



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Física
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física
Mestrado Profissional em Ensino de Física
Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física



Impedância e a Analogia Eletro-Mecânica

Leonardo Rodrigues de Jesus
&
Carlos Eduardo Aguiar

Material instrucional associado à dissertação de mestrado de Leonardo Rodrigues de Jesus, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2019

Impedância e a Analogia Eletro-Mecânica

Leonardo Rodrigues de Jesus
Carlos Eduardo Aguiar

Sumário

1	Introdução	3
2	Analogia eletro-mecânica	3
3	Impedância na analogia eletro-mecânica	5
4	Impedância no domínio temporal	8
5	Impedância de linhas de transmissão	10
6	Casamento de impedâncias	14

1 Introdução

A noção de impedância teve origem no estudo de circuitos elétricos de corrente alternada. Posteriormente o conceito foi estendido e aplicado com sucesso a sistemas mecânicos, em particular à acústica e às vibrações de estruturas. A base dessa extensão é a analogia que pode ser feita entre circuitos elétricos e sistemas mecânicos, que será o principal objeto de discussão no presente texto. Com a analogia eletro-mecânica obteremos alguns dos resultados já encontrados na primeira parte deste trabalho,¹ como a relação entre impedância e massa em colisões de partículas. A discussão utiliza ferramentas matemáticas relativamente avançadas, como cálculo infinitesimal, números complexos, transformadas de Fourier e funções generalizadas. Consequentemente, o material aqui apresentado destina-se principalmente a leitores que desejem uma abordagem do conceito de impedância mais ampla e profunda que a apresentada anteriormente.

2 Analogia eletro-mecânica

Vamos considerar o circuito RLC em série mostrado na figura 1. A resistência, indutância e capacitância do circuito são R , L e C , respectivamente. A tensão fornecida pelo gerador depende do tempo e é dada por $V(t)$. Em geral, a corrente no circuito $I(t)$ e a carga no capacitor $Q(t)$ também dependerão do tempo. Pela lei das malhas de Kirchhoff, $V(t)$ é a soma das quedas de tensão em cada elemento do circuito, $V(t) = V_L + V_C + V_R$, onde $V_L = LdI/dt$, $V_C = Q/C$ e $V_R = RI$. Assim temos que

$$V(t) = L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} + RI . \quad (1)$$

¹*Impedância e Transferência de Energia em Mecânica e Óptica*, material instrucional associado à dissertação de mestrado de Leonardo Rodrigues de Jesus, disponível em https://www.if.ufrj.br/~pef/producao_academica/dissertacoes/2019_Leonardo_Jesus/material_didatico_1.pdf.

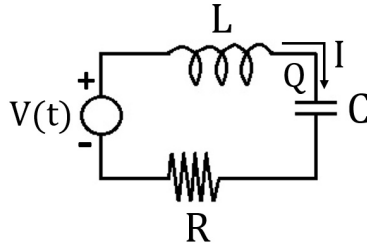


Figura 1: Circuito RLC em série.

Temos também que a carga elétrica no capacitor e a corrente no circuito estão relacionadas por

$$I = \frac{dQ}{dt}. \quad (2)$$

O circuito RLC tem comportamento análogo ao de um oscilador harmônico como o mostrado na figura 2. Aplicando a 2ª lei de Newton a esse oscilador obtemos

$$m \frac{dv}{dt} = f(t) - kx - bv \quad (3)$$

onde m é a massa do oscilador, k a constante elástica da mola, b o coeficiente de amortecimento e $f(t)$ uma força externa dependente do tempo. A velocidade do oscilador é $v(t)$ e sua posição em relação ao ponto de equilíbrio é $x(t)$.

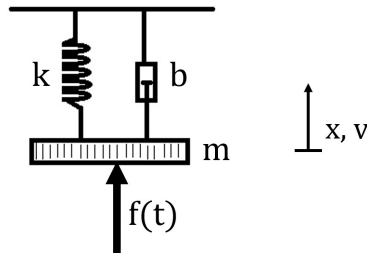


Figura 2: Oscilador harmônico sob ação de uma força externa $f(t)$. O oscilador é composto por um corpo de massa m , uma mola de constante elástica k e um amortecedor de coeficiente b .

A equação de movimento (3) pode ser escrita na forma

$$f(t) = m \frac{dv}{dt} + kx + bv \quad (4)$$

Circuito RLC	Oscilador mecânico
V	f
I	v
Q	x
L	m
$1/C$	k
R	b

Tabela 1: Equivalência eletro-mecânica.

que é matematicamente análoga à equação (1) do circuito RLC se fizermos as correspondências indicadas na tabela 1. Note que a correspondência também vale para a relação entre velocidade e posição do oscilador,

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad (5)$$

análoga à relação (2) entre corrente e carga no circuito.

Como veremos a seguir, essa analogia entre sistemas elétricos e mecânicos nos permite aproveitar na mecânica conceitos que são úteis na análise de circuitos elétricos.

3 Impedância na analogia eletro-mecânica

O conceito de impedância surgiu no estudo de circuitos como o da figura 1, quando a tensão $V(t)$ oscila com uma única frequência ω , ou seja,²

$$V(t) = V_0 e^{i\omega t}. \quad (6)$$

Ignorando efeitos transientes, tanto a corrente quanto a carga no capacitor oscilarão com a frequência ω , de modo que

$$I(t) = I_0 e^{i\omega t}, \quad (7)$$

$$Q(t) = Q_0 e^{i\omega t}. \quad (8)$$

²Como é usual no estudo desses circuitos, consideraremos que grandezas físicas como a tensão, corrente e carga serão descritas pela parte real de números complexos.

Como a corrente e a carga estão ligadas pela equação (2) temos também que

$$I_0 = i\omega Q_0 . \quad (9)$$

Substituindo as equações acima em (1) encontramos uma relação entre as amplitudes da tensão e corrente,

$$V_0 = \left(i\omega L + \frac{1}{i\omega C} + R \right) I_0 . \quad (10)$$

A impedância é definida como a razão entre as amplitudes da tensão e da corrente,

$$Z(\omega) = \frac{V_0}{I_0} , \quad (11)$$

que generaliza a lei de Ohm e a noção de resistência para circuitos de corrente alternada. Da equação (10) vemos que no circuito da figura 1 a impedância é

$$Z(\omega) = i\omega L + \frac{1}{i\omega C} + R , \quad (12)$$

que pode ser interpretada como a resultante da associação em série das impedâncias do indutor, $Z_L = i\omega L$, do capacitor, $Z_C = 1/(i\omega C)$, e do resistor, $Z_R = R$.

A analogia que encontramos entre o circuito RLC e o oscilador harmônico pode ser estendida ao conceito de impedância. Se a força externa sobre o oscilador tiver frequência ω , isto é, se

$$f(t) = f_0 e^{i\omega t} , \quad (13)$$

após o desaparecimento de transientes teremos que tanto a velocidade quanto a posição terão a mesma frequência,

$$v(t) = v_0 e^{i\omega t} , \quad (14)$$

$$x(t) = x_0 e^{i\omega t} . \quad (15)$$

Da relação (5) entre velocidade e posição temos também que

$$v_0 = i\omega x_0 . \quad (16)$$

Substituindo esses resultados na equação (4) obtemos

$$f_0 = \left(i\omega m + \frac{k}{i\omega} + b \right) v_0 . \quad (17)$$

Seguindo as correspondências eletro-mecânicas da tabela 1, vemos que é possível definir um análogo mecânico da impedância como a razão entre as amplitudes da força e da velocidade,

$$Z(\omega) = \frac{f_0}{v_0} , \quad (18)$$

Da equação (17) temos então que a impedância do oscilador harmônico é

$$Z(\omega) = i\omega m + \frac{k}{i\omega} + b . \quad (19)$$

Para uma partícula de massa m sobre a qual agem apenas forças externas (ou seja, para $k = b = 0$), a impedância mecânica é

$$Z(\omega) = i\omega m . \quad (20)$$

Em nossa análise de processos de colisão, feita na primeira parte deste trabalho (ver a nota de rodapé 1), vimos que a massa desempenhava o papel de impedância. Entretanto, a relação que encontramos, $Z = m$, não continha nem a frequência ω nem o número imaginário i encontrados na equação (20). A diferença deve-se basicamente à hipótese de que a força externa que atua sobre a massa oscila com frequência ω . Em uma colisão essa hipótese não é válida: a força sobre a massa é semelhante a um pulso rápido, não uma oscilação.

4 Impedância no domínio temporal

Para estudar a impedância em colisões mecânicas temos que adaptar os resultados anteriores, passando de uma força oscilatória $f(t) = f_0 \exp(i\omega t)$ para caso geral $f(t)$. Isso pode ser realizado através da transformada de Fourier, que relaciona o “domínio de frequência” ao “domínio temporal” pela transformação

$$f(t) = \int f_0(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (21)$$

cuja inversa é

$$f_0(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int f(t) e^{-i\omega t} dt . \quad (22)$$

Utilizando a equação (18) na transformação (21) obtemos

$$f(t) = \int Z(\omega) v_0(\omega) e^{i\omega t} d\omega . \quad (23)$$

A velocidade $v(t)$ está relacionada a $v_0(\omega)$ também por uma transformada de Fourier,

$$v(\tau) = \int v_0(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega , \quad (24)$$

cuja inversa é

$$v_0(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int v(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau . \quad (25)$$

Substituindo a equação (25) em (23) encontramos

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \iint Z(\omega) v(\tau) e^{i\omega(t-\tau)} d\tau d\omega \quad (26)$$

que pode ser escrita como

$$f(t) = \int z(t - \tau) v(\tau) d\tau \quad (27)$$

onde definimos a *impedância no domínio temporal*, $z(t)$, por³

³Para uma discussão da utilidade dessa definição, ver S. W. Rienstra, *Impedance models in time domain, including the extended Helmholtz resonator model*, Proceedings of the 12th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (2006), doi:10.2514/6.2006-2686 .

$$z(t) = \frac{1}{2\pi} \int Z(\omega) e^{i\omega t} d\omega . \quad (28)$$

Para o caso de uma partícula de massa m , já vimos que sua impedância no domínio de frequência é $Z(\omega) = i\omega m$. Portanto, no domínio temporal essa impedância é dada por

$$z(t) = \frac{m}{2\pi} \int i\omega e^{i\omega t} d\omega . \quad (29)$$

Como a transformada de Fourier da função delta de Dirac, $\delta(t)$, é

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int e^{i\omega t} d\omega \quad (30)$$

sua derivada pode ser escrita como

$$\delta'(t) = \frac{1}{2\pi} \int i\omega e^{i\omega t} d\omega , \quad (31)$$

de modo que, comparando (29) a (31), vemos que a impedância é dada por

$$z(t) = m\delta'(t) , \quad (32)$$

Esse é o resultado que buscávamos: no domínio temporal a impedância da partícula é caracterizada unicamente por um número real, a sua massa (a derivada da função delta define apenas o “instante da colisão”).

É interessante notar que esse resultado é equivalente à 2ª lei de Newton, pois substituindo (32) em (27) e utilizando as propriedades da função delta obtemos

$$f(t) = m \frac{dv(t)}{dt} . \quad (33)$$

O impulso transferido em uma colisão é $I = \int f(t) dt$. Com a 2ª lei de Newton vemos que $I = m\Delta v$, de modo que a massa (a impedância) da partícula pode ser escrita como

$$m = \frac{I}{\Delta v} , \quad (34)$$

ou seja, é a razão entre um “empurrão” e uma “velocidade”, forma muito

usada para definir impedância em diferentes contextos.

5 Impedância de linhas de transmissão

Um tipo importante de circuito elétrico, a linha de transmissão, ilustra a utilidade do conceito de impedância no estudo de processos de propagação da energia. A figura 3 mostra o esquema de uma linha de transmissão composta por uma sequência de indutores e capacitores. A variação da tensão e da corrente em uma ‘célula’ da linha é mostrada na figura 4.

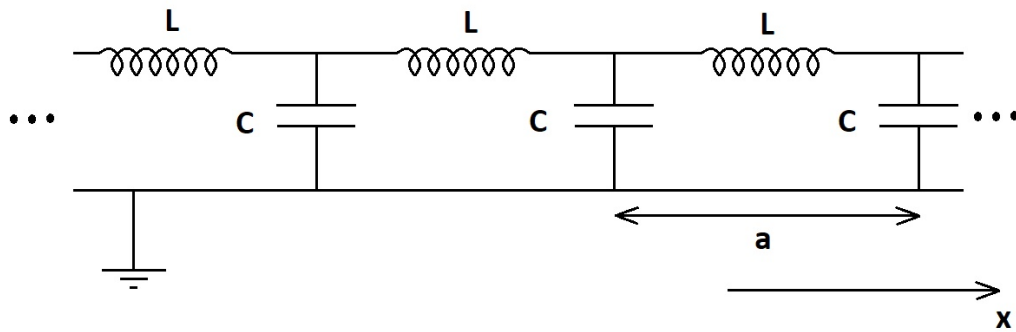


Figura 3: Linha de transmissão.

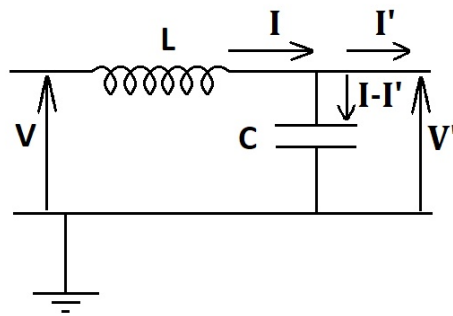


Figura 4: Variação da tensão e da corrente em uma célula da linha de transmissão.

Notando que $V - V'$ é a diferença de potencial no indutor L e que V' é

a tensão no capacitor C , temos que, para sinais de frequência ω ,

$$V - V' = i\omega LI , \quad (35)$$

$$I - I' = i\omega CV' . \quad (36)$$

Se a tensão e corrente não variam muito de uma célula para a seguinte, podemos aproximar as diferenças de tensão e corrente por derivadas e escrever que

$$\frac{dV(x)}{dx} = -i\omega \mathcal{L}I(x) , \quad (37)$$

$$\frac{dI(x)}{dx} = -i\omega \mathcal{C}V(x) , \quad (38)$$

onde $\mathcal{L} = L/a$ e $\mathcal{C} = C/a$ são a indutância e capacitância por unidade de comprimento (a é o comprimento de uma célula, como mostra a figura 3). Essas equações são conhecidas como *equações do telégrafo*.

Vamos procurar soluções das equações do telégrafo com a forma

$$V(x) = Ve^{-iqx} , \quad (39)$$

$$I(x) = Ie^{-iqx} . \quad (40)$$

Essas soluções correspondem a uma onda harmônica de número de onda q , pois, como os sinais tem frequência ω ,

$$V(x,t) = Ve^{i(\omega t - qx)} \quad (41)$$

$$I(x,t) = Ie^{i(\omega t - qx)} \quad (42)$$

Substituindo (39) e (40) nas equações do telégrafo encontramos

$$qV = \omega \mathcal{L}I , \quad (43)$$

$$qI = \omega \mathcal{C}V , \quad (44)$$

Combinando as equações (43) e (44) obtemos

$$\omega/q = \pm v_f \quad (45)$$

$$V/I = \pm Z_c \quad (46)$$

onde

$$v_f = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{L}\mathcal{C}}} \quad (47)$$

e

$$Z_c = \sqrt{\mathcal{L}/\mathcal{C}} \quad (48)$$

são, respectivamente, a *velocidade de fase* e a *impedância característica* da linha de transmissão. Também de (43) e (44) vemos que ω/q e V/I têm o mesmo sinal pois \mathcal{L} e \mathcal{C} são sempre positivos. Portanto:

1) Se a onda move-se no sentido positivo do eixo x :

$$\omega/q = +v_f \quad (49)$$

$$V/I = +Z_c \quad (50)$$

2) Se a onda move-se no sentido negativo do eixo x :

$$\omega/q = -v_f \quad (51)$$

$$V/I = -Z_c \quad (52)$$

Para uma superposição de ondas nos dois sentidos temos

$$V(x) = V^+ e^{-iqx} + V^- e^{iqx} \quad (53)$$

$$I(x) = I^+ e^{-iqx} + I^- e^{iqx} \quad (54)$$

onde os índices $+$ e $-$ referem-se a ondas movendo-se respectivamente nos sentidos positivo e negativo do eixo x . Com as relações entre V e I obtidas acima temos $I^+ = V^+/Z_c$ e $I^- = -V^-/Z_c$, de modo que podemos escrever $I(x)$ como

$$I(x) = \frac{V^+}{Z_c} e^{-iqx} - \frac{V^-}{Z_c} e^{iqx} \quad (55)$$

A impedância no ponto x será então

$$Z(x) = \frac{V(x)}{I(x)} = Z_c \frac{V^+ e^{-iqx} + V^- e^{iqx}}{V^+ e^{-iqx} - V^- e^{iqx}} . \quad (56)$$

Definido a *amplitude de reflexão* \mathcal{R} como

$$\mathcal{R} = \frac{V^-}{V^+} \quad (57)$$

o resultado acima pode ser colocado na forma

$$Z(x) = Z_c \frac{e^{-iqx} + \mathcal{R} e^{iqx}}{e^{-iqx} - \mathcal{R} e^{iqx}} = Z_c \frac{1 + \mathcal{R} e^{2iqx}}{1 - \mathcal{R} e^{2iqx}} . \quad (58)$$

Vemos que, no caso de ondas se propagando nos dois sentidos, efeitos de interferência fazem com que a impedância dependa da posição.

A potência elétrica que é transmitida por um ponto da linha é dada por

$$P(x,t) = \Re [V(x)e^{i\omega t}] \Re [I(x)e^{i\omega t}] \quad (59)$$

onde $\Re(a)$ é a parte real do número complexo a . A potência P pode ser escrita como

$$P(x,t) = \frac{1}{4} [V(x)e^{i\omega t} + V^*(x)e^{-i\omega t}] [I(x)e^{i\omega t} + I^*(x)e^{-i\omega t}] \quad (60)$$

$$= \frac{1}{2} \Re [V(x)I(x)e^{2i\omega t} + V(x)I^*(x)] \quad (61)$$

onde a^* é o conjugado complexo de a . A potência média ao longo de uma oscilação é então

$$\langle P(x) \rangle = \frac{1}{2} \Re [V(x)I^*(x)] , \quad (62)$$

que, com a definição de impedância, pode ser colocada na forma

$$\langle P(x) \rangle = \frac{1}{2} \Re [Z(x)] |I(x)|^2 . \quad (63)$$

Para uma onda harmônica progressiva, $I(x) = I e^{-iqx}$, $Z(x) = \pm Z_c$ é um

número real e, portanto, a potência média é

$$\langle P \rangle = \pm \frac{1}{2} Z_c |I|^2 . \quad (64)$$

Como antes, os sinais $+$ e $-$ correspondem à propagação nos sentidos positivo e negativo do eixo x .

Com a analogia eletro-mecânica, os resultados obtidos com a linha de transmissão elétrica podem ser usados para estudar ondas mecânicas. Vamos considerar o caso de uma cadeia massa-mola, uma sequência de partículas e molas como a mostrada na figura (5). As partículas têm massa m , a distância de equilíbrio entre elas é a e a constante elástica das molas é k .

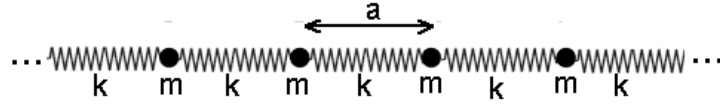


Figura 5: Linha de transmissão mecânica formada por massas e molas.

Usando as equivalências da tabela 1 temos que $\mathcal{L} = L/a \rightarrow m/a$ e $\mathcal{C} = C/a \rightarrow 1/(ka)$. Com isso, das equações (47) e (48) obtemos imediatamente que a velocidade de fase e a impedância característica da linha de transmissão mecânica são, respectivamente,

$$v_f = \sqrt{ka^2/m} , \quad (65)$$

$$Z_c = \sqrt{km} . \quad (66)$$

6 Casamento de impedâncias

Como vimos na primeira parte do trabalho (ver nota de rodapé 1), o conceito de impedância é muito útil na análise de processos de transferência de energia de sistema para outro. Isso se deve ao fato de impedâncias iguais (casadas) otimizarem essa transferência. Com as linhas de transmissão estudadas na seção anterior podemos verificar esse efeito. Para isso vamos considerar a junção de duas linhas de transmissão elétrica, 1 e 2, como mostrado na figura 6.

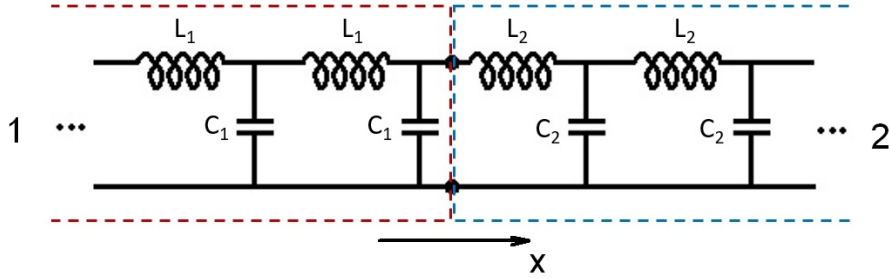


Figura 6: Junção de duas linhas de transmissão.

Uma onda movendo-se no sentido positivo do eixo x pela linha 1 incide sobre a junção, onde é parcialmente refletida e transmitida. Sem perda de generalidade podemos supor que a junção está localizada em $x = 0$. Como na linha 1 estão superpostas a onda incidente e a refletida, antes da junção temos, de acordo com a equação (58),

$$Z(x < 0) = Z_1 \frac{1 + \mathcal{R} e^{2iqx}}{1 - \mathcal{R} e^{2iqx}} \quad (67)$$

onde Z_1 é a impedância característica da linha 1. Já na linha 2 há apenas a onda transmitida através da junção, de modo que

$$Z(x > 0) = Z_2 \quad (68)$$

onde Z_2 é a impedância característica da linha 2.

Como $V(x)$ e $I(x)$ devem ser contínuos no ponto de junção, o mesmo deve acontecer com a impedância $Z(x) = V(x)/I(x)$. Isso significa que o valor de $Z(0)$ dado pelas equações (67) e (68) deve ser o mesmo, ou seja,

$$Z_2 = Z_1 \frac{1 + \mathcal{R}}{1 - \mathcal{R}}. \quad (69)$$

Resolvendo a equação acima para a amplitude de restituição encontramos

$$\mathcal{R} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}. \quad (70)$$

A parcela da energia incidente que é refletida na junção entre as linhas é

dada pelo *coeficiente de restituição* $\rho = |\mathcal{R}|^2$. Da equação (70) temos então que

$$\rho = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \right)^2. \quad (71)$$

A fração da energia incidente que passa para a linha 2 é dada pelo *coeficiente de transmissão* $\eta = 1 - \rho$. Com a equação (71) é fácil mostrar que

$$\eta = \frac{4Z_2Z_1}{(Z_2 + Z_1)^2}. \quad (72)$$

Se $Z_1 = Z_2$ dizemos que as impedâncias estão *casadas*. Nesse caso temos $\rho = 0$ e $\eta = 1$ e toda a energia incidente pela linha 1 passa para a linha 2, sem perda por reflexão.

É fácil ver que os mesmos resultados são válidos para a transmissão de ondas mecânicas como as tratadas ao final da seção anterior. Mais ainda, o coeficiente de transmissão (72) é semelhante ao obtido nas colisões de partículas analisadas na primeira parte do trabalho (ver nota de rodapé 1), onde as massas fazem o papel das impedâncias. Tudo isso demonstra a utilidade do conceito de impedância na análise dos mais variados processos de transferência de energia.