

onde ℓ_1 é a distância do ponto de impacto do projétil ao eixo de rotação. Da mesma forma, a impedância de saída é dada pelo ponto onde a alavanca atinge o alvo, sendo definida por

$$\mu_2 = \frac{I}{\ell_2^2}, \quad (69)$$

onde ℓ_2 é a distância do ponto de contato alavanca-alvo ao eixo de rotação. Se a impedância de entrada estiver casada à impedância do projétil teremos

$$\mu_1 = M \quad (70)$$

e portanto

$$\ell_1 = L_1, \quad (71)$$

ou seja, como já vimos, o projétil transferirá toda sua energia à alavanca. Da mesma forma, se a impedância de saída estiver casada à impedância do alvo teremos

$$\mu_2 = m \quad (72)$$

e

$$\ell_2 = L_2, \quad (73)$$

e toda a energia da alavanca passará para o alvo.

Em princípio, esse casador de impedâncias permitiria a transferência de 100% da energia do projétil para o alvo. Na prática, a inelasticidade das colisões alavanca-esfera e a dificuldade de se ajustar as distâncias ℓ_1 e ℓ_2 a seus valores ideais L_1 e L_2 diminuem bastante a eficiência. Apesar dessas complicações o casador-alavanca produz um aumento significativo da energia transferida, como mostram os resultados experimentais que apresentaremos na próxima seção.

3.1 Experimentos com o casador-alavanca

A montagem do experimento com o casador-alavanca é semelhante à do primeiro experimento descrito neste capítulo: após descer uma rampa a esfera projétil colide com a esfera alvo, lançando-a para fora de uma mesa. A diferença é que com a introdução da alavanca o projétil e o alvo não estão mais alinhados, e sim colocados a distâncias L_1 e L_2 do eixo de rotação (ver a figura 21).

Para calcular L_1 e L_2 com as equações (62) e (66) precisamos conhecer o momento de inércia I . A alavanca que usamos foi feita de alumínio e tinha 30,5 cm de comprimento e massa 26,5 g. Uma foto dela está na figura 22.

O cálculo do momento de inércia foi realizado a partir das dimensões da alavanca, dadas na figura 23. O resultado foi $I = 5740 \text{ g cm}^2$, correspondente a um raio de giração 14,7 cm.

Assim como no primeiro experimento, a energia transferida à esfera alvo

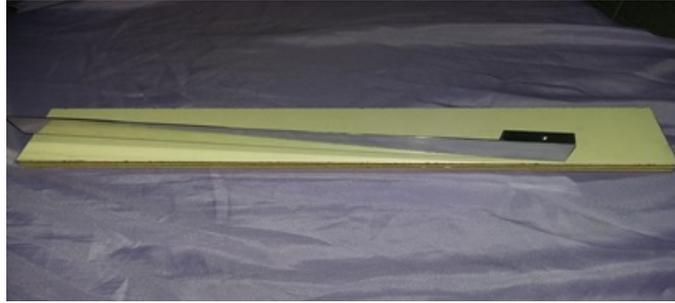


Figura 22: O casador de impedâncias construído com uma alavanca. Usamos uma barra de alumínio com um encaixe do mesmo material em uma de suas extremidades, por onde passa o eixo de rotação. O conjunto foi fixado a um pedaço de madeira.

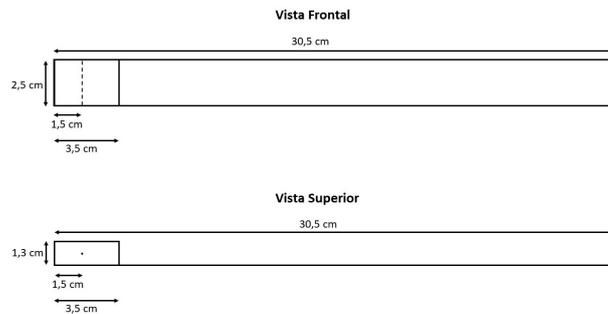


Figura 23: Desenho e dimensões da alavanca.

foi medida pelo seu alcance ao cair no chão. Optamos por usar o método de caixas para realizar essas medidas, devido à sua rapidez e simplicidade. Os resultados estão mostrados nos histogramas da figura 24. Sem o casador de impedâncias, a esfera alvo cai na terceira ou na quarta caixas (colunas escuras na figura 24). Com a alavanca a esfera passa a cair na quarta e quinta caixas (colunas claras), ou seja, mais à frente em média.

Mesmo que na prática a eficiência do casador-alavanca não seja 100%, seu estudo é interessante por mostrar que existem diversas maneiras de se casar impedâncias. Em particular, ele mostra que não é necessário realizar o casamento através da introdução de um sistema de impedância intermediária. Outras formas de casamento são possíveis.

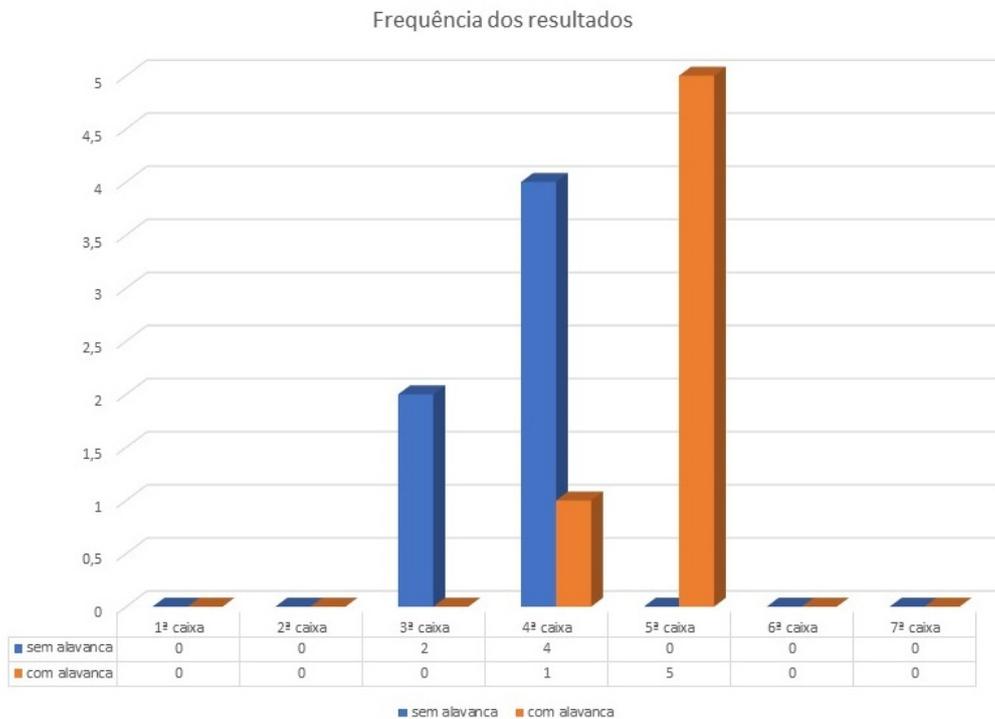


Figura 24: Alcance na colisão de duas esferas. Sem o casador de impedâncias a esfera alvo atinge a terceira ou quarta caixas (barras escuras). Com a inserção da alavanca ela chega à quarta e quinta caixas (barras claras).

4 Casamento de impedâncias em óptica

Neste capítulo vamos aplicar os conceitos de impedância e casamento de impedâncias desenvolvidos no contexto de colisões mecânicas a uma área completamente distinta: a óptica. Mais especificamente, estudaremos a transmissão de luz de um meio transparente para outro. Esse é um problema de considerável importância prática que, como veremos, pode ser analisado com auxílio de analogias ao que já fizemos na mecânica.

4.1 Transmissão de luz na interface entre dois meios

Vamos considerar dois materiais transparentes, com índices de refração diferentes n_1 e n_2 , em contato direto entre si. Se um feixe luminoso vindo de um dos materiais incidir na superfície que separa os dois meios, nem toda a

luz incidente passará para o outro lado – uma parte será refletida de volta, como ilustrado na figura 25. Esse é um fato familiar, frequente em nosso dia a dia. Ele se manifesta, por exemplo, quando olhamos para a vitrine de uma loja e vemos nossa imagem refletida superposta aos artigos em exposição.



Figura 25: Transferência de energia do meio 1 para o meio 2.

A passagem de luz de um meio para outro é um processo de transferência de energia entre dois sistemas. Apesar da luz ser um sistema físico muito diferente dos objetos mecânicos que estudamos até agora, veremos que boa parte do que já aprendemos pode ser aplicado à nova situação.

O problema é o mesmo de antes: é possível fazer com que mais luz passe de um meio para outro? Para encontrar a resposta com os métodos que empregamos no capítulo 1, o primeiro passo é identificar a grandeza física que desempenha o papel de impedância no caso da propagação da luz.

Sabemos que a luz será completamente transmitida de um meio para o outro se os dois índices de refração forem iguais: sem refração não haverá reflexão na interface.⁴ Como a máxima transferência de energia só deve acontecer para sistemas com impedâncias iguais, é natural associar a impedância “óptica” de um meio a seu índice de refração. Se chamarmos essa impedância de Z , somos tentados a escrever que $Z = n$. A definição usual, entretanto, não é essa e sim

$$Z = \frac{Z_0}{n} \quad (74)$$

onde, para materiais não-magnéticos, Z_0 é uma constante chamada “impe-

⁴Isso não é totalmente correto. Se a permeabilidade magnética dos dois meios for diferente haverá reflexão, mesmo com índices de refração iguais. Como quase todos os materiais transparentes à luz visível são não-magnéticos, sua permeabilidade é praticamente igual à do vácuo e não precisamos nos preocupar com essa complicação.

dância do vácuo” (já que é o valor de Z para $n = 1$). Para nossos propósitos essa diferença não é muito importante. O essencial é dispormos de uma relação entre Z e n tal que $Z_1 = Z_2 \iff n_1 = n_2$, ou seja, que nos permita identificar o casamento (e descasamento) de impedâncias. Como isso acontece nos dois casos, usaremos indistintamente os termos índice de refração e impedância.

Indo agora ao problema de como aumentar a intensidade da luz transmitida pela interface, nossa experiência com o casamento de impedâncias em colisões mecânicas sugere que coloquemos entre os dois meios um terceiro material, de índice de refração intermediário entre n_1 e n_2 . Esse arranjo está mostrado na figura 26 e é análogo ao que fizemos no capítulo 1 ao colocar um corpo de massa intermediária entre o projétil e o alvo.

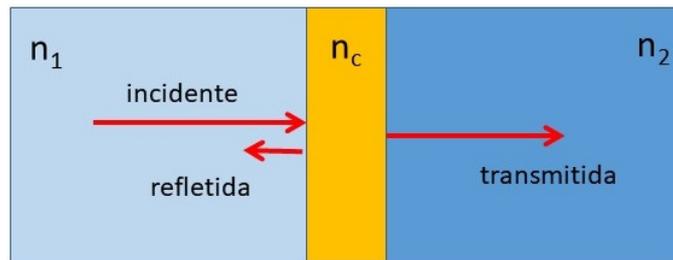


Figura 26: Casamento de impedâncias entre os meios 1 e 2. O material intermediário tem índice de refração n_c compreendido entre n_1 e n_2 .

Podemos testar essa ideia com um experimento simples: medir a transmissão de luz por uma placa de vidro comum. Como o índice de refração do vidro é 1,50 e o do ar é 1,00, podemos usar a água como casador de impedâncias, já que seu índice é 1,33. A fonte luminosa utilizada no experimento foi uma luminária de mesa e intensidade da luz transmitida pelo vidro foi medida com o luxímetro de um *smartphone*. Três situações foram estudadas: (1) vidro seco, (2) vidro com uma face molhada e (3) vidro com as duas faces molhadas. Também medimos o fundo luminoso, apagando a lâmpada, e a intensidade da luz incidente, removendo o vidro. Cada conjunto de medidas foi repetido três vezes. Todos os resultados estão mostrados na tabela 3.

A eficiência da passagem de luz pelo vidro é descrita pela razão entre a intensidade luminosa transmitida e a incidente, descontada a luminosidade

	Medida 1 (lux)	Medida 2 (lux)	Medida 3 (lux)
Fundo	89	75	66
Incidente	12378	10942	10954
Vidro seco	11290	9950	9968
1 face molhada	11435	10131	10132
2 faces molhadas	11701	10248	10260

Tabela 3: Medidas da intensidade luminosa. A primeira linha mostra a intensidade da luz de fundo e a segunda a da luz incidente. As linhas seguintes mostram a intensidade da luz transmitida pelo vidro quando esse está seco ou com uma ou ambas faces molhadas.

de fundo, dada por

$$T = \frac{\text{transmitida} - \text{fundo}}{\text{incidente} - \text{fundo}}. \quad (75)$$

A quantidade T é chamada *transmitância* e seu valor pode ser calculado com as medidas da tabela 3. Os resultados para cada um dos três conjuntos de medida e suas respectivas médias estão mostrados na tabela 4.

	T1	T2	T3	Tmédio
Vidro seco	0.911	0.909	0.909	0.910
1 face molhada	0.923	0.925	0.925	0.924
2 faces molhadas	0.945	0.936	0.936	0.939

Tabela 4: Fração da energia luminosa transmitida pelo vidro, nos casos em que esse está seco, com uma face molhada e com as duas faces molhadas. As três medidas da transmitância T e sua média em cada caso são mostradas.

Os valores (médios) de T dados na tabela 4 estão mostrados graficamente na figura 27. Vemos que colocar água sobre as faces do vidro realmente aumenta a transmissão da luz – a água atua como casador de impedâncias entre o ar e o vidro. O experimento também mostra que molhar as duas faces é melhor que molhar apenas uma. Isso casa as impedâncias ar-vidro nos dois lados da placa, facilitando ainda mais a passagem da luz.

É importante ressaltar que realizamos o experimento acima porque havíamos *previsto* que uma camada de água sobre o vidro aumentaria a transmissão de luz, e que essa previsão foi feita através de uma simples analogia entre

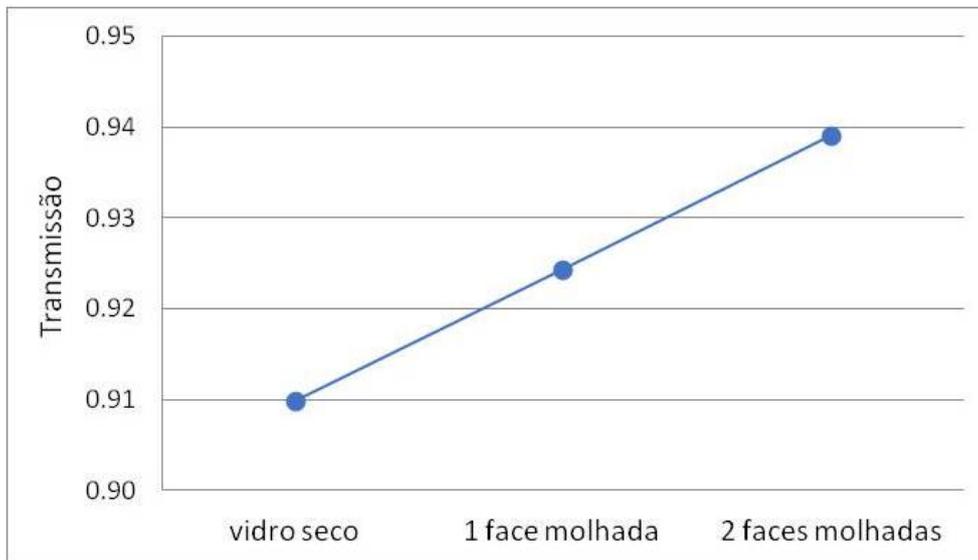


Figura 27: A taxa de transmissão da luz por uma placa de vidro para os três casos estudados: vidro seco, uma face molhada e duas faces molhadas.

o comportamento de um sistema óptico e um mecânico. Sem o conceito de impedância essa analogia não seria possível e a previsão do efeito se tornaria muito mais trabalhosa.