



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Física
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física
Mestrado Profissional em Ensino de Física

Uma proposta de sequência didática para ensino da relatividade geral no ensino médio

Edward Cespedes Carageorge

Tese de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Orientador: Carlos Augusto Domingues Zarro

Rio de Janeiro

Março de 2020

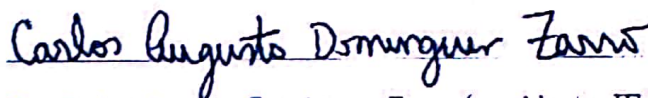
Uma proposta de sequência didática para ensino da relatividade geral no ensino médio

Edward Cespedes Carageorge

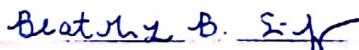
Orientador: Carlos Augusto Domingues Zarro

Tese de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

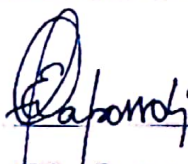
Aprovada por:



Dr. Carlos Augusto Domingues Zarro (presidente, IF-UFRJ)



Dra. Beatriz Blanco Siffert (UFRJ - Xerém)



Dr. Eduardo Folco Capossoli (Colégio Pedro II)

- C257p Carageorge, Edward Cespedes
 Uma proposta de sequência didática para ensino da relatividade geral no ensino médio / Edward Cespedes Carageorge - Rio de Janeiro: UFRJ/IF, 2020.
 xii, 161f.
 Orientador: Carlos Augusto Domingues Zarro
 Dissertação (mestrado profissional) - UFRJ / Instituto de Física / Programa de Pós-graduação em Ensino de Física, 2020.
 Referências Bibliográficas: f. 80-84.
 1. Ensino de física 2. Relatividade geral. 3. Ensino médio. 4. Princípio de equivalência. 5. Geometria Riemanniana. I. Zarro, Carlos Augusto Domingues. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Física, Programa de Pós-graduação em Ensino de Física. III. Uma proposta de sequência didática para ensino da relatividade geral no ensino médio.

Resumo

Uma proposta de sequência didática para ensino da relatividade geral no ensino médio

Edward Cespedes Carageorge

Orientador: Carlos Augusto Domingues Zarro

Resumo da Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários obtenção do título de Mestre em Física.

Neste trabalho, apresentamos uma proposta de sequência didática para ensino da relatividade geral no ensino médio. Sugerimos uma abordagem usando geometria Riemanniana em conjunto com os conceitos físicos como o princípio de equivalência. Esse trabalho está além do nível de divulgação científica, mas ainda acessível para alunos do ensino médio com alto desempenho em matemática e física. Fizemos a aplicação da proposta em quatro aulas para grupos de estudantes com alto desempenho pertencentes às três séries do ensino médio de uma escola particular no Rio de Janeiro. Analisamos ao final os resultados, que foram muito promissores e mostraram que os alunos gostaram das aulas e puderam aprender mais sobre fenômenos gravitacionais que não são apresentados nas aulas regulares.

Palavras-chave: Ensino de física; Relatividade geral; Ensino médio; Princípio de equivalência; Geometria Riemanniana.

Abstract

A didactic sequence proposal for teaching general relativity in high school

Edward Cespedes Carageorge

Supervisor: Carlos Augusto Domingues Zarro

Abstract Abstract of master's thesis submitted to Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, in partial fulfillment of the requirements for the degree Mestre em Ensino de Física..

In this work, we present a proposal for a didactic sequence for teaching general relativity in high school. We suggest an approach using Riemannian geometry along with physical concepts as the equivalence principle. This work is beyond the level of scientific outreach, but still accessible to high school students with high performance in mathematics and physics. We applied the proposal in four classes for groups of high performing students belonging to the three grades of high school in a private school in Rio de Janeiro. At the end we analyzed the results, which were very promising showing that the students enjoyed the classes and were able to learn more about gravitational phenomena that are not presented in regular classes.

Keywords: Physics Education; General relativity; High school; Equivalence principle; Riemannian geometry.

Agradecimentos

Sem fazer nada para merecer, tive a sorte de trabalhar e estudar ao longo da minha vida com pessoas mais talentosas que eu, e de poder roubar sua sabedoria para transmiti-la como se fosse minha. Carlos Zarro, meu orientador, foi uma pessoa importantíssima nesse trabalho por ter me ensinado física em um nível que eu não pensava ser capaz de aprender.

Também tenho uma dívida enorme com alguma divindade desconhecida por ter me dado pais maravilhosos que sempre me apoiaram e incentivaram para que eu fizesse dos estudos um meio de ganhar a vida.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Sumário

Sumário	vii
Lista de Figuras	x
1 Introdução	1
2 Princípios da Relatividade Geral	5
2.1 Princípio da equivalência	5
2.2 Desvio para o vermelho	9
2.3 Deflexão da luz em um campo gravitacional	12
3 Curvatura do espaço-tempo	16
3.1 Descrição da curvatura	17
3.1.1 Coordenadas	18
3.1.2 Geometria sobre uma esfera	21
3.2 Diagramas de espaço-tempo	23
3.2.1 Cones de Luz	24
3.3 O Princípio da Correspondência	28
3.4 Geodésica	30
3.4.1 Modelos de Setores	31
3.5 Equação de Einstein	34
3.6 Buracos Negros	35

3.7	Velocidade de Dobra Espacial	38
4	TRG na sala de aula	42
4.1	A dificuldade em ensinar TRG	42
4.2	Para quem ensinar?	44
4.3	Sequência Didática	45
4.4	Preparação das Aulas	45
4.5	Questionário	62
5	Relatos das aulas	66
5.1	Primeira aula	66
5.2	Segunda aula	68
5.3	Terceira aula	69
5.4	Quarta aula	71
5.5	Análise das respostas	73
5.6	Últimas impressões	74
6	Conclusão	76
A	Relatividade restrita	85
A.1	Transformações de Lorentz	85
A.2	Geometria de Minkowski	88
A.3	Projeção de Mapas	91
B	Questões de concursos abordando TRG	93
C	Princípios Físicos e Matemáticos da Teoria da Relatividade Geral	101
C.1	Princípios físicos da TRG	103
C.1.1	Princípio da equivalência	103
C.1.2	Desvio para o vermelho	107

C.1.3	Deflexão da luz em um campo gravitacional	110
C.2	Curvatura do espaço-tempo	112
C.2.1	Descrição da curvatura	113
C.2.2	Diagramas de espaço-tempo	118
C.2.3	O Princípio da Correspondência	121
C.2.4	Geodésica	122
C.3	Equação de Einstein	126
C.4	Buracos Negros	127
C.5	Velocidade de Dobra Espacial	130
D	Roteiro das aulas	133
D.1	Aula 01	136
D.2	Aula 02	147
D.3	Aula 03	157
D.4	Aula 04	166
E	Slides das Aulas	174

Lista de Figuras

2.1	Situação 1	9
2.2	Situação 2	9
2.3	Situação 3	10
2.4	Situação 4	10
2.5	Desvio para o vermelho gravitacional da luz ao se mover para cima em uma região com campo gravitacional	11
2.6	Deflexão gravitacional da luz	13
2.7	Deflexão gravitacional da luz passando próximo ao Sol	14
3.1	Modelo de espaços Euclidiano e Gaussiano	17
3.2	Representação do grande círculo numa esfera.	18
3.3	Representação de um triângulo sobre uma esfera	19
3.4	Diagrama de coordenadas Cartesianas e esféricas	20
3.5	Representação do elemento de linha em coordenadas esféricas	21
3.6	Diagrama espaço-tempo em duas dimensões	23
3.7	Linhas de mundo em um espaço-tempo bidimensional	24
3.8	Representação de um cone de luz tridimensional	26
3.9	Um diagrama espaçotemporal bidimensional	27
3.10	Um diagrama espaçotemporal bidimensional para demonstrar o desvio para o vermelho	28
3.11	O princípio da correspondência para a relatividade geral.	29

3.12	Modelo de seção de uma superfície esférica	32
3.13	Geodésicas no modelo setorial de uma esfera	33
3.14	Uma geodésica no modelo de setores do plano equatorial de um buraco negro	34
3.15	Cones de luz na vizinhança do raio de Schwarzschild	38
3.16	Cones de luz num espaço-tempo com velocidade de dobra	40
4.1	Objetivos específicos de aprendizagem.	46
4.2	Triângulos desenhados em um pedaço de papel	48
4.3	Um triângulo feito com três tiras de papel na superfície de um balão esférico	49
4.4	Trajectoria completa do urso no enigma	50
4.5	Geodésicas em uma esfera	51
4.8	Uma viagem com menor caminho entre dois pontos na mesma latitude. . .	52
4.9	Dois pontos em meridianos diferentes partindo do Polo Norte em direção ao Polo Sul.	53
4.10	Dois pontos em meridianos diferentes partindo do Polo Norte em direção ao Polo Sul num mapa plano representando a Terra.	53
4.11	Questão mostrando dois canhões atirando projéteis	54
4.12	Representação da trajetória dos projéteis vistas por um referencial em queda livre.	55
4.13	Representação de uma rotação de eixos	58
4.14	Malha de cones de luz bidimensional em um espaço de Minkowski.	59
4.15	Representação dos tipos de pontos num diagrama espaço-tempo.	62
4.6	Construção de uma geodésica em um modelo de setor	65
4.7	Duas geodésicas desenhadas no modelo de setores	65
A.1	Referencial \mathcal{S}' se movendo uniformemente com velocidade \vec{v} em relação a \mathcal{S} .	86
A.2	Trajectoria da luz em um relógio de luz	90
A.3	Projeção de Mercator	92

C.1 Situação 1	106
C.2 Situação 2	107
C.3 Situação 3	107
C.4 Situação 4	108
C.5 Desvio para o vermelho gravitacional da luz ao se mover para cima em uma região com campo gravitacional	108
C.6 Deflexão gravitacional da luz	110
C.7 Deflexão gravitacional da luz passando próximo ao Sol	111
C.8 Modelo de espaços Euclidiano e Gaussiano	112
C.9 Representação do grande círculo numa esfera	114
C.10 Representação de um triângulo sobre uma esfera	115
C.11 Diagrama de coordenadas Cartesianas e esféricas	116
C.12 Representação do elemento de linha em coordenadas esféricas	117
C.13 Diagrama espaço-tempo em duas dimensões	119
C.14 Linhas de mundo em um espaço-tempo bidimensional	119
C.15 Representação de um cone de luz tridimensional	121
C.16 O princípio da correspondência para a relatividade geral.	122
C.17 Modelo de seção de uma superfície esférica	124
C.18 Geodésicas no modelo setorial de uma esfera	124
C.19 Uma geodésica no modelo de setores do plano equatorial de um buraco negro	125
C.20 Cones de luz na vizinhança do raio de Schwarzschild	129
C.21 Cones de luz num espaço-tempo com velocidade de dobra	131
D.1 Sugestão para a divisão das aulas da sequência didática.	135
D.2 Triângulos desenhados em um pedaço de papel	137
D.3 Um triângulo feito com três tiras de papel na superfície de um balão esférico	138
D.4 Trajetória completa do urso no enigma	139

D.5 Situação 1	149
D.6 Situação 2	150
D.7 Situação 3	150
D.8 Situação 3	151

Capítulo 1

Introdução

A teoria da relatividade geral (TRG) é um dos maiores avanços na física do século XX, junto com a teoria da relatividade restrita (TRR) e a mecânica quântica [1]. Testada com grande precisão dentro do sistema solar, a teoria é muito bem fundamentada e é base para entendimento de muitos fenômenos astrofísicos e cosmológicos. Além disso, a TRG atrai interesse do público em geral¹, não apenas pela sua relevância em fenômenos exóticos como buracos negros e o início do universo, e sua apresentação nas mídias como, por exemplo, na série Jornada nas Estrelas (*Star Trek*) e no filme Interestelar (*Interstellar*). Além disso, temos concursos para ingresso no ensino superior que já trazem temas de TRG como desvio gravitacional da luz, matéria exótica, buracos negros, etc em suas provas de admissão².

Em um levantamento de dados feito com estudantes universitários [2], constatou-se que temas como a teoria da relatividade, a mecânica quântica e a astrofísica são os assuntos que mais influenciam na decisão de escolher a física como carreira. Em outro levantamento [3], constatou-se que um terço das crianças com cerca de 12 anos já havia ouvido falar em buracos negros e possuía uma razoável ideia do que se tratava. Um número considerável relacionava a Teoria do Big Bang com a origem do universo, e se mostrava intrigado por estes tópicos e queria saber mais a respeito.

¹Opinião do autor baseado em seus 10 anos de experiência como professor de física do ensino médio.

²Alguns exemplos são mostrados no Apêndice B.

Outras pesquisas indicam o interesse dos estudantes brasileiros em ciências, principalmente pelo seu contato com termos como *Einstein* e *Física Quântica* amplamente explorados pela mídia, porém com pouca discussão de conteúdos [2]. Isso desperta a curiosidade dos alunos pela física moderna e contemporânea. Esses resultados e os esforços por parte de diversos pesquisadores e professores de física resultaram na inserção de tópicos de física moderna e contemporânea nos livros de física no ensino médio [4]. Em outro levantamento feito em [2], já é possível perceber que conteúdos de relatividade, física quântica e astronomia estão presentes nos principais livros didáticos de física para o ensino médio, contudo nenhum deles apresenta a TRG com equações, trazendo apenas uma abordagem superficial ou histórico-filosófica. O único livro de ensino médio que encontramos abordando diretamente a TRG foi o Física Conceitual do Paul Hewitt [5], que dedica um capítulo inteiro a TRG. No entanto, apenas uma abordagem fenomenológica é realizada.

O caráter da inserção desses tópicos é, no entanto, o de uma pequena modificação dentro de um cenário maior: a modernização do currículo nacional, que altera não apenas os conteúdos abordados, mas os objetivos gerais da educação básica brasileira.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) já incluem temas de cosmologia e astronomia em sua grade curricular visando uma ampliação do conhecimento físico culturalmente significativo [6], contudo esses assuntos são raramente abordados nas aulas do ensino médio. Talvez se esse tema fosse mais cobrado nas provas de admissão ao ensino superior, o processo de inserção desse tema no ensino médio seria acelerado.

Mesmo após 100 anos da ideia revolucionária de Einstein em tratar a gravidade como um efeito geométrico, suas ideias continuam a inspirar progressos científicos e repercutem no nosso cotidiano como a tecnologia GPS³, presente em todos os telefones modernos, que depende da relatividade geral para funcionar. Apesar dessa relevância e popularidade, há poucas tentativas para levar esse tema para a sala de aula.

³Do inglês, *Global Positioning System* ou Sistema de Posicionamento Global

Apesar de ser uma tarefa hercúlea, devemos mostrar desde cedo aos nossos alunos as ideias da relatividade geral, pois elas nos trazem uma melhor descrição de como funciona o universo. Além disso, essa conquista serve como exemplo de que as leis da física não são absolutas. Elas evoluem de maneira não linear com o conhecimento, criatividade e novas ideias propostas pelos pesquisadores.

Ensinar como a relatividade geral superou a física clássica pode ajudar os estudantes a relacionarem física, história e filosofia. Eventualmente, com esse entendimento, o aluno pode adotar um conhecimento crítico para a natureza da ciência, sua abrangência e limitações. Além disso, precisamos de estudantes com paixão por física e que escolham perseguir uma carreira em ciências, pois a procura por esses cursos, bem como o número de alunos que os concluem é muito baixo. Pesquisas na Noruega e Austrália [7] mostraram que a relatividade geral pode agir como um catalisador para motivar os estudantes, pois eles ficam fascinados com ideias sobre buracos negros, buracos de minhoca e viagem no tempo. Nosso objetivo então será levar as principais ideias da TRG para um grupo de alunos do ensino médio.

“Einstein se tornou um ícone moderno e sua teoria tem o potencial de motivar crianças e jovens a se interessarem mais veementemente em física. Relatividade geral pode ser abstrata e desafiadora, mas ela desafia as jovens mentes a alcançar as estrelas e perceberem seu potencial” [7]

Apesar de todas as adversidades, como o despreparo dos professores e escassez de literatura sobre o tema, acreditamos que nosso trabalho apresentará benefícios nos desafios em ensinar relatividade geral no ensino médio. Esse trabalho não será definitivo, mas apresentará uma maneira de abordar tal tema avaliando alguns dos seus pontos fortes e fracos. Entretanto, é válido o esforço para a sociedade em abordar um tema tão importante quanto a relatividade geral.

A fim de alcançarmos um número maior de alunos, iremos gravar as aulas e disponibilizá-

las no *YouTube*⁴ através de um canal⁵ de propriedade do autor. Isso também fará com que outros profissionais possam assistir às aulas e usá-las como base para lecionar a TRG em suas próprias salas de aula. Mais uma vantagem, em relação às aulas presenciais, seria acréscimo de outros assuntos, sem precisarmos refazer um curso inteiro. Esse material também servirá ao professor que busca se aperfeiçoar em um tema tão escasso de literatura, cujo treinamento foi desviado da física Einsteiniana.

A estrutura da dissertação será a seguinte: no Capítulo 2 abordamos os princípios físicos da TRG. No Capítulo 3 apresentamos os elementos da geometria não Euclidiana que julgamos ser relevantes para exibir o paradigma da gravidade como geometria dentro da TRG. No Capítulo 4 apresentamos a criação do nosso produto educacional com a preparação das aulas e a descrição da dificuldade em ensinar esse tema no ensino médio. No Capítulo 5 descrevemos como foi a aplicação do produto em algumas turmas avaliando alguns dos seus pontos fortes e fracos. As conclusões foram apresentadas no Capítulo 6. No Apêndice A fizemos um pequeno resumo de relatividade restrita e a geometria de Minkowski como um texto auxiliar para alunos e professores. Apresentamos também no Apêndice B algumas questões gabaritadas de concursos de ensino médio, onde algum conteúdo relacionado à TRG foi explorado. Nos demais Apêndices apresentamos os materiais instrucionais dessa dissertação:

(i) Princípios da Teoria da Relatividade Geral - Texto de apoio para professores e alunos (Apêndice C).

(ii) Roteiro das aulas - Texto de apoio para professores (Apêndice D).

⁴<http://www.youtube.com>

⁵Prof Edward Física

Capítulo 2

Princípios da Relatividade Geral

Vamos abordar alguns dos princípios físicos que guiaram Albert Einstein na sua busca pela TRG.

“Há um grupo de pessoas que acham essa abordagem desnecessária, no entanto, eles [os princípios físicos] foram importantes para Einstein e nos ajudarão a entender como uma das maiores conquistas da humanidade surgiu.” [8]

Como nosso curso não envolve cálculo na sua forma mais avançada, começaremos com uma abordagem teórica dos principais conceitos. Apresentaremos os resultados matemáticos sem nos preocuparmos com seu formalismo, mas tentando diferenciá-los da mecânica clássica Newtoniana. Lembramos que a TRG é a mais poderosa ferramenta para descrevermos a interação gravitacional [9].

2.1 Princípio da equivalência

Para entendermos o significado desse princípio, lembremos do experimento de Galileu ao abandonar dois corpos com diferentes massas do alto da torre de Pisa e constatar que eles chegam simultaneamente ao solo. Essa é uma constatação de que a aceleração devido à ação gravitacional, nas vizinhanças da superfície da Terra, é a mesma para todos os corpos, independente de suas massas, formas ou composição. E pode ser ilustrado por um vídeo da BBC disponível no YouTube <https://youtu.be/E43-CfukEgs?t=169> em

que uma pena e uma bola de boliche são abandonados de uma mesma altura em uma câmara de vácuo e elas caem juntas no solo [10]. Esta mesma ideia é o que acontece com os astronautas em órbita, uma nave orbitando a Terra está em queda livre ao redor do planeta, juntamente com todos os corpos dentro da nave, por isso a tripulação parece estar flutuando, mas cada astronauta está em repouso em relação aos outros.

A massa inercial m_i de um corpo é a medida do seu coeficiente de inércia, ou seja, da sua resistência em ter seu estado de movimento alterado e corresponde ao termo que aparece na 2ª lei de Newton conforme a Eq. (2.1). A priori m_i não possui nenhuma relação com gravitação.

$$\vec{F} = m_i \vec{a}, \quad (2.1)$$

onde \vec{F} é a força resultante que atua no corpo e \vec{a} é a aceleração.

A força gravitacional por sua vez é outro tipo de força provocada em corpos que possuem uma *carga gravitacional*, denominada massa gravitacional passiva $m_{g(p)}$. Na lei da gravitação de Newton aparece um outro tipo de massa que é capaz de provocar forças em outros corpos, ou em termos modernos, ser fonte de campo gravitacional. Essa é a massa gravitacional ativa $m_{g(a)}$.

Considere um corpo 1 que *produz* uma força gravitacional $F_{1(2)}^{\vec{}}$ com sua massa gravitacional ativa $m_{g1(a)}$ e outro que sofre essa força por ter uma massa gravitacional passiva $m_{g2(p)}$, usando a lei da gravitação Newtoniana, temos:

$$F_{1(2)}^{\vec{}} = -G \frac{m_{g1(a)} m_{g2(p)}}{r_{1(2)}^2} r_{1(2)}^{\vec{}}, \quad (2.2)$$

onde $r_{1(2)}^{\vec{}}$ é o vetor que liga o centro de massa do corpo 1 ao do 2.

Analogamente a força gravitacional sobre o corpo 1 devido ao 2 $F_{2(1)}^{\vec{}}$ deve ser escrita como:

$$F_{2(1)}^{\vec{}} = -G \frac{m_{g2(a)} m_{g1(p)}}{r_{2(1)}^2} r_{2(1)}^{\vec{}}, \quad (2.3)$$

onde $r_{2(1)} = -r_{1(2)}$ é o vetor que liga o centro de massa do corpo 2 ao do 1. Mas sabemos, pela 3ª Lei de Newton, que $F_{2(1)} = -F_{1(2)}$, dessa forma:

$$m_{g1(a)}m_{g2(p)} = m_{g2(a)}m_{g1(p)} \Rightarrow \frac{m_{g1(a)}}{m_{g1(p)}} = \frac{m_{g2(a)}}{m_{g2(p)}}, \quad (2.4)$$

mostramos que razão entre as massas gravitacionais ativa e passiva é a mesma para quaisquer corpos. Logo, podemos tomar, sem perda de generalidade, essa constante como 1, obtendo uma única quantidade de massa gravitacional m_g

$$\frac{m_{g(p)}}{m_{g(a)}} = 1 \Rightarrow m_{g(p)} = m_{g(a)} = m_g. \quad (2.5)$$

No entanto, já era um fato conhecido pelos experimentos da queda livre de Galileu que a aceleração gravitacional \vec{g} nas proximidades da superfícies da Terra é a mesma para todos os corpos, assim podemos igualar a força gravitacional \vec{F}_g à força resultante \vec{F}_r :

$$\vec{F}_g = \vec{F}_r \Rightarrow m_i \vec{a} = m_{g(p)} \vec{g} \Rightarrow \frac{m_i}{m_{g(p)}} = \text{constante}, \quad (2.6)$$

podemos arbitrar essa constante como 1.

$$\frac{m_g}{m_i} = 1 \Rightarrow m_g = m_i. \quad (2.7)$$

Este resultado da Eq. (2.7) foi reconhecido por Isaac Newton como uma coincidência. Vários experimentos nos séculos XIX e XX mostraram a equivalência entre as massas com um erro menor que $10^{-12}\%$. Sendo esse um dos melhores resultados estabelecidos na física [11].

“Em 1907, Einstein teve ‘a ideia mais feliz de sua vida’: o princípio da equivalência. Para um observador em queda livre não há gravidade nas suas proximidades. Assim se ele abandonar um corpo qualquer, ele permanecerá em repouso para esse observador.” [8]

Essa propriedade surpreendente verificada pela mecânica clássica é o fato das forças gravitacionais serem proporcionais à massa inercial, assim como as forças de inércia. Assim, a gravidade não apenas pode ser eliminada por um referencial em queda livre, mas pode ser criada por uma aceleração. A ideia central de Einstein foi tratar a força gravitacional como uma força inercial.

“A grande vantagem do Princípio da Equivalência é que os efeitos produzidos por um campo gravitacional uniforme não precisam da teoria da gravitação [...] Tudo o que devemos fazer é supor que os sistemas considerados possuem aceleração em relação a um referencial inercial.” [12].

Vamos ilustrar essa equivalência do campo gravitacional uniforme com aceleração constante usando um experimento de pensamento¹. Seja um astronauta confinado em um foguete sem janelas nem meios de contato com outras pessoas. Ele possui uma bola, um cronômetro e uma fita métrica para realizar alguns experimentos simples. Vamos considerar quatro situações descritas abaixo e representadas pelas Figs. 2.1-2.4

- **Situação 1:** o foguete é colocado no espaço em um local infinitamente distante de quaisquer outros corpos. Os seus motores são ligados, fazendo-o acelerar para cima com aceleração constante de módulo g . Quando o astronauta abandona a bola, ele percebe que ela cai em direção ao solo como aceleração g .
- **Situação 2:** os motores do foguete são desligados, então ele segue com velocidade constante. Quando o astronauta abandona a bola, ela permanece parada em relação a ele.
- **Situação 3:** o foguete é trazido para superfície da Terra. Desprezando os efeitos de rotação, um corpo abandonado irá cair em direção ao solo da nave com aceleração constante de módulo g .

¹*Gedankenexperiment*, do alemão.

- **Situação 4:** por último, o foguete é abandonado caindo livremente sob ação do campo gravitacional uniforme, próximo à superfície da Terra, em direção ao centro do planeta. Um corpo abandonado permanece em repouso em relação ao astronauta que também está caindo junto da nave.

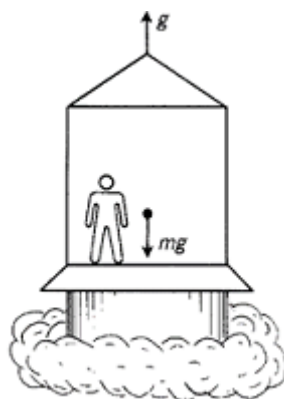


Figura 2.1: Situação 1: O astronauta abandona um corpo dentro de um foguete acelerado para cima com aceleração de módulo g . Disponível em [13].

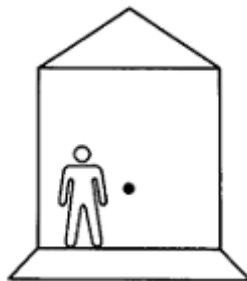


Figura 2.2: Situação 2: O astronauta abandona um corpo dentro de um foguete sem aceleração. Disponível em [13].

Claramente, do ponto de vista do astronauta, as situações **1** e **3** são indistinguíveis. Assim como **2** e **4**. Vamos usá-los para traçar argumentos que nos levem aos conceitos do espaço não plano, ou seja, curvo. Mas vamos deixar isso para o Capítulo 3.

2.2 Desvio para o vermelho

Outro experimento de pensamento no qual Einstein aplicou o princípio de equivalência foi no desvio para o vermelho (*redshift*).

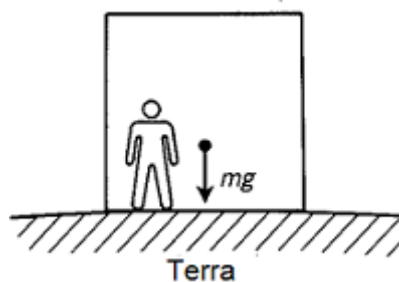


Figura 2.3: Situação 3: O astronauta abandona um corpo dentro de um foguete posicionado na superfície da Terra. Disponível em [13].

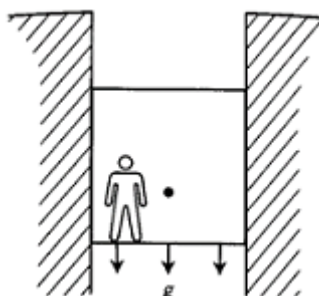


Figura 2.4: Situação 4: O astronauta abandona um corpo dentro de um foguete em queda livre próximo à superfície da Terra. Disponível em [13].

Considere a luz viajando de baixo para o topo de um foguete em constante aceleração de módulo a , como na Fig. 2.5. Deixe o referencial \mathcal{S} no ponto A na parte inferior da nave espacial e \mathcal{S}' no ponto B, na parte superior distante h . Quando a luz sai do ponto A, consideremos o foguete com velocidade nula em relação a outro referencial (a Terra, por exemplo), e vamos chamar Δt de tempo para a luz viajar para o ponto B. Supondo a velocidade da luz muito grande, podemos desprezar a variação da posição do foguete até que ela chegue na parte superior ($\Delta h \ll h$), sendo assim:

$$\Delta t = \frac{h + \Delta h}{c} \approx \frac{h}{c}. \quad (2.8)$$

Mas o Princípio da Equivalência nos diz que não há experimentos realizados em um pequeno espaço confinado que possa diferenciar um campo gravitacional uniforme de uma aceleração equivalente. Portanto, o mesmo fenômeno do desvio para o vermelho deve ser observado na Terra, se substituirmos o foguete por dois pontos em diferentes alturas na

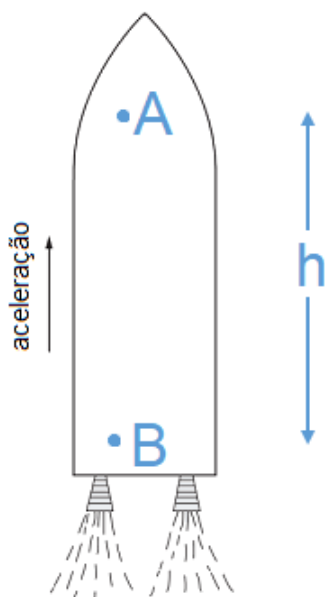


Figura 2.5: Desvio para o vermelho gravitacional da luz ao se mover para cima em uma região com campo gravitacional. Fonte: disponível em <http://homepage.physics.uiowa.edu>

Terra e a aceleração constante do foguete pelo campo gravitacional na Terra, de módulo g . Naquele mesmo intervalo de tempo, o foguete acelerado terá uma velocidade igual a:

$$v = g\Delta t = g\frac{h}{c}. \quad (2.9)$$

Usando a equação do efeito Doppler não relativístico e supondo o módulo da velocidade do foguete $v \ll c$, temos:

$$f' = f\frac{c-v}{c}. \quad (2.10)$$

Assim, teremos:

$$f' = f\frac{c - \frac{gh}{c}}{c} = f\frac{c^2 - gh}{c^2} \Rightarrow f' = f\left(1 - \frac{gh}{c^2}\right). \quad (2.11)$$

Identificando o potencial gravitacional $\Phi = gh$ próximo à superfície da Terra, temos que o período T' medido por \mathcal{S}' em relação ao período T de \mathcal{S} vale²:

²Usando a aproximação de Bernoulli $(1+x)^n \approx 1+nx$, $x \ll 1$.

$$T' = \frac{1}{f'} = \frac{1}{f \left(1 - \frac{\Phi}{c^2}\right)} = T \left(1 - \frac{\Phi}{c^2}\right)^{-1} \Rightarrow T' \approx T \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right). \quad (2.12)$$

Assim, \mathcal{S}' medirá um período maior para o sinal, dessa forma teremos uma frequência menor nesse referencial, por isso esse efeito é chamado de desvio para o vermelho gravitacional (*gravitational redshift*).

De outra maneira, podemos imaginar que esse sinal emitido possa ser usado para quantificar o tempo, por exemplo, dois sinais consecutivos são emitidos em um segundo. Assim quando um receptor está num potencial gravitacional maior que o emissor, os sinais são recebidos mais devagar do que são emitidos. Já quando um receptor está num potencial gravitacional menor que o emissor, os sinais são recebidos mais rapidamente do que são emitidos. Concluimos assim que os relógios passam mais devagar quando afetados pelo campo gravitacional mais intenso.

Há uma comprovação prática do desvio para o vermelho que é o experimento de Pound-Rebka [14] de 1959, uma medida do redshift feita na superfície da Terra com raios- γ emitidos do topo de um prédio até o solo. Não entraremos em detalhes sobre o experimento, mas ele foi realizado em uma distância de 22,5 m avaliando uma diferença de energia relativa entre o fóton emitido e recebido da ordem de $2,5 \cdot 10^{-15}$. O resultado confirmou as previsões da teoria da relatividade geral com uma precisão de 10%. Outros testes envolvendo hidrogênio [15] na década de 1980 aumentaram a precisão para 0,01%.

2.3 Deflexão da luz em um campo gravitacional

O poder do princípio de equivalência reside na sua aplicação a todas as leis da física. Consideremos o foguete em queda livre num campo gravitacional uniforme \vec{g} com uma fonte de luz F , emitindo um raio de luz perpendicular ao campo de acordo com a Fig. 2.6. Para o observador \mathcal{S}' , dentro do foguete, a luz viaja em linha reta e sai pelo orifício P. Entretanto para um observador externo \mathcal{S} , o raio luminoso descreverá uma parábola.

Portanto, há deflexão dos raios luminosos num campo gravitacional.

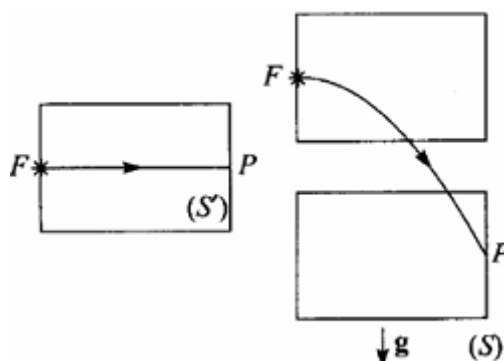


Figura 2.6: Deflexão gravitacional da luz. Uma fonte de luz em F emite um raio em direção a P, localizado em uma mesma altura de F. Na figura da esquerda, temos a trajetória da luz vista por um referencial solidário ao foguete: uma linha reta. Na direita, vemos a trajetória vista por um referencial externo ao foguete, para quem os efeitos do campo gravitacional são observados: uma parábola. Fonte: disponível em [11]

A existência da deflexão da luz exigida pela teoria foi comprovada fotograficamente durante o eclipse solar em maio de 1919 por duas expedições organizadas pela *Royal Astronomical Society*, uma delas à África e outra ao Brasil, sob a direção dos astrônomos Eddington e Crommelin³.

Cabe ressaltar que Einstein não foi o primeiro a propor que a luz pode sofrer um desvio na sua trajetória. Em 1801, Johhan von Sodner escreve um artigo em que desenvolve ideias Newtonianas de atração gravitacional para mostrar a influência da gravidade na trajetória de um raio luminoso [18]. Vamos fazer uma abordagem simplificada do problema, que será apresentada aos alunos como um desafio de mecânica.

Nesse método para calcular a deflexão da luz, assumimos, baseado na óptica Newtoniana, que a luz é um corpúsculo que sofre ação gravitacional como qualquer outro corpo, independente da sua massa. Essa aceleração gravitacional fará com que a luz adquira velocidade vertical devido à atração do Sol⁴, como exemplificado na Fig. 2.7. Portanto há uma deflexão ϕ no percurso desse raio luminoso, que pode ser calculado pela razão entre a velocidade vertical *adquirida* pela interação gravitacional e a velocidade da luz na

³Para mais detalhes recomenda-se [17].

⁴Essa abordagem Newtoniana não traduz exatamente a deflexão do raio de luz como veremos adiante.

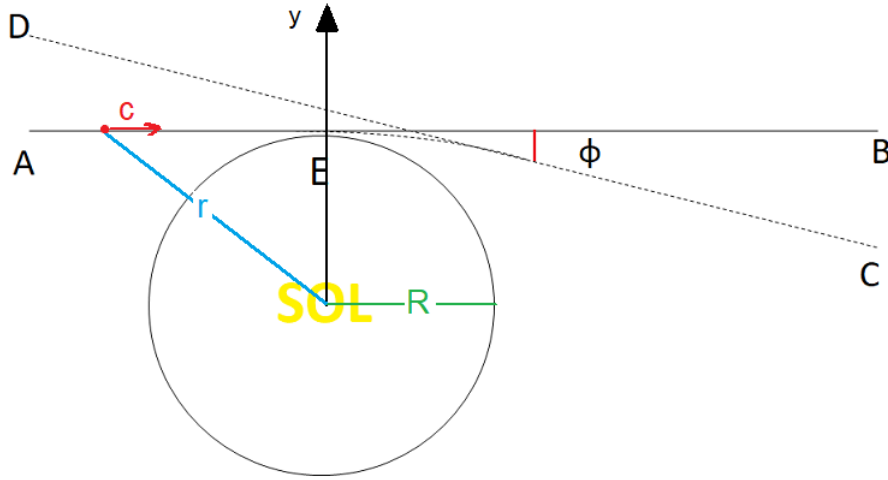


Figura 2.7: Deflexão gravitacional da luz passando próximo ao Sol. Um raio de luz vindo do infinito seguindo a trajetória de A para B, tangente ao Sol. Mas ao ser atraído pelo astro, com massa M e raio R , ele é defletido pela ação gravitacional e segue a trajetória para C, onde um observador pensa que a luz fora emitida do ponto D.

horizontal assim:

$$\tan \phi = \frac{v_y}{c}. \quad (2.13)$$

Usando a aceleração gravitacional, temos:

$$a = \frac{GM}{r^2}. \quad (2.14)$$

onde r é a distância do corpúsculo luz até o centro do Sol.

Somente a componente vertical será levada em consideração, pois na horizontal o ganho de velocidade será desprezado e a luz continuará com velocidade constante c

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} \Rightarrow v_y = \int_0^\infty \frac{GM}{cr^2} \cos(\theta) dy = \int_0^\infty \frac{GMR}{c(R^2 + y^2)^{3/2}} dy = \frac{2GM}{cR}. \quad (2.15)$$

Substituindo os dados no SI para um raio que tangencia o Sol $G = 6,7 \cdot 10^{-11}$, $M = 2,0 \cdot 10^{30}$, $R = 7,0 \cdot 10^8$ e $c = 3,0 \cdot 10^8$, temos:

$$\tan \frac{v_y}{c} = \tan \frac{2GM}{c^2 R} \Rightarrow \tan \phi = 0,87''.$$

Esse resultado é metade do valor previsto pela TRG, comprovada pelo Eclipse de 1919. Einstein atribui metade dessa deflexão ao efeito do campo Newtoniano de atração do Sol e a outra metade à curvatura apenas do espaço causada pela presença do Sol [19]. Quando esses efeitos são somados, temos o resultado previsto pela TRG.

Capítulo 3

Curvatura do espaço-tempo

A ideia central da relatividade geral é que a gravidade surge da curvatura do espaço-tempo, ou seja, gravidade é geometria.

“A ideia fundamental do Princípio da Relatividade Geral responde ao enunciado: Todos os sistemas de coordenadas Gaussianas são essencialmente equivalentes para a formulação das leis gerais da natureza. [...] E as propriedades geométricas do espaço não são independentes, senão que vêm condicionadas pela matéria. [...] Caberia imaginar que nosso mundo se comporta no aspecto geométrico como uma superfície que está irregularmente curvada mas que em nenhum ponto se aparta significativamente de um plano.” [19]

De maneira simplificada, imagine uma malha feita por varetas formando um quase contínuo espaço Euclidiano bidimensional. Se esse conjunto de varetas sofrer um aquecimento desigual, ou seja, cada uma se dilatar de uma maneira especial, teremos um modelo de um espaço não-Euclidiano ou Gaussiano como mostrado na Fig. 3.1.

Como já falamos no princípio de equivalência, apenas no campo gravitacional todos os corpos realmente se movem da mesma maneira dadas as mesmas condições iniciais. A ideia de Einstein foi que a unicidade desses percursos poderia ser explicada em termos de uma geometria quadridimensional, denominada espaço-tempo¹. Dessa forma, os corpos

¹Do inglês *spacetime*.

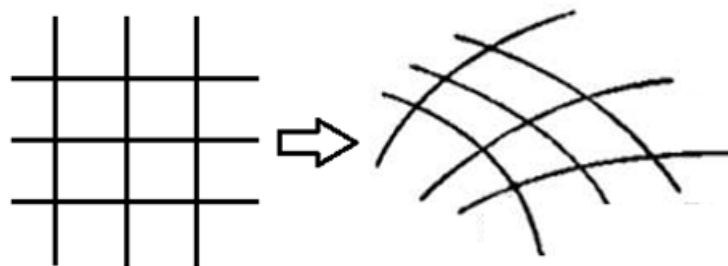


Figura 3.1: Modelo de espaços Euclidiano e Gaussiano. Na esquerda, temos uma malha representando o espaço Euclidiano (plano), em que todos os pontos adjacentes são equidistantes entre si. Na direita, temos um espaço curvo qualquer, em que a distância entre pontos adjacentes dependem da sua posição. Fonte: adaptado de [19].

se moveriam em trajetórias *retilíneas*² nesse espaço-tempo curvo.

3.1 Descrição da curvatura

A descrição geométrica pode ser facilmente ilustrada em duas dimensões. Na geometria Euclidiana, por exemplo, temos que a soma dos ângulos internos α_i de um triângulo vale:

$$\Sigma(\alpha_i) = \pi. \quad (3.1)$$

Outra relação define a razão entre o comprimento C da circunferência com seu raio r dada por:

$$\frac{C}{r} = 2\pi. \quad (3.2)$$

Veremos agora um exemplo de geometria espacial não-Euclidiana sobre uma superfície esférica de raio R para ilustração de uma diferente geometria bidimensional. Primeiro vamos aprender a desenhar uma linha reta nessa esfera. A definição continua a mesma do espaço Euclidiano, menor distância entre dois pontos distintos. Mas como somos obrigados a permanecer sobre a superfície da esfera, essa menor distância estará sobre um *grande círculo*, uma circunferência traçada entre os dois pontos e o centro dessa esfera, como representado na Fig. 3.2.

²Mais tarde definiremos melhor esse conceito.

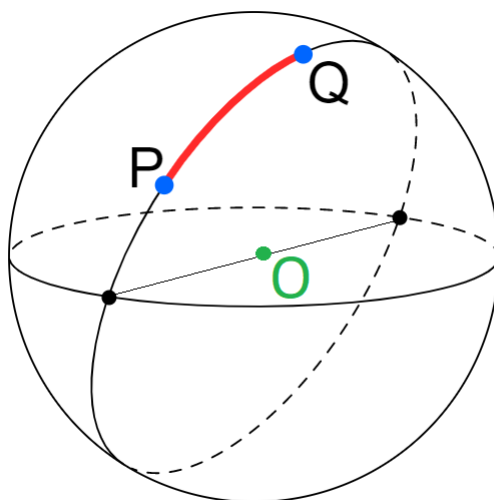


Figura 3.2: Um diagrama ilustrando um grande círculo para representar a menor distância entre dois pontos P e Q sobre a esfera.

Uma relação curiosa é que a soma dos ângulos internos α_i de um triângulo, como o da Fig. 3.3, depende da sua área A :

$$\Sigma(\alpha_i) = \pi + \frac{A}{R^2}. \quad (3.3)$$

3.1.1 Coordenadas

A ideia chave para descrição da geometria é usar cálculo diferencial para reduzir toda a geometria através de distâncias entre cada par de pontos próximos. A partir disso, a distância entre pontos distantes será dada por integração. E linhas retas são curvas que minimizam a distância entre dois pontos.

Uma maneira sistemática de rotular pontos é um pré-requisito para uma especificação dessa distância entre pontos próximos. Um sistema de coordenadas atribui rótulos exclusivos a cada ponto e há muitos sistemas que fazem isso. Em três dimensões, por exemplo, há as coordenadas Cartesianas (x, y, z) e esféricas (r, θ, ϕ) .

Como o sistema de coordenadas pode ser qualquer um, usaremos uma grandeza in-

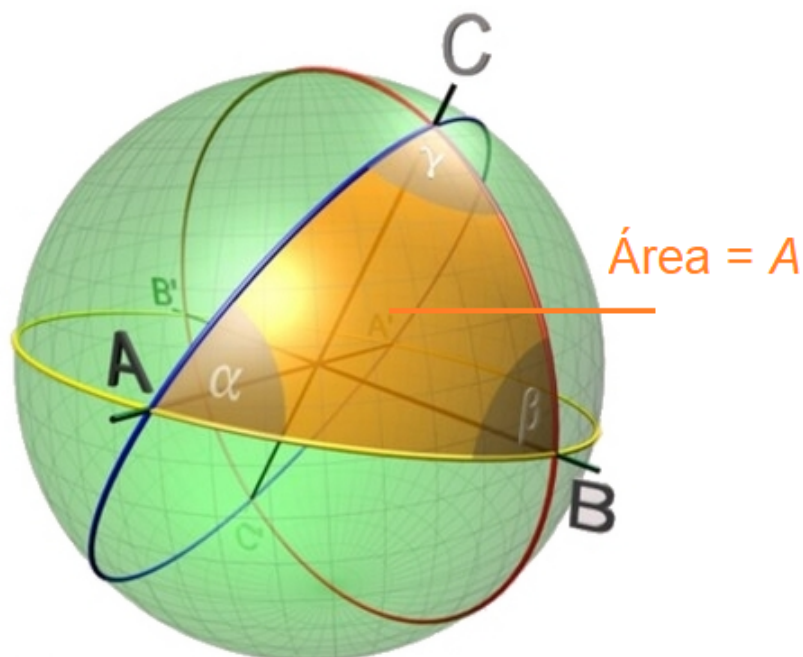


Figura 3.3: Um triângulo representado sobre a superfície de uma esfera, de raio R , obtido por três pontos de interseção (A , B e C) entre grandes círculos desenhados sobre a superfície dessa esfera. Fonte: adaptado de <http://commons.wikimedia.org/>.

variante chamada de **intervalo espaçotemporal**³, representada por ds^2 , que é descrito pelos elementos de linha. Já o elemento de linha especifica a geometria espaçotemporal utilizada. Vamos mostrar um exemplo do espaço-tempo de Minkowski⁴:

$$ds^2 = -(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (3.4)$$

A parte espacial da Eq. (3.4) pode ser transformada em coordenadas esféricas, melhor observada na Fig. 3.4, através das relações:

$$x = r \operatorname{sen} \theta \cos \phi \quad (3.5a)$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \quad (3.5b)$$

$$z = r \cos \theta \quad (3.5c)$$

³A demonstração desse invariante se encontra no Apêndice A.

⁴Essa é a formulação geométrica da relatividade restrita, também explorada no Apêndice A.

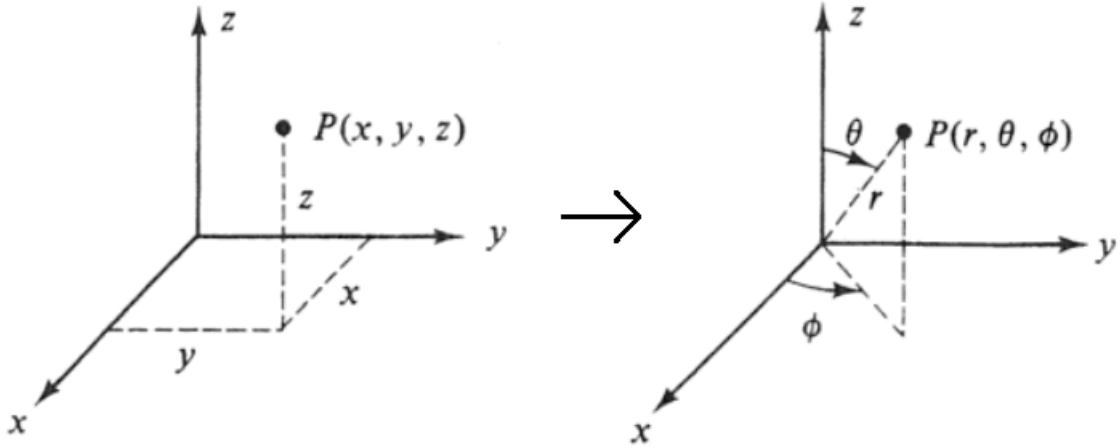


Figura 3.4: As coordenadas cartesianas são representadas por 3 valores, (x, y, z) . Quando são convertidos em coordenadas esféricas, os novos valores serão representados como (r, θ, ϕ) . Fonte: disponível em <https://bit.ly/3ckxNNV>.

Assim, as relações entre as derivadas em ambos os sistemas valem:

$$dx = dr \sin \theta \cos \phi + r \cos \theta d\theta \cos \phi - r \sin \theta \sin \phi d\phi,$$

$$dy = dr \sin \theta \sin \phi + r \cos \theta d\theta \sin \phi + r \sin \theta \cos \phi d\phi,$$

$$dz = dr \cos \theta - r \sin \theta d\theta.$$

Finalmente, podemos calcular $ds^2 = -(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ em coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -(cdt)^2 + (dr \sin \theta \cos \phi + r \cos \theta d\theta \cos \phi - r \sin \theta \sin \phi d\phi)^2 + \\ &+ (dr \sin \theta \sin \phi + r \cos \theta d\theta \sin \phi + r \sin \theta \cos \phi d\phi)^2 + (dr \cos \theta - r \sin \theta d\theta)^2 \Rightarrow \\ ds^2 &= -(cdt)^2 + dr^2 + (r d\theta)^2 + (r \sin \theta d\phi)^2, \end{aligned} \quad (3.6)$$

que é o elemento de linha do espaço de Minkowski em coordenadas esféricas.

$$ds^2 = -(cdt)^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (3.7)$$

Para descrição de uma geometria genérica, devemos usar o sistema quadridimensional x^a , com a sendo 0, 1, 2 ou 3, para mapear os pontos⁵ e especificar o elemento de linha

⁵No espaço de Minkowski temos $x^0 = t$, $x^1 = x$, $x^2 = y$ e $x^3 = z$.

ds^2 entre por dois pontos próximos separados pelo intervalo coordenado dx^a . De forma geral, o elemento de linha pode ser escrito como:

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b, \quad (3.8)$$

onde g_{ab} é a métrica do espaço-tempo .

3.1.2 Geometria sobre uma esfera

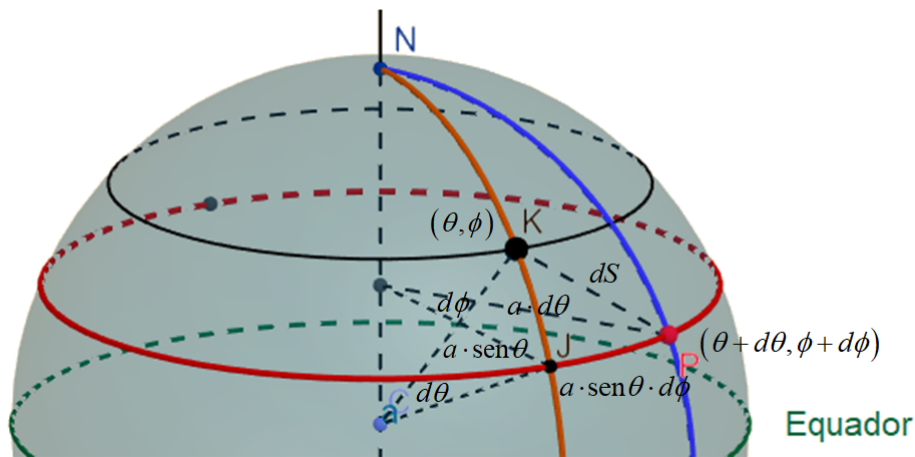


Figura 3.5: Representação do elemento de linha em coordenadas esféricas. Dois pontos K e P separados por uma distância infinitesimal estão localizados em (θ, ϕ) e $(\theta + d\theta, \phi + d\phi)$. A distância entre os pontos J e P, localizados na mesma latitude θ , vale $R \sin\theta d\phi$. A distância entre K e J, localizados na mesma longitude ϕ , vale $R d\theta$. Usando o teorema de Pitágoras, podemos determinar o valor ds^2 , distância entre os pontos K e P. Adaptado de [1].

Para descrevermos outras propriedades, usaremos as coordenadas (θ, ϕ) conforme mostra a Fig. 3.5. O seu elemento de linha dS^2 apenas nas componentes espaciais, com $r = R$ constante, será dado por:

$$dS^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (3.9)$$

Vamos agora calcular a razão entre o perímetro da circunferência de raio r pelo seu raio nessa geometria esférica. Colocando o centro da circunferência no polo norte da esfera, O perímetro C será a integral de dS em torno do círculo de θ constante, ou seja, $\theta = \Theta$.

$$C = \oint dS = \int_0^{2\pi} R \sin\Theta d\phi = 2\pi R \sin\Theta. \quad (3.10)$$

Já o raio r é a integral ao longo de qualquer curva onde ϕ é constante, portanto vale:

$$r = \int dS = \int_0^\Theta R d\phi = R\Theta \Rightarrow \Theta = \frac{r}{R}. \quad (3.11)$$

Substituindo a (3.11) em (3.10), obtemos:

$$C = 2\pi R \text{sen} \left(\frac{r}{R} \right) \quad (3.12)$$

Quando $r \ll R$, recuperamos a relação clássica da geometria

$$C = \lim_{\frac{r}{R} \rightarrow 0} 2\pi R \text{sen} \left(\frac{r}{R} \right) = 2\pi R \left(\frac{r}{R} \right) = 2\pi r \quad (3.13)$$

Não é necessário deixar a superfície da Terra para determinar sua geometria. Pode-se medir os ângulos de um triângulo ou o comprimento e raio de uma circunferência. Pela aplicação das Eqs. (3.3) e (3.12), podemos determinar o raio R de curvatura da nossa geometria.

A mudança da componente temporal já foi observada no desvio para o vermelho gravitacional com alteração do tempo pelo potencial gravitacional representado pela Eq. (2.12). Aplicando esse resultado na componente temporal, temos a mudança dessa geometria por ação da gravidade:

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2} \right) (cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (3.14)$$

onde Φ é o potencial gravitacional⁶. Nota-se que no resultado da deflexão da luz utilizando o modelo Newtoniano não há nenhuma previsão na alteração na componente espacial, mas há na temporal.

Contudo na TRG, existe uma alteração na métrica espacial provocada pelas massas⁷.

Um exemplo é o campo gravitacional produzido por uma distribuição esférica de matéria,

⁶O potencial gravitacional gerado por uma estrela, de massa M , como o Sol é dado por $\Phi = -\frac{GM}{r}$, onde G é a constante da gravitação e r é a distância do centro da estrela ao ponto onde estamos medindo o potencial.

⁷Pela relatividade restrita, existe uma equivalência entre massa e energia, no entanto, usaremos apenas a massa como causador das deformações no espaço-tempo.

obtido pelo astrônomo alemão Karl Schwarzschild em 1916 [8]. Essa curvatura pode ser expressa por uma métrica (doravante chamada métrica de Schwarzschild) com a seguinte forma [1]:

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2} \right) (cdt)^2 + \frac{1}{1 + \frac{2\Phi}{c^2}} (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (3.15)$$

Observe que a componente espacial também é modificada pelo potencial gravitacional. Por enquanto apenas demos o resultado sem nenhuma justificativa, que se tornará clara na Seção 3.3.

3.2 Diagramas de espaço-tempo

Para conseguirmos expressar os eventos usando a geometria, vamos descrever um sistema quadridimensional (t, x, y, z) , que será representado por um diagrama **espaço-tempo**, como o da Fig. 3.6.

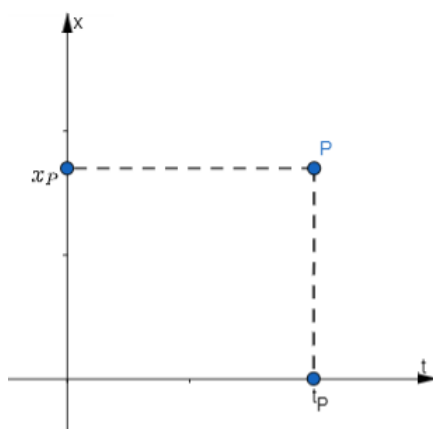


Figura 3.6: Diagrama espaço-tempo em duas dimensões (x, t) . A coordenada x_p indica a posição espacial da partícula e t_p indica a sua posição temporal.

Os eventos serão representados por um ponto P, e as coordenadas x_p e t_p trazem informações de onde e quando o evento ocorreu respectivamente. Cabe ressaltar que os livros que abordam TRG usam os eixos invertidos, contudo, acreditamos que nossa representação será mais clara para o aluno entender os diagramas pelo seu paralelo com a cinemática tradicional. Também é conveniente transformarmos a coordenada temporal

em espacial ct , aproveitando a constância da velocidade da luz a fim de que ambos os eixos tenham mesma dimensão.

Uma partícula descreverá sua trajetória espaçotemporal por uma linha de mundo, alguns exemplos são ilustrados na Fig. 3.7.

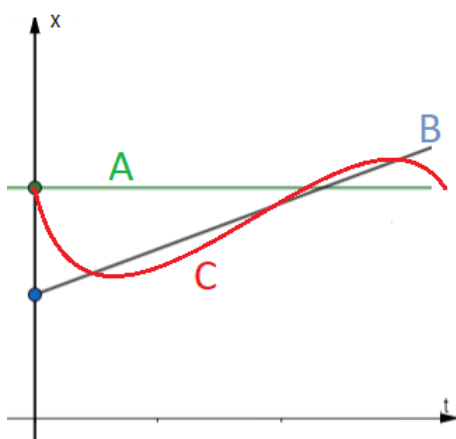


Figura 3.7: Linhas de mundo em um espaço-tempo bidimensional. A linha de mundo A representa uma partícula em repouso. A linha de mundo B representa uma partícula em movimento uniforme. A linha de mundo C representa uma partícula em movimento oscilatório.

A descrição matemática da geometria será dada pela sua métrica como, por exemplo, a de Minkowski (Eq. (3.4)) ou a de Schwarzschild (Eq. (3.15)), ambas em coordenadas Cartesianas.

3.2.1 Cones de Luz

O elemento de linha, (ds^2) , pode assumir três tipos de valores: positivo, negativo ou nulo. Isso leva a três tipos de linhas de mundo: tipo tempo, tipo espaço ou nulo⁸ cujos valores

⁸Do inglês *timelike*, *spacelike* e *null*.

são representados por:

$$ds^2 > 0 \quad \text{tipo tempo,} \quad (3.16a)$$

$$ds^2 = 0 \quad \text{tipo nulo,} \quad (3.16b)$$

$$ds^2 < 0 \quad \text{tipo espaço.} \quad (3.16c)$$

A constância da velocidade da luz é o fator mais importante sobre o espaço-tempo na teoria da relatividade restrita. Observe que o valor de ds^2 é nulo quando o *objeto* se move com velocidade $v = c$:

$$ds^2 = -(cdt)^2 + dx^2 = -(cdt)^2 + (vdt)^2 = -(cdt)^2 + (cdt)^2 \Rightarrow ds^2 = 0. \quad (3.17)$$

Esta propriedade pode ser expressa geometricamente nos diagramas espaço tempo com linhas inclinadas de 45° . Já se colocarmos com duas dimensões espaciais xy , teremos os *cones de luz*, que podem ser vistos na Fig. 3.8. Para termos o cone de luz, não precisamos que a luz esteja presente. Os cones mapeiam as trajetórias que a luz teria se partisse do **presente**. Para linhas do *tipo tempo*, o objeto se move com velocidade menor que a da luz, ou seja, possuem linhas de mundo com inclinação menor que 45° e sempre interior ao cone. Essas linhas representam trajetória de um objeto real, pois sua velocidade é sempre menor que a da luz. Para linhas do *tipo espaço*, o objeto teria que viajar com velocidade superior à da luz, o que é impossível frente à relatividade restrita.

Cones de luz em duas dimensões

Consideremos uma métrica bidimensional dada por:

$$ds^2 = -X^2 dT^2 + dX^2, \quad (3.18)$$

e uma linha de mundo da forma:

$$X(T) = \cosh(T) \quad (3.19)$$

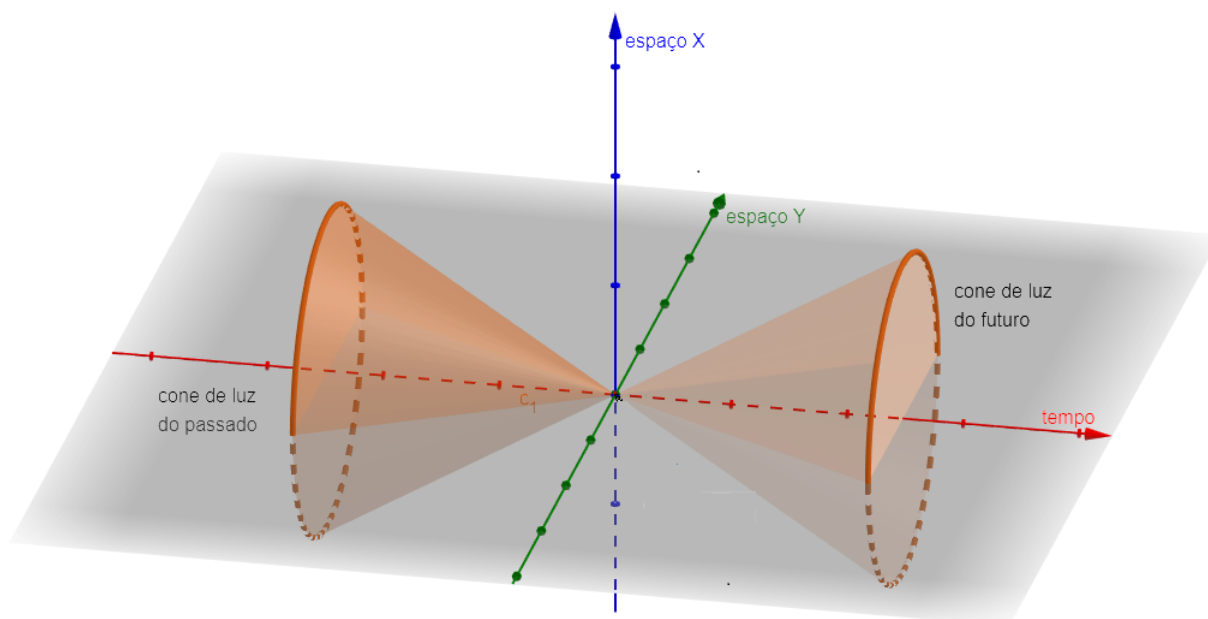


Figura 3.8: Representação de um cone de luz tridimensional (t, x, y) . Se você estiver no ponto **presente**, os eventos no interior do cone **futuro** representam todos os eventos que você consegue alcançar com um sinal físico, ou seja, viajando até eles em linhas do *tipo tempo* ou *tipo nulo*. Para esse mesmo ponto inicial, o cone do **passado** contém todos os eventos que podem chegar ao presente, ou seja, ele contém todos os eventos que podem afetar o presente. A região fora do cone não tem uma relação de causalidade com o presente, pois não pode fisicamente alcançá-lo.

Os raios de luz se movem ao longo de trajetórias do tipo nulo e são mostrados na Fig. 3.9, portanto:

$$-X^2 dT^2 + dX^2 = 0 \Rightarrow \frac{dX}{dT} = \pm X \quad (3.20)$$

A estrutura local do cone de luz da Fig. 3.9 é a mesma do espaço-tempo plano. Contudo, o arranjo global desses cones apresenta uma estrutura diferente.

O desvio para o vermelho gravitacional pode ser explicado pelo diagrama de espaço-tempo da Fig. 3.10. Consideremos sinais a propagarem-se no eixo x emitidos a partir de um ponto A em x_A e recebidos em por um ponto B em x_B . Note que, como em um espaço-tempo curvo, a linha de mundo do raio de luz não será mais uma reta com 45° de inclinação como no espaço de Minkowski. As linhas de mundo dos sinais emitidos terão

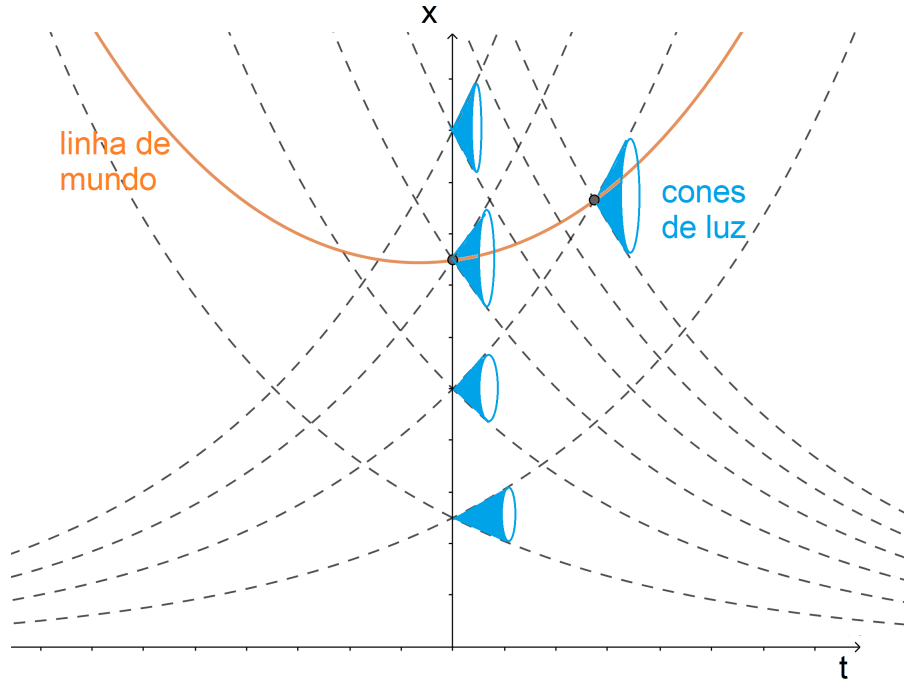


Figura 3.9: Um diagrama espaçotemporal bidimensional usando a métrica (3.20) mostrando raios de luz que se interceptam em $t = 0$. Os triângulos são os cones de luz deformados. Observe que uma linha de mundo do tipo *tempo* permanece no interior do cone de luz, representado aqui em apenas duas dimensões. Adaptado de [1].

a mesma forma pois a geometria não depende do tempo. A distância temporal entre dois sinais consecutivos será Δt , porém o tempo próprio⁹ medido em x_A e x_B serão diferentes entre si, pois $ds^2 = -c^2 d\tau^2$, onde $d\tau$ é o intervalo infinitesimal de tempo próprio. Para A e B , temos que $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$ de modo que o tempo próprio para a emissão dos sinais será a Eq. (3.21):

$$\Delta\tau = \left(1 + \frac{2\Phi(x)}{c^2}\right)^{1/2} \Delta t \approx \left(1 + \frac{\Phi(x)}{c^2}\right) \Delta t. \quad (3.21)$$

Relacionando as emissões nos pontos x_A e x_B , teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\tau_B}{\Delta\tau_A} &\approx \frac{\left(1 + \frac{\Phi(x_B)}{c^2}\right) \Delta t}{\left(1 + \frac{\Phi(x_A)}{c^2}\right) \Delta t} \approx \left(1 + \frac{\Phi(x_B)}{c^2} - \frac{\Phi(x_A)}{c^2}\right) \Rightarrow \\ \Delta\tau_B &\approx \left(1 + \frac{\Phi(x_B)}{c^2} - \frac{\Phi(x_A)}{c^2}\right) \Delta\tau_A. \end{aligned}$$

⁹O tempo próprio é o tempo medido por um relógio em repouso junto a um observador.

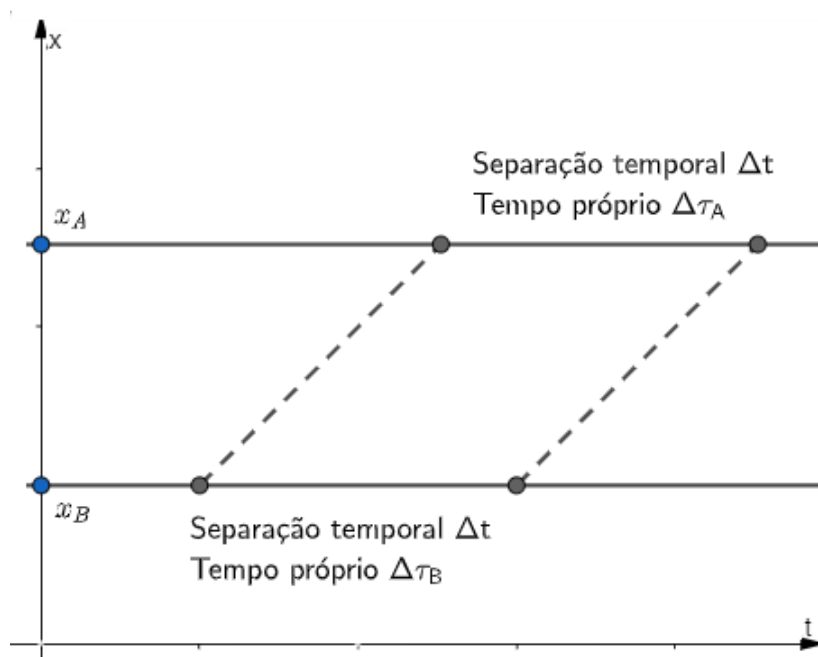


Figura 3.10: Um diagrama espaço-temporal bidimensional mostrando dois observadores estacionários em x_A e em x_B . A emite dois sinais com um tempo próprio $\Delta\tau_A$ relacionado a um intervalo de tempo Δt pela Eq. (3.21). Já que o elemento de linha é independente de t , a recepção dos sinais por B também leva um tempo Δt , mas com um tempo próprio $\Delta\tau_B$ diferente de $\Delta\tau_A$. Assim a taxa de emissão é diferente da de recepção. Adaptado de [1].

Observe que recuperamos a Eq. (2.12)

3.3 O Princípio da Correspondência

“Qualquer nova teoria tem que ser consistente com as teorias anteriores dentro do seu limite de validade. Assim a relatividade geral deve levar à relatividade restrita na ausência de gravidade, quando $G \rightarrow 0$ e à gravitação newtoniana em campos gravitacionais fracos e com velocidades pequenas quando comparadas a da luz, ou seja, quando $c \rightarrow \infty$. Para ambas as condições satisfeitas, a mecânica clássica deve prevalecer.” [8]

A relatividade relatividade geral deve concordar com a relatividade restrita na ausência de gravidade $G \rightarrow 0$ e com a gravitação Newtoniana para campos fracos e baixas

velocidades comparadas à da luz $c \rightarrow \infty$. E ambas devem levar à mecânica Newtoniana na ausência de gravitação quando as duas condições limites forem satisfeitas.

Isso dá origem ao princípio da correspondência como indicado na Fig. 3.11. No

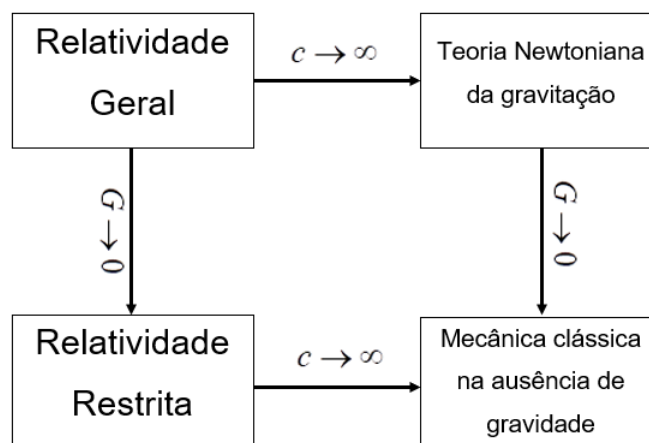


Figura 3.11: O princípio da correspondência para a relatividade geral.

entanto a lei da gravitação Newtoniana só aparece se considerarmos uma deformação na componente espacial como vimos no exemplo da métrica de Schwarzschild na Eq. (3.27). Tomando o limite $\Phi \ll 1$ ¹⁰ encontramos:

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)(cdt)^2 + \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (3.22)$$

Este elemento de linha é conhecido como **estático** ou de **campo fraco** e é uma boa aproximação para a geometria do espaço-tempo gerada pelo Sol¹¹.

Vamos deduzir a equação da gravitação Newtoniana usando esse formalismo. Calculando o tempo próprio entre dois eventos A e B na métrica de campo fraco, temos:

$$\begin{aligned} \Delta\tau &= \int_A^B d\tau = \int_A^B \left(-\frac{ds^2}{c^2}\right)^{1/2} = \\ &= \int_A^B \left[\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2) \right]^{1/2} = \end{aligned}$$

¹⁰Usamos mais uma vez a aproximação de Bernoulli: $(1 + \frac{2\Phi}{c^2})^{-1} \approx 1 - \frac{2\Phi}{c^2}$.

¹¹Nas unidades SI, $\Phi = \frac{GM}{c^2 r} \ll 1$. Substituindo os valores para o Sol, temos $\frac{GM_\odot}{c^2 R_\odot} \sim 10^{-6}$, mostrando que o campo gravitacional do Sol satisfaz esta condição.

$$= \int_A^B dt \left\{ \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2} \right) - \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2} \right) \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}.$$

Observe que o termo entre colchetes é o quadrado da velocidade não relativística v^2 , que vamos considerar muito pequena se comparada à da luz $v \ll c$ e usar novamente a aproximação de Bernoulli:

$$\int_A^B dt \left[1 - \left(\frac{v^2}{2} - \Phi \right) \right].$$

Agora temos que extremizar o tempo próprio entre os eventos A e B , equivalente a extremizar a equação:

$$\int_A^B dt \left(\frac{v^2}{2} - \Phi \right) = 0.$$

O Langrangiano é dado por:

$$L \left(\frac{dx}{dt}, x \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \Phi(x, t).$$

Aplicando as equações de Euler-Lagrange e multiplicando pela massa dois dois lados, chegamos à lei do inverso do quadrado da distância¹²:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\nabla\Phi \Rightarrow \vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{r}, \quad (3.23)$$

onde M é a fonte de campo gravitacional; m é a carga gravitacional e r é a distância que separa o centro desses dois corpos.

3.4 Geodésica

O princípio para determinarmos o movimento de uma partícula livre num espaço-tempo curvo é o **Princípio Variacional**, cujo enunciado pode ser descrito como “a trajetória seguida por uma partícula livre entre dois pontos do tipo tempo extremiza o tempo próprio entre eles”, o que, matematicamente pode ser representado por [1]:

$$\delta \int \left(-g_{ab} dx^a dx^b \right)^{1/2} = 0. \quad (3.24)$$

¹²Usamos o potencial Newtoniano $\Phi = -\frac{GMm}{r}$.

Essa extremização dará origem ao *menor caminho* entre dois pontos, denominado geodésica. Cabe ressaltar que no espaço Euclidiano, a geodésica é simplesmente uma linha reta. E na geometria esférica, um arco de grande círculo como já representamos na Fig. 3.2.

3.4.1 Modelos de Setores

Para nos prepararmos para este novo ponto de vista, descrevemos a visão de mundo dos *flatlanders*¹³, os habitantes de *Flatland* no conto de Edwin Abbott com o mesmo nome [20].

“Eu chamo o nosso mundo de Flatland[...]. Imagine uma vasta folha de papel sobre a qual [...] figuras [...] se movem livremente, mas sem o poder de elevar-se ou afundar-se abaixo dela, muito parecido com sombras.” [20]

Os *flatlanders* se movem em duas dimensões (frente-trás ou direita-esquerda), a terceira dimensão (cima-baixo) não é apenas inacessível para eles, mas está além de sua imaginação. Quando estendemos o *Flatland* de Abbott para superfícies curvas, os *flatlanders* ainda se movem apenas sobre a superfície: para a frente ou para trás e para a direita ou para a esquerda. Na falta do conceito de cima e para baixo, eles não podem conceber uma superfície curvada a um espaço tridimensional. No entanto, eles são capazes de estudar a curvatura do seu mundo. Nós somos *spacelanders*, familiarizados com três dimensões, mas incapazes de conceber um espaço dimensional superior, podemos examinar a curvatura do nosso espaço tridimensional da mesma maneira que os *flatlanders* examinam as superfícies planas curvas.

“Assim, a configuração e a solução da equação geodésica são substituídas pela criação do modelo de setor e pelo desenho das geodésicas.” [21]

¹³Aqui vamos usar o termo original no lugar da tradução planistas.

Para visualizarmos os efeitos físicos de um espaço curvo, vamos introduzir os modelos de setores. Neles nós vamos subdividir uma superfície curva em pedaços pequenos o bastante para considerarmos planos. Observe na Fig. 3.12 que *buracos* aparecem sempre que as peças de um espaço curvo são montadas em um espaço Euclidiano.

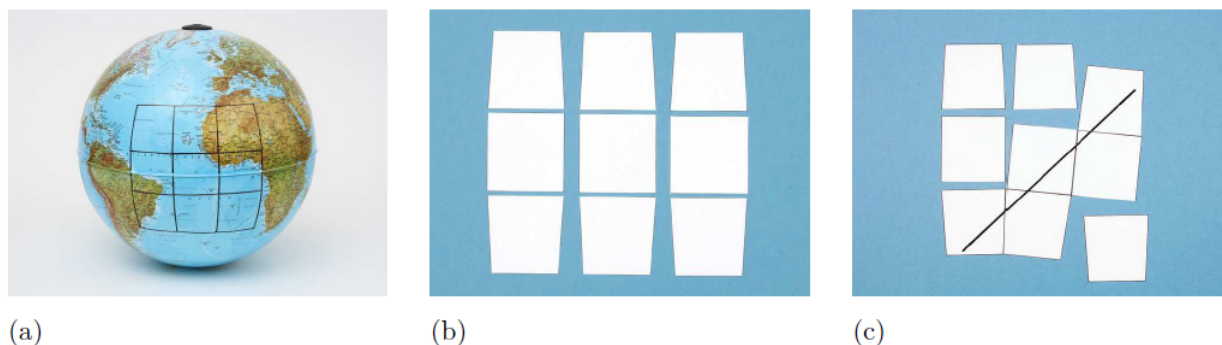


Figura 3.12: Modelo de seção de uma superfície esférica. (a) O espaço curvo de uma esfera é subdividido em pequenos elementos de área. (b) Os setores são construídos como pedaços planos com os mesmos comprimentos. (c) A geodésica é construída localmente como uma linha reta usando lápis e régua. Fonte: disponível em [21].

Como cada setor é pequeno, localmente a geodésica será uma linha reta. Essa linha mantém seu percurso de um setor a outro quando eles são encaixados sem nenhum *buraco* entre eles, ou seja, quando unidos por vértices em comum, como pode ser visto no item (c) da Fig. 3.12. Se uma segunda geodésica for adicionada paralelamente à primeira no setor inferior esquerdo, pode-se ver na Fig. 3.13 que elas convergem. Isso demonstra a curvatura da nossa superfície.

Analogamente, podemos fazer modelos de setores que nos permitam construir geodésicas na vizinhança de um buraco negro

Geodésicas próximas a um buraco negro

Vamos agora apresentar um modelo de setores que permita construir geodésicas na vizinhança de um buraco negro. O conjunto completo de setores representam um plano de simetria ao longo do plano equatorial e formam o arranjo da Fig. 3.14.

Observe que há *buracos* entre os setores indicando a curvatura do espaço. Para de-

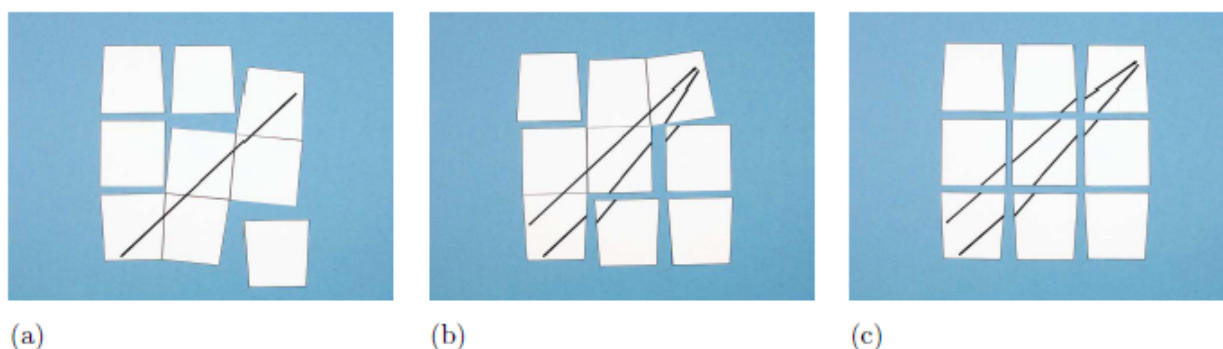


Figura 3.13: Geodésicas no modelo setorial de uma esfera. (a) Os setores são unidos para desenhar a primeira linha geodésica. (b) Nova disposição dos setores para desenhar a segunda geodésica acima da primeira. (c) As duas geodésicas começam paralelas na parte inferior, mas convergem na parte superior quando os setores retornam à sua posição original. Fonte: disponível em [21].

senharmos uma geodésica, faremos um método análogo aos anteriores: juntando setores vizinhos pelos vértices em comum e desenhando uma linha reta. Pode-se observar que a direção da linha desenhada muda, ilustrando a deflexão da luz sob ação de um campo gravitacional.

Devemos ter cuidado com o resultado do desenho da geodésica, pois, apesar de ser qualitativamente correto, os setores são representações aproximadas do espaço curvo, portanto a geodésica desenhada também é uma solução aproximada. Com o método fornecido em por Zahn e Kraus [21] temos um erro de aproximadamente 0,13% em relação às medidas na esfera¹⁴. Outro detalhe para termos em mente é que as linhas desenhadas nesses modelos não representam a trajetória de um raio de luz. A linha desenhada é uma geodésica no **espaço**, enquanto a luz se propaga em ambos **tempo** e **espaço**. Mesmo assim, trata-se de um excelente método para ilustrar algumas propriedades da geodésica. Uma maneira de implementar os modelos setoriais para estudar a geodésica será mostrado no capítulo 4.

¹⁴O processo de construção desses modelos pode ser encontrado em [21].

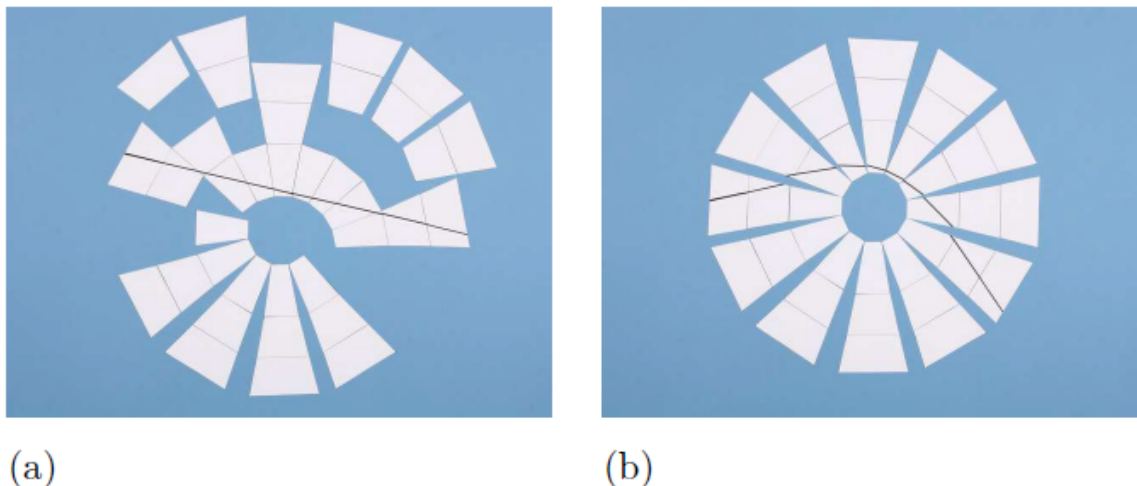


Figura 3.14: Uma geodésica no modelo de setores do plano equatorial de um buraco negro. As linhas são localmente retas, no entanto a direção de *entrada* é completamente diferente da de *saída*. (a) Os setores são unidos para desenhar a linha geodésica. (b) Os setores são colocados na sua posição *original* simetricamente, ilustrando a trajetória da luz. Fonte: disponível em [21].

3.5 Equação de Einstein

As equações de campo da relatividade geral ou equações de Einstein foram obtidas no final de 1915 por Albert Einstein e David Hilbert, de forma independente.

“[eles] perceberam que a métrica tensorial g_{ab} que descreve a geometria do espaço-tempo parecia depender da quantidade de matéria gravitacional na região.” [22]

A formulação da equação de Einstein exige uma matemática só vista nos períodos mais avançados da graduação, como tensores, portanto esses conceitos não serão abordados nesse trabalho. No entanto, é possível transmitir o significado físico da equação de Einstein sem apresentar a sua dedução.

“A equação de Einstein governa a geometria do espaço-tempo curvo, equação básica da relatividade geral [...] Ela é o equivalente das equações de Maxwell para o eletromagnetismo. Métricas, tal como a de Schwarzschild, são soluções particulares da equação de Einstein.” [1]

Essa afirmação pode ser verificada pela Eq. (3.23), em que a gravitação Newtoniana surge da relatividade geral com uma deformação no espaço-tempo cujo valor depende do potencial gravitacional, diretamente proporcional à massa.

A equação de Einstein relaciona a curvatura do espaço-tempo com sua fonte (massa) em um conjunto de dez equações diferenciais de segunda ordem não lineares e não independentes, o que torna sua solução muito complicada [1].

Dessa forma, qualquer fonte pode provocar uma deformação na componente espacial da métrica representada por uma função $f(\Phi)$, originando um elemento de linha em coordenadas esféricas com a forma da Eq. (3.25):

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)(cdt)^2 + f(\Phi)(dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2). \quad (3.25)$$

onde Φ é o potencial gravitacional.

A equação de Einstein pode ser resumida como:

$$\mathbf{G} = \frac{8\pi G}{c^4}\mathbf{T}, \quad (3.26)$$

onde \mathbf{G} é o tensor de curvatura, associado com a estrutura geométrica do espaço-tempo. Essa grandeza diz qual será a métrica do espaço. \mathbf{T} é o tensor de energia-momento, que depende da distribuição de matéria do universo.

No limite Newtoniano, ou seja, para pequenas massas e velocidades muito menores que a da luz, as equações da relatividade geral devem reproduzir a lei do inverso do quadrado das distâncias [1] (veja também a Eq. (3.23)).

3.6 Buracos Negros

Uma das ideias mais divulgadas sobre os buracos negros é de que eles *sugam* objetos para seu interior sem chance de escape e nem mesmo a luz resiste à sua atração gravitacional. Na verdade, um buraco negro de massa M causa a mesma interação que uma estrela de mesma massa¹⁵, porém sem emitir a luz que antes a estrela irradiava. Se o Sol de

¹⁵Aqui estamos usando a aproximação para um buraco negro e uma estrela esféricos e sem rotação

alguma forma se tornasse um buraco negro, as órbitas dos planetas do sistema solar se manteriam inalteradas, ou seja, o buraco negro não passa de uma estrela apagada com enorme densidade. Para descrever esses objetos vamos começar apresentando a métrica externa de uma distribuição de massa esférica de valor M e raio R . Ela é descrita pela métrica vista na Eq. (3.15). Ela veio da resolução das equações de Einstein em 1916 realizada pelo físico alemão Karl Schwarzschild [23]. Com ótima aproximação, o Sol pode ser usado para verificar experimentalmente essa métrica [1]. Em um sistema de coordenadas esféricas, o elemento de linha da geometria de Schwarzschild a uma distância r do centro da estrela é dada por:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) (cdt)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (3.27)$$

Observe que se $(\frac{2GM}{c^2 r} \ll 1)$, podemos usar a aproximação de Bernoulli e escrever a métrica como:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) (cdt)^2 + \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (3.28)$$

A Eq.(3.28) corresponde à forma exata para campos fracos e estáticos com o potencial gravitacional Newtoniano Φ dado por:

$$\Phi = - \frac{GM}{r} \quad (3.29)$$

Isto nos leva a verificar que de fato o valor M corresponde à massa, sendo ela a fonte da curvatura do espaço. E também que a métrica de Schwarzschild descreve um buraco negro estático de massa M .

Não mostraremos aqui, mas essa métrica pode ser usada para calcular diversos fenômenos como o desvio para o vermelho gravitacional, a precessão do periélio de Mercúrio e a deflexão da luz para campos gravitacionais simetricamente esféricos. Para um leitor interessado, sugere-se o Capítulo 15 da referência [8].

Voltando aos buracos negros, eles podem ser originados pela *morte* de uma estrela¹⁶. Se a estrela tiver massa suficiente, haverá um momento de desequilíbrio entre a força

¹⁶Morte aqui significa o fim do ciclo de fusão nuclear no interior de uma estrela.

gravitacional e as forças de pressão da matéria dentro da estrela. Há, portanto, um colapso gravitacional com a criação de um buraco negro [1].

É comum nos livros de relatividade o uso de unidades onde $G = 1$ e $c = 1$. Estas são chamadas de unidades geometrizadas. Nelas as equações da TRG tornam-se mais simples. A métrica de Schwarzschild, dada pela Eq. (3.27) pode ser simplificada como:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (3.30)$$

Note que nessas unidades M tem dimensão de comprimento.

Observe que a métrica possui dois pontos de singularidade¹⁷ $r = 0$ e $r = 2M$. No caso de $r = 2M$ é possível eliminar a singularidade por meio de uma transformação adequada de coordenadas [8]. Essa região é chamada de *horizonte de eventos* e a distância r é chamada de raio de Schwarzschild r_s . Para examinarmos essa superfície, é possível repetir o procedimento da Seção 3.2.1 para obtermos a seguinte estrutura de cones de luz nas proximidades de um horizonte de eventos, conforme mostra a Fig. 3.15. Note que o cone de luz tangencia a superfície $r_s = 2M$ e o interior do cone de luz futuro não permite mais que um observador saia desta superfície daí o nome horizonte de eventos. De outro modo, tudo aquilo que cai dentro do horizonte de eventos é *sugado* e nem a luz pode escapar desta interação gravitacional. Em um paralelo com a gravitação Newtoniana, o horizonte de eventos seria a região do espaço cuja velocidade de escape é igual a da luz, cerca de 300.000 km/s. Já para $r = 0$ não é possível eliminar a singularidade e ainda não conhecemos a física no interior dos buracos negros, mas devido ao horizonte de eventos, estamos isolados do que ocorre no interior.

Curiosamente este é mesmo raio ($r_s = 2M$) calculado por Michell e Laplace como sendo o raio de uma estrela de massa M de modo que nem a luz consiga escapar da atração do seu campo gravitacional [24].

¹⁷Pontos no sistema de coordenadas em que a métrica não é definida, ela diverge indo para infinito.

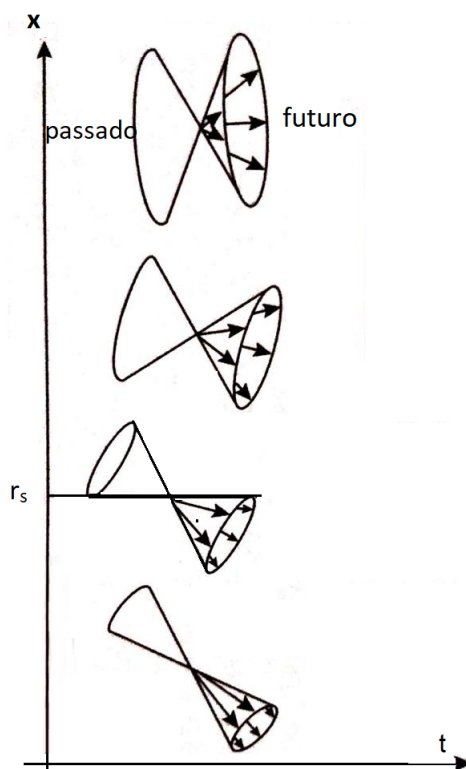


Figura 3.15: Cones de luz na vizinhança do raio de Schwarzschild. Dentro do buraco negro, ou seja, para $r < r_s$, todas as linhas de mundo de partículas apontam para dentro dele e permanecem confinadas. A fronteira $r = r_s$ representa o *horizonte de eventos*. Na região externa $r > r_s$, o campo gravitacional do buraco negro continua atuando normalmente. Fonte: adaptado de [16].

3.7 Velocidade de Dobra Espacial

Essa seção trata da possibilidade de viajar acima da velocidade da luz, algo muito difundido em ficção científica. O artigo do físico mexicano Miguel Alcubierre de 1994 traz a abordagem matemática que poderia tornar esse sonho realidade. Vamos analisar qual deveria ser a métrica espaçotemporal para obtermos a chamada velocidade de dobra espacial¹⁸.

“Mostra-se, com a abordagem da relatividade geral, que é possível modificar o espaço-tempo de maneira a permitir que uma espaçonave viaje com uma velocidade muito grande [...]. O resultado dessa distorção é a velocidade de

¹⁸Do inglês *warp-drive*.

dobra da ficção científica. No entanto, matéria exótica¹⁹ é necessária para produzir uma distorção do espaço-tempo como a que será discutida.” [25]

Consideremos o seguinte elemento de linha:

$$ds^2 = -dt^2 + [dx - V_e(t)f(r_e)dt]^2 + dy^2 + dz^2 \quad (3.31)$$

onde $V_e(t) \equiv dx_e(t)/dt$ é a velocidade associada com a curva, $x_e(t)$ é a posição da nave em um instante t e $r_e \equiv [(x - x_e(t))^2 + y^2 + z^2]$ representa uma distância ao redor da nave. A função $f(r_e)$ é qualquer função positiva suave que satisfaz a condição $f(0) = 1$ e diminui quando se afasta da origem até chegar a zero para $r_e > R$ para algum R . É como se formasse uma *bolha*, de raio R , ao redor da nave, onde o espaço-tempo seria distorcido. Observe que a geometria do espaço-tempo é plana quando a função $f(r_e) = 0$, mas curva quando não é. A figura 3.16 mostra o diagrama espaço-tempo para essa métrica.

Os cones de luz desse espaço-tempo curvo podem ser determinados pela Eq.(3.16b) que resultará em:

$$ds^2 = -dt^2 + [dx - V_e(t)f(r_e)dt]^2 = 0, \quad (3.32)$$

ou, equivalentemente:

$$\frac{dx}{dt} = \pm 1 + V_s(t)f(r_s). \quad (3.33)$$

O sinal \pm corresponde às duas possíveis direções em que um raio de luz pode emergir a partir de um ponto. Deste resultado, vemos a possibilidade de ter $\frac{dx}{dt} > 1$, entretanto a linha de mundo da espaçonave encontra-se dentro do cone de luz. Observe pela Fig. 3.16 que dentro da região da bolha onde o espaço é curvo, os cones de luz estão inclinados em relação aos usuais 45° . Outra característica surge se considerarmos duas estações espaciais estacionárias A e B e uma nave se deslocando entre esses pontos num tempo $T < D$. Para os observadores nas estações, onde o espaço-tempo é plano, a nave se deslocou com velocidade aparentemente maior que a da luz conforme a Eq. (3.33). No

¹⁹Matéria não bariônica, com densidade de energia negativa.

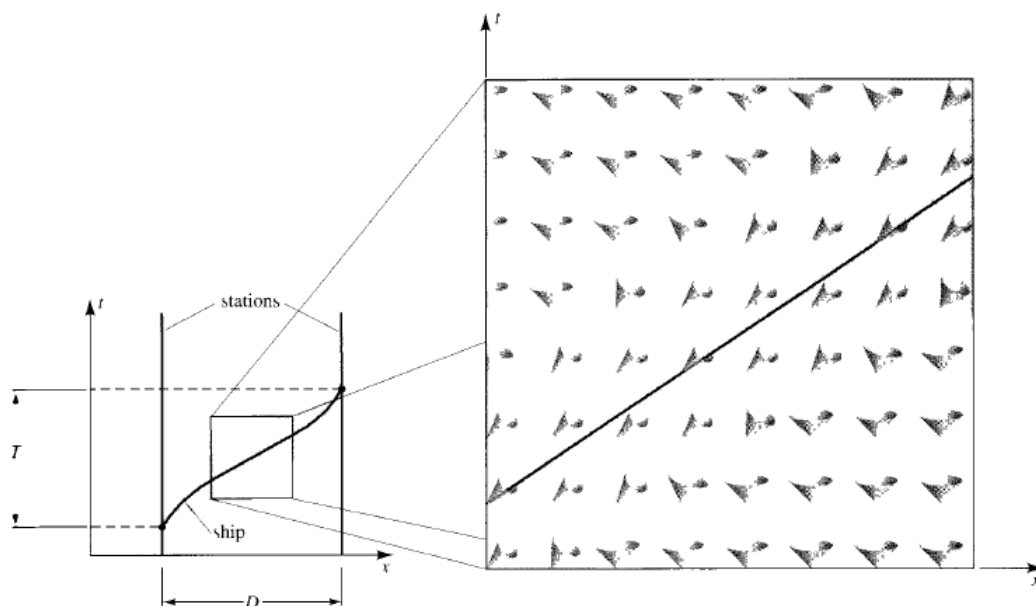


Figura 3.16: Cones de luz num espaço-tempo com velocidade de dobra. Uma nave espacial viajando entre duas estações espaciais seguindo a linha de mundo na figura da esquerda estaria às vezes se movendo com velocidade superior à da luz se o espaço fosse de Minkowski. Mas usando a métrica da Eq. (3.31), há uma bolha de curvatura espacotemporal circundando a nave. No destaque da direita, os cones de luz de futuro estão entortados como descritos pela Eq. 3.33. Mas em cada ponto, a linha de mundo da nave pertence ao interior do cone, ou seja, localmente a sua velocidade é sempre inferior à da luz. Contudo para um observador no espaço de Minkowski, fora da bolha, desconhecedor dessa curvatura, a nave teria viajado entre as duas estações em um tempo T menor do que a luz viajaria essa distância D . Fonte: Disponível de [1].

entanto, o espaço-tempo é curvo, e a linha de mundo da nave é sempre interior aos cones de luz, que estão desviados. Ou seja, a nave está sempre com velocidade menor que a da luz no seu referencial [1].

“Poderia então uma civilização avançada construir uma espaçonave que criaria um espaço-tempo curvo como descrito pela métrica da Eq. (3.31)? [...] ele [espaço-tempo de Alcubierre] requer matéria ou campos com densidade de energia negativa. Todos os campos clássicos [...] possuem densidade de energia positiva. A mecânica quântica permite densidade de energia negativa, mas a física está longe de entender se ela pode ser aproveitada dessa forma.” [1]

No artigo original do Alcubierre, ele também explora a dificuldade de se criar sua métrica espaçotemporal, no entanto não descarta sua existência.

“O fato de que esta expressão (a densidade de energia) é negativa em todos os pontos implica que condições de energia fraca e dominante, assim como a forte são violadas [...] Dessa forma, assim como ocorre em buracos de minhoca²⁰, é necessário matéria exótica para viajar mais rápido que a luz. Contudo, mesmo que essa energia seja proibida classicamente, sabe-se que campos quânticos permitem a existência de regiões com densidade negativa de energia, como no efeito Casimir. A necessidade da matéria exótica não elimina a possibilidade de usar a distorção do espaço-tempo como a descrita acima para viagens interestelares hiper-rápidas.” [25]

Outros artigos, como [26] e [27], também discutem a instabilidade dessa bolha espacial produzida, mas devido à sua complexidade, eles não serão discutidos nesse trabalho.

²⁰Do inglês *wormholes*.

Capítulo 4

TRG na sala de aula

4.1 A dificuldade em ensinar TRG

“Devido à sua natureza abstrata, a teoria da TRG de Einstein raramente é apresentada nos currículos escolares de física. Embora a comunidade educacional tenha começado a investigar maneiras de abordar o assunto na sala de aula, a literatura é ainda muito escassa.” [7]

Tal abstração tem duas principais razões. Primeira, os alunos não têm experiência com os fenômenos relativísticos, pois ela só se torna relevante em situações extremas não vistas no cotidiano, já que a mecânica Newtoniana resolve com grande precisão os principais fenômenos gravitacionais. Em segundo, a sofisticação matemática exigida pela teoria não é ensinada no ensino médio. Contudo, tal teoria não apenas constitui um melhor entendimento do funcionamento do Universo, como inspira o progresso científico e tecnológico. O GPS (Guia de Posicionamento Global), por exemplo, usa os fenômenos relativísticos¹ no seu funcionamento [1].

“Embora haja uma diversidade de trabalhos que apontam a relatividade como parte do currículo de física no ensino médio, percebe-se que há uma escassez em relação ao ensino de relatividade geral. A maioria dos trabalhos abor-

¹Uma análise detalhada do seu funcionamento pode ser encontrada na seção 6.4 de [1].

dam apenas a temática da relatividade restrita ou ainda focam na perspectiva histórico-filosófica da ciência.”[28]

Dessa forma, precisamos encontrar maneiras de divulgar a TRG para os alunos sem um nível matemático avançado. A escassez literária e a falta de professores com conhecimentos o suficiente em sobre física moderna, torna a abordagem de TRG no ensino médio ainda mais complicada. Algumas pesquisas mostram que o uso da história e filosofia podem auxiliar na compreensão dos fenômenos relativísticos [7].

Como os livros de ensino médio, em sua maioria, não trazem TRG no seu conteúdo, apenas tópicos de relatividade restrita e uma pequena introdução à mecânica quântica, fica difícil orientar os alunos com uma sequência didática precisa. No livro Física Conceitual do autor Paul Hewitt [5], há uma excelente abordagem do princípio de equivalência e dos fenômenos gravitacionais como deflexão da luz, desvio para o vermelho gravitacional, precessão do periélio de Mercúrio e ondas gravitacionais. No entanto, a abordagem é apenas fenomenológica e não é discutida matematicamente como que a geometria do espaço-tempo é capaz de explicar esses fenômenos.

Uma análise da estrutura do conteúdo de ciências da TRG e as perspectivas dos estudantes, de acordo com a literatura, serviram de base para a concepção, desenvolvimento e avaliação das aulas que serão apresentadas. Os livros de graduação como [1], [8] e [22], apresentam TRG em sua estrutura, em geral, começam com princípio de equivalência, discussão sobre referenciais e forças de inércia. Usam esses princípios para justificar os fenômenos do desvio para o vermelho, deflexão gravitacional da luz e dilatação temporal para então apresentarem a curvatura do espaço-tempo.

No entanto, começaremos nossas aulas com a geometria curva. Porque, apesar de ser um tema bastante abstrato, os estudantes, na minha opinião, acham a abordagem geométrica mais interessante e sua descrição justifica a TRG. Nas palavras de John Archibald Wheeler, o conteúdo físico das equações de Einstein para descrever a gravidade é:

“O espaço-tempo diz para a matéria como se mover; a matéria diz para o espaço-tempo como se curvar.” [29]

4.2 Para quem ensinar?

Ensinar TRG é desafiante matematicamente e conceitualmente, porque matemática avançada e uma grande quantidade de conhecimento prévio são necessários, como relatividade restrita. Portanto propomos que o ensino da teoria da TRG seja exclusivo para alunos de alta performance em matemática e física². Esses alunos querem aprender mais sobre a natureza do espaço-tempo porque percebem a relevância moderna dos tópicos [21]. Relatividade geral pode se ofertada nas escolas como uma disciplina eletiva para que os alunos com aptidão em física sejam contemplados com aulas mais relevantes de acordo com suas motivações e objetivos pessoais. As propostas e os temas das disciplinas eletivas são elaborados por um grupo de, ao menos, dois professores de disciplinas distintas, “desde que trate de um assunto relevante e que seja abordado de modo a aprofundar os conteúdos da Base Nacional Comum” de acordo com o Programa de Fomento às Escolas de Ensino Médio em Tempo Integral - EMTI do Ministério da Educação [30]. Cabe ressaltar que algumas escolares particulares no Rio de Janeiro já apresentam uma proposta de cursos extracurriculares no contra-turno das aulas³. Para alunos que se preparam para o concurso do ITA⁴, noções básicas de TRG devem ser ministradas nas aulas regulares ao longo do ano, pois se trata de um assunto que já foi cobrado no seu concurso⁵, além de física quântica e relatividade restrita, que estão no edital do certame.

Apesar de vários desafios, os estudantes que escolhem física são muito influenciados por assuntos como a teoria da relatividade. Além disso, os alunos possuem grande interesse e

²Não conhecemos uma metodologia para selecionar esses alunos, portanto sugerimos a escolha de estudantes que se destaquem nas disciplinas de matemática e física e estejam interessados em aprender mais sobre esses tópicos de física moderna.

³Uma dessas escolas onde trabalho tem uma disciplina de Astronomia, em que serão inseridas aulas de TRG baseadas nesse trabalho.

⁴Instituto Tecnológico de Aeronáutica, localizado em São José dos Campos/SP.

⁵Algumas dessas questões se encontram no Apêndice B.

algum conhecimento superficial sobre os fenômenos da TRG [2].

4.3 Sequência Didática

Conforme já falamos, não encontramos na literatura livros de ensino médio que abordem TRG usando ferramentas matemáticas. Portanto, os professores carecem de fontes confiáveis com uma sequência didática bem definida sobre o que ensinar ao aluno. Nossa proposta será contribuir com uma sequência didática definida por “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certo objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos” [31]. Para que essa sequência obtivesse sucesso, seguimos alguns passos:

1. Apresentação do projeto ao aluno: baseado nos comentários dos alunos na sala de aula sobre Big-Bang, buracos negros, Stephen Hawking e Einstein, percebi a falta de informação confiável a qual eles têm acesso.
2. Produção inicial: como sou professor deles, conheço a maioria dos alunos, inclusive seus pontos fortes e fracos. A partir dessa avaliação prévia, estabelecemos quais atividades deveriam ser empregadas nas aulas.
3. Atividades: a partir das informações anteriores, formulamos as aulas visando preencher as lacunas de conhecimento e formalizar muitas ideias pré-concebidas que os alunos possuíam sobre temas relacionados aos fenômenos cosmológicos.
4. Avaliação: finalmente aplicamos um questionário para determinar se houve aprendizado pela sequência didática aplicada.

4.4 Preparação das Aulas

Para criarmos uma metodologia de ensino da TRG, vamos identificar os conceitos chave dessa teoria e dividi-las em uma abordagem experimental para motivar os alunos com

fenômenos geométricos não convencionais e depois fornecer as ferramentas matemáticas para que eles possam entender como a teoria de Einstein conecta o princípio de equivalência aos fenômenos do desvio para o vermelho e desvio gravitacional da luz. E, como bônus, não ter a geometria Euclidiana como *verdade absoluta universal*. Seguindo uma estrutura de conteúdos apresentado em [7], definimos alguns objetivos de aprendizagem para cada aula:

Assunto	Objetivos de aprendizagem
Geometria não- Euclidiana	Usar os conceitos da geometria esférica e propor uma forma de verificar que a curvatura da Terra Entender que a geodésica é o menor caminho e localmente é uma reta
Princípio de equivalência	Usar o fato de que localmente é impossível distinguir entre um campo gravitacional e uma aceleração uniforme ou entre a queda livre e a falta de campo gravitacional para explicar como as aceleração e gravidade são fenômenos equivalentes
Fenômenos relativísticos	Descrever como tempo passa mais devagar próximo a objetos massivos usando o princípio de equivalência Descrever como a luz viaja próximo a um campo gravitacional como o gerado pelo sol
Relatividade Restrita	Entender a origem do invariante espaço-temporal
Curvatura	Descrever nosso universo em função de um sistema de coordenadas quadridimensionais Entender nos diagramas espaço-temporais a trajetória da luz Relacionar a teoria da relatividade geral com a geometria do espaço tempo Descrever como a massa curva o espaço-tempo e como a curvatura influencia no movimento dos corpos
Fenômenos gravitacionais	Entender os conceitos básicos de um buraco negro Conhecer um limite da física por não termos acesso a todo o espaço-tempo devido ao horizonte de eventos de um buraco negro Entender como os cones de luz <i>entortados</i> podem fazer com que os corpos se movam com velocidade superior à da luz no vácuo globalmente, mesmo que localmente isso não ocorra.

Figura 4.1: Objetivos específicos de aprendizagem.

Outro desafio foi o tempo disponível dos alunos para as aulas de TRG. Tivemos que usar aulas extras aos sábados pela manhã num período que não prejudicasse a preparação dos alunos para as suas provas. Foram 3 sábados com 4 tempos de 50 min cada no modelo tradicional de aula.

Aula 1: Geometria não euclidiana

No primeiro encontro, pretendemos despertar o interesse dos alunos com características da geometria não Euclidiana seguidas por introdução à sua formulação matemática. Essa aula teve duração de 3 tempos e ocorreu da seguinte maneira:

Curvaturas

O experimento a seguir é usado para diferenciar os dois tipos de curvaturas de que falamos no texto: Euclidiana (plana) e Riemanniana (esférica). Ele usa materiais bem simples e baratos [32]. Gastamos cerca de R\$30,00 na compra de todos os materiais.

A demonstração consiste em desenhar triângulos, medir e depois somar seus ângulos internos. Precisaremos dos seguintes materiais:

- Lápis
- Papel A4
- Tiras de papel
- Fita crepe
- Régua
- Transferidor
- Bexiga ou bola
- Sela

Para a geometria plana, a soma dos ângulos internos vale 180° . Pode-se pedir aos alunos que desenhem triângulos quaisquer em uma folha de papel usando lápis e régua, como na Fig. 4.2. Em seguida, usando um transferidor, eles serão capazes de confirmar o valor da soma desses ângulos.

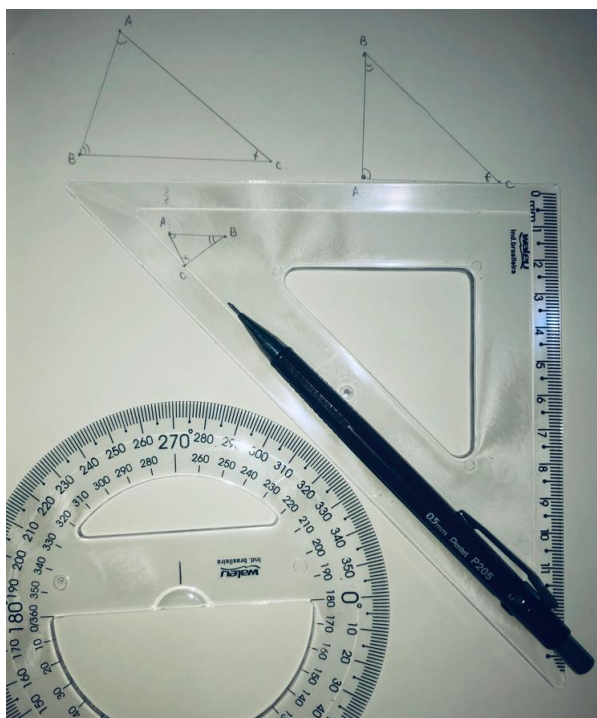


Figura 4.2: Triângulos desenhados em um pedaço de papel representando um universo plano.

Para o espaço esférico, a soma dos ângulos internos é maior que 180° . Para verificar isso, os alunos usarão três tiras de papel e as fixarão com fita crepe na superfície de uma bola, como exemplificado Fig. 4.3. Em seguida, removerão cuidadosamente o triângulo da esfera, mantendo a fita crepe unindo os lados das tiras de papel. Agora, eles esticarão cada vértice sobre a superfície de uma mesa, por exemplo, medirão cada ângulo interno e realizarão a sua soma. Essa soma deverá ser maior que 180° .

“Este experimento tem sido usado em vários cursos de astronomia universitária e seminários de verão para estudantes do ensino médio, incluindo astronomia introdutória para cursos não-científicos e cursos de nível superior,



Figura 4.3: Um triângulo feito com três tiras de papel presos com durex na superfície de um balão esférico. Removendo cuidadosamente o triângulo e medindo seus ângulos internos confirmará que a soma será maior que 180° .

como cosmologia. As classes usaram esses materiais ao discutir a gravidade, a geometria do espaço-tempo e como ela está ligada à curvatura do universo [...]
Com uma execução cuidadosa, a atividade é uma maneira simples e direta de envolver os alunos no estudo da geometria do espaço-tempo.” [32]

Para complementar essas ideias sobre curvatura, apresentamos um enigma para os alunos:

Um urso anda 1 km para o Sul, em seguida 1 km para o Leste e então 1 km para o Norte, retornando ao ponto em que começou a se mover. Qual é a cor do urso? [9]

Pode-se traçar o caminho em um globo de borracha, ou na própria bola que foi usada no experimento anterior. Do polo norte, desenhemos um caminho para o sul. De lá, iremos para o leste, nos movendo ao longo de uma linha de latitude. Finalmente viajamos para o norte, e acabamos exatamente no polo norte, mesmo ponto de partida. A rota percorrida parecerá um triângulo⁶, como visto na Fig. 4.4:

⁶Não é um triângulo, pois a linha de latitude não é um arco de grande círculo.

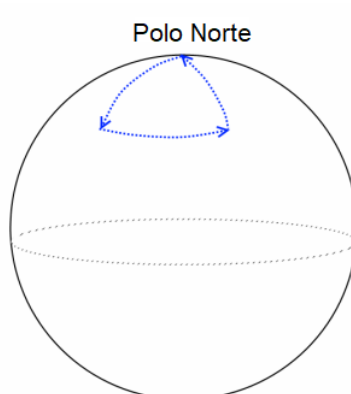


Figura 4.4: Trajetória completa do urso até retornar ao ponto inicial. O urso parte do polo norte e segue a trajetória representada pelas setas azuis.

Finalmente, podemos dizer que o urso é branco, visto que é um urso polar.

Geodésica

A teoria geral da relatividade descreve os caminhos da luz e das partículas livres como geodésicas de um espaço-tempo curvo. A noção de geodésica, portanto, é um ponto importante em qualquer introdução à relatividade geral.

“O uso dos modelos de setor podem ser usados para introduzir o conceito de geodésica e determiná-las por construção gráfica, em vez de usar resolver um sistema de equações diferenciais.” [21]

Uma linha geodésica numa superfície curva é localmente uma linha reta. Vamos apresentar alguns exemplos:

Para uma esfera, consideremos uma linha que começa no equador e sobe para o norte em uma mesma longitude. Perceba pela Fig. 4.5 uma característica dessas geodésicas: Duas linhas de longitude, que são paralelas no equador, convergem. Ou seja, essas paralelas se encontram, vide que estamos em uma superfície esférica.

Vamos tentar extrair essas propriedades da geodésica na esfera a partir dos modelos de setores, em que uma superfície esférica pode ser representada pela Fig. 4.6. Todos esses modelos são disponibilizados no trabalho [33] e podem ser baixados gratuita-



Figura 4.5: Duas linhas de longitude do equador em ao Polo Norte, representando duas geodésicas em uma esfera.

mente no site https://www.spacetimetravel.org/list_of_sectormodels/list_of_sectormodels.html.

Agora, desenhamos a geodésica dentro de um setor, que localmente é uma linha reta. Quando a linha chega à fronteira de um setor, ela continua no setor vizinho. Pode-se ver que as duas geodésicas iniciando em paralelo no canto inferior esquerdo convergem para o lado direito com na Fig. 4.6.

Mapas

Em muitas situações cotidianas, é necessário estudar a geometria de superfícies curvas. Para planejar uma grande viagem de avião ou barco, por exemplo, é preciso compreender a geometria de uma superfície esférica. Olhe para o mapa e localize dois lugares em uma mesma latitude como Porto e Nova Iorque (41° N). Para onde um avião deveria seguir viagem para percorrer o menor caminho entre as duas cidades?

Será uma linha reta? Essa seria um ótima resposta. Vamos desenhar essa *reta* no globo para verificar o caminho. Observe que o avião não voa diretamente para oeste, ao longo da mesma latitude, ele deve voar para noroeste, virando para oeste e finalmente para

sudeste como pode ser visto na Fig. 4.8. Isso evidencia que a geodésica sobre uma esfera não é exatamente uma linha reta, mas, nesse caso, é um arco de grande círculo, conforme já ilustramos na Fig. 3.2.



Figura 4.8: Uma viagem com menor caminho entre dois pontos na mesma latitude.

Qual a relação disso com a gravidade? Por enquanto nenhuma. Mas já estamos aprendendo a lidar com geometrias diferentes da tradicional Euclidiana.

Agora observe os pontos no mapa da Fig. 4.9 e imagine-os descendo cada um em seu próprio meridiano. Qual a trajetória que eles vão seguir? É paralela? As bolinhas se afastam e depois de aproximam. Será que há uma interação entre elas de atração e depois de repulsão? Ou podemos simplesmente dizer que elas seguem um caminho *reto* nessa nova geometria?



Figura 4.9: Dois pontos em meridianos diferentes partindo do Polo Norte em direção ao Polo Sul.

Essa trajetória *paralela* pode ser vista no mapa planificado da figura 4.10. Dessa forma, poderíamos dizer que as bolinhas seguem trajetórias paralelas entre si apesar da distância aumentar e depois diminuir. Nesse caso, a mudança da geometria facilitar a maneira como descrevemos a trajetória dos corpos.

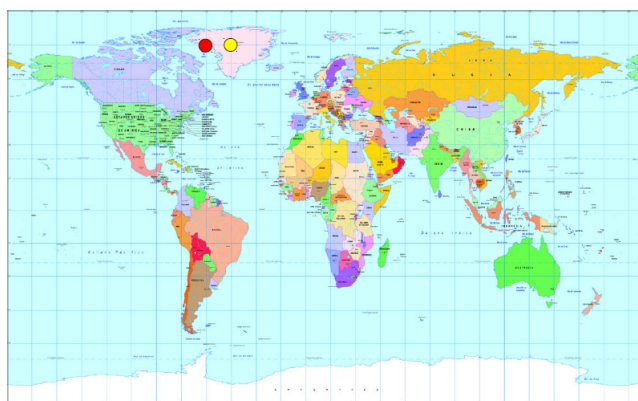


Figura 4.10: Dois pontos em meridianos diferentes partindo do Polo Norte em direção ao Polo Sul num mapa plano representando a Terra.

Aula 2: Noções básicas de TRG

Nessa aula, vamos apresentar os principais conceitos físicos para construção da relatividade geral. Pela disposição do nosso horário, essa aula ficou dividida em 2 semanas. Na primeira, usamos 1 tempo restante da Aula 1 para falar somente do princípio de equiva-

lência. Já na segunda semana, usamos 2 tempos para falar dos fenômenos físicos usando esse princípio.

Princípio de equivalência

Iniciamos pelo princípio de equivalência, em que descrevemos a diferença entre massas inercial, gravitacional ativa e passiva. Como primeira ilustração desse fenômeno, apresentaremos o vídeo da BBC, exibindo a queda simultânea de uma pena e uma bola de boliche em uma câmara de vácuo [10]. Em seguida, veremos que essa igualdade é uma das medidas experimentais mais precisa da física. Para ilustrar essas ideias, mostraremos um vídeo do físico Brian Greene [34], em que ele abandona uma garrafa furada em queda livre. Para a água, é como se não houvesse gravidade e, portanto, ela para de vaziar pelos orifícios.

Campo gravitacional

A seguir, usaremos os experimentos descritos no Capítulo 2 para percebermos ser impossível distinguir um referencial acelerado de um em queda livre em um campo uniforme. Dois corpos abandonados caem com a mesma aceleração, assim ambos os efeitos de queda devem ter a mesma origem. A sugestão de Einstein foi tratar a gravidade como uma força inercial.

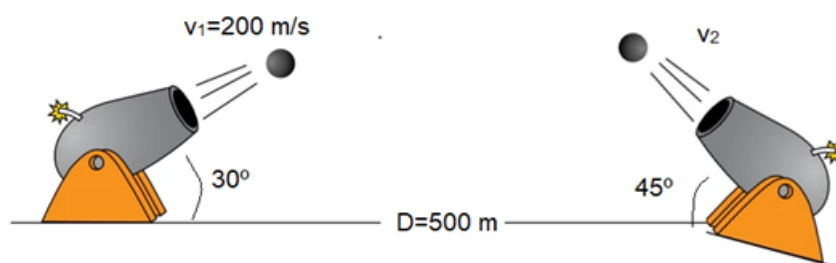


Figura 4.11: Questão mostrando dois canhões atirando projéteis. Um projétil é arremessado sob ângulo de 30° e com velocidade $v_1 = 200 \text{ m/s}$. O outro é arremessado sob ângulo de 45° e com velocidade v_2 desconhecida.

Vamos propor um exercício simples de lançamento oblíquo para ilustrar as aplicações do princípio de equivalência. A questão, ilustrada na Fig. 4.11, mostra dois canhões arremessando projéteis simultaneamente. Queremos calcular a velocidade de um deles para que os objetos se interceptem e em qual instante isso acontece. Ele pode ser facilmente resolvido para um referencial em queda livre, no qual a gravidade parece deixar de existir e a trajetória dos projéteis é retilínea e uniforme, conforme representado na Fig. 4.12.

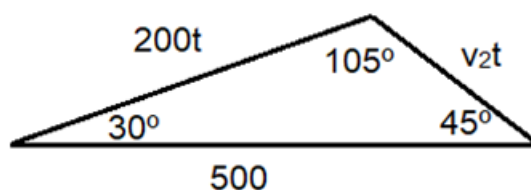


Figura 4.12: Representação da trajetória dos projéteis vistas por um referencial em queda livre.

Usando a lei dos senos, teremos:

$$\frac{500}{\sin 105^\circ} = \frac{200t}{\sin 45^\circ} = \frac{v_2t}{\sin 30^\circ},$$

$$v_2 = \frac{200 \cdot 1/2}{\sqrt{2}/2} = 100\sqrt{2} \approx 141 \text{ m/s}, \quad (4.1)$$

$$t = \frac{500 \cdot \sqrt{2}/2}{200 \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}} = 5 \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \approx 1,83 \text{ s}. \quad (4.2)$$

Desvio para o vermelho gravitacional

Agora começaremos com os fenômenos físicos, onde faremos contas para ilustrar efeitos. De posse do princípio da equivalência, resultados produzidos por um campo gravitacional uniforme são equivalentes aos efeitos observados em referenciais com aceleração constante em relação a um referencial inercial.

O efeito Doppler não relativístico e a constância da velocidade da luz resultarão numa variação da frequência recebida por um observador em um potencial gravitacional maior,

causando uma *dilatação temporal*. Nesse caso, os relógios passam mais devagar quando afetados pelo campo gravitacional mais intenso.

Vale ressaltar que isso não é uma hipótese. Ela já foi testada no experimento de Pound-Rebka [14] sob ação do campo gravitacional terrestre.

Deflexão da luz

Agora ilustraremos como o princípio de equivalência prevê qualitativamente o desvio sofrido pela luz em um campo gravitacional uniforme usando o exemplo [11] de um foguete se deslocando com aceleração constante com uma fonte de luz F , emitindo um raio de luz perpendicular ao campo. Para o observador S' , dentro do foguete, a luz viaja em linha reta e sai pelo orifício P . Entretanto para um observador externo S , o raio luminoso descreverá uma parábola. Portanto, há deflexão dos raios luminosos num campo gravitacional, como já foi representado na Fig. 2.6.

Faremos a conta desse desvio para um foguete de 1 km de extensão, resultando numa deflexão da ordem de 1 Å. Para algumas turmas que já possuem conhecimento de integral, podemos aplicar um raciocínio análogo para calcular a deflexão gravitacional de um raio luminoso que passa próximo ao Sol, como o cálculo usado na Fig. 2.7. A estimativa será de cerca de $0,87''$. Esse resultado é metade do verificado pelo eclipse de 1919. Veremos a razão dessa diferença mais adiante.

Aula 3: Métrica

Nessa aula, vamos abordar os conceitos matemáticos necessários para a TRG. Mais uma vez, a aula foi dividida em duas semanas. Na primeira, dois tempos após a **Aula 2** para falarmos da teoria da relatividade restrita e sistema de coordenadas. Já na segunda semana, 1 tempo para a abordagem geométrica sobre as métricas espaço-temporais.

Relatividade restrita

Iniciaremos com a relatividade restrita e o experimento do relógio de luz para descrevermos o intervalo espaçotemporal. Cabe ressaltar que os alunos já foram contemplados com esse assunto no decorrer do ano letivo. Caso contrário, faz-se necessário ensinar o conteúdo com mais calma. Abordando desde os postulados de Einstein até as transformações de Lorentz como no Apêndice A. O invariante que surge independe do referencial inercial é descrito como pela Eq. (A.10): $ds^2 = -(cdt)^2 + (dx)^2$.

Sistemas de Coordenadas

Em seguida, faremos uma revisão sobre como encontrar a distância entre dois pontos em alguns sistemas de coordenadas. Essa distância será análoga ao cálculo integral e será denominado **geometria diferencial**.

Coordenadas cartesianas

Dados dois pontos em um sistema de coordenadas cartesianas bidimensionais, a distância (Δs) entre eles pode ser encontrada usando o teorema de Pitágoras:

$$\Delta s^2 = x^2 + y^2 \quad (4.3)$$

Observe que nesse sistema, a distância entre dois pontos é invariante se rotacionarmos os eixos como representado na Fig. 4.13 e descrito pela Eq. (4.4).

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2 \quad (4.4)$$

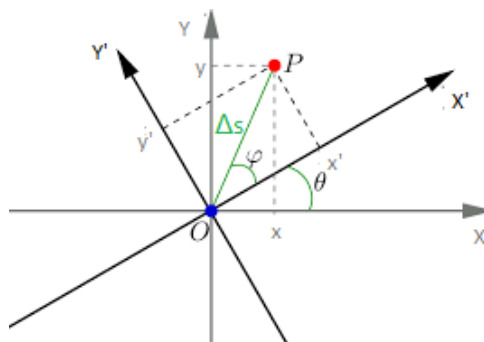


Figura 4.13: Representação de uma rotação de eixos para demonstrar a invariância do módulo de um vetor.

Coordenadas esféricas

Para coordenadas esféricas conforme a figura 3.5, temos a Eq. (4.5):

$$\Delta s^2 = (R\Delta\theta)^2 + (R \cos \theta \Delta\phi)^2 \quad (4.5)$$

Diagramas espaçotemporais

A fim de representarmos os eventos usando a geometria, descrevemos um sistema quadridimensional (t, x, y, z) que será representado por um diagrama de espaço-tempo. Cada evento será um ponto nesse sistema dizendo onde x_P e quando t_P ele ocorreu. Uma partícula descreverá sua trajetória espaçotemporal por uma linha de mundo. Assim como na cinemática tradicional, a inclinação da reta tangente a essa linha de mundo nos fornecerá o valor da velocidade como uma fração de c . Isso ocorre porque um dos eixos não é o tempo exatamente, mas a coordenada temporal multiplicada por c a fim de que os eixos tenham a mesma dimensão.

Cones de Luz

As trajetórias dos raios de luz serão essenciais para descrição das métricas espaçotemporais, portanto devemos saber representá-los nos diagramas. Como a velocidade da luz no vácuo é um limite, nada é mais rápido que ela, portanto qualquer linha de mundo de uma partícula deve estar contida no interior do cone formado pela trajetória da luz. Cabe

ressaltar que a geratriz do cone está inclinada de 45° como na Fig. 3.8. Para simplificar, vamos usar apenas duas dimensões: uma espacial e outra temporal como a da Fig. 4.14.

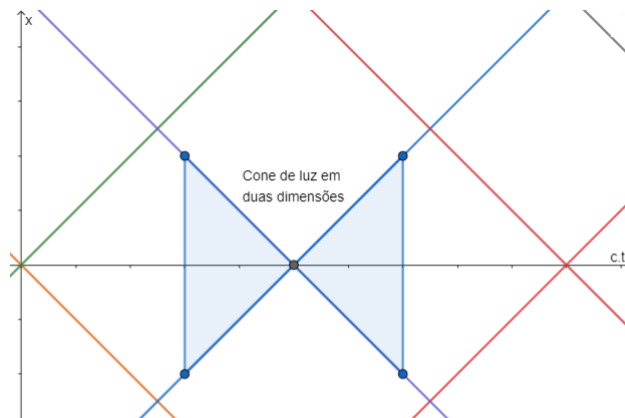


Figura 4.14: Malha de cones de luz bidimensional em um espaço de Minkowski.

A curvatura do espaço-tempo pode ser observada geometricamente como uma malha de cones de luz deformadas como a representação da Fig. 3.9.

Aula 4: Fenômenos gravitacionais

Geodésica

Finalmente entraremos nos fenômenos gravitacionais como buraco negro e dobra espacial. Levaremos nossos três tempos finais desenvolvendo esses conceitos. Mas antes disso, vamos redefinir a geodésica como a trajetória seguida por uma partícula livre entre dois pontos com separação do tipo tempo. Esse percurso extremiza o tempo próprio entre eles, análogo ao princípio de Fermat na óptica geométrica.

Equação de Einstein

Não podemos falar da TRG sem apresentar as equações que regem esses fenômenos.

“A equação de Einstein governa a geometria do espaço-tempo curvo, equação básica da relatividade geral [...] Ela é o equivalente das equações de Maxwell para o eletromagnetismo.” [1]

Dessa forma, qualquer fonte pode provocar uma deformação na componente espacial da métrica representada por uma função $f(\Phi)$, originando um elemento de linha com a forma da Eq. (3.25). Mas em coordenadas Cartesianas, teríamos:

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) (cdt)^2 + f(\Phi) (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (4.6)$$

onde Φ é o potencial gravitacional.

Deixamos a pergunta aos alunos: Qual é a origem dessa deformação? Eles devem responder prontamente massa ou gravidade, baseado nas ideias de TRG de que eles já ouviram falar.

Princípio da correspondência

Para não entrarmos em uma matemática tão complexa para os alunos, vamos trabalhar com o princípio da correspondência. Assim, a TRG deve se reduzir à lei do inverso do quadrado das distâncias em um certo limite⁷. E a gravitação é um fenômeno que depende do potencial gravitacional, cujo valor é proporcional à massa M da fonte.

Buraco negro

Vamos usar novamente os buracos negros, mas dessa vez com a métrica de Schwarzschild, como a geometria fora de uma estrela esférica de massa M . O elemento de linha aparece na Eq. (3.28), usando a aproximação para potenciais pequenos.

Com isso, demonstramos o efeito Doppler gravitacional verificando que os relógios passam mais devagar quando afetados pelo campo gravitacional. O experimento de Pound-Rebka também é citado como uma comprovação experimental do fenômeno.

Se a conta se mostrar muito complexa, pode-se usar uma analogia com fótons sendo lançados verticalmente sob um campo gravitacional. Pela conservação da energia, eles ganham energia potencial gravitacional, perdendo *energia cinética*, que estaria relacionada

⁷Como precisaríamos das equações de Euler-Lagrange, não conseguimos transpor didaticamente a TRG para gravitação Newtoniana.

à frequência pela equação de Planck $E = hf$. Dessa forma, se usarmos os fótons para medir o tempo, aqueles que estiverem mais próximos à superfície do planeta de onde foram *arremessados* terão menor período e por isso o tempo passa mais devagar.

Vale também falar sobre o horizonte de eventos como um limite físico de acesso ao espaço-tempo. Não sabemos o que há *dentro de um buraco negro* a não ser que a curvatura diverge naquele ponto. Ou seja, a TRG não fornece informações sobre todo o espaço-tempo.

Como curiosidade podemos comentar sobre o processo de formação desses objetos após a *morte* de uma estrela. Também mostraremos por imagens o significado do horizonte de eventos e da singularidade de um buraco negro.

Como em Abril de 2019 o mundo parou pela primeira imagem de um buraco negro [35], vale mostrar um vídeo para que os alunos entendam o processo que levou a essa fotografia. Pode ser passado durante as aulas ou para casa o vídeo do Canal Veritasium - Como Entender a Imagem de um Buraco Negro legendado em português para aqueles com dificuldade no inglês [36].

Velocidade de dobra espacial

Vamos usar os cones de luz bidimensionais e perguntar aos alunos quais trajetórias da Fig. 4.15 são possíveis. Partindo de C é possível chegar a D , G ou F ? Eles devem ser capazes de responder que F é possível, pois está dentro do cone; G pode ser atingido somente à velocidade da luz; e D é impossível pois está fora do cone e necessitaria de uma velocidade superior a da luz para fazê-lo.

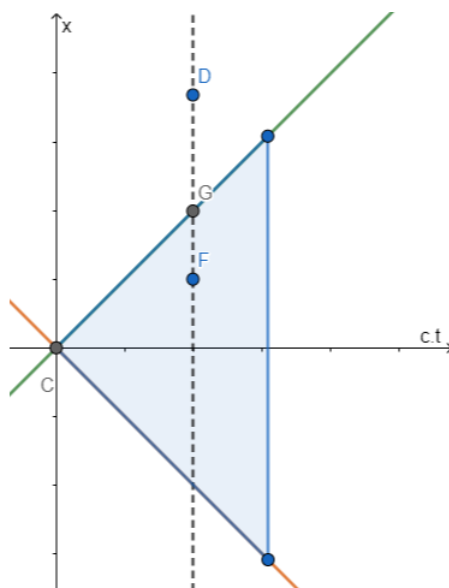


Figura 4.15: Representação dos tipos de pontos num diagrama espaço-tempo.

Mostraremos então uma linha de mundo entre os pontos C e D , mas com um espaço encurvado como o da Fig. 3.16 e perguntaremos novamente se é possível realizar tal trajetória. Eles devem observar que a linha de mundo está contida nos cones de luz, mas estes se encontram *entortados*, sendo então possível realizar a trajetória. Mas o que causaria essa deformação no espaço-tempo? Não entraremos em detalhes sobre a formação dessa *bolha* descrita por Alcubierre, mas já fica ilustrado que as dobras espaciais são previstas pela teoria, apesar de não haver meios ainda de construí-las por diversos motivos como a energia negativa e matéria exótica.

4.5 Questionário

Na tentativa de avaliar se os objetivos das aulas foram atingidos, usaremos um questionário online feito pela plataforma do GoogleForms. A sua construção terá como base os objetivos segundo [37]. Algumas perguntas terão respostas abertas a fim de estimular a cooperação e cobrir mais pontos que podem não estar englobados diretamente nas perguntas. Apesar de serem menos objetivas e mais demoradas para analisar, o grupo de alunos não será grande e poderemos compreender melhor quais ideias os alunos assimilaram ou

não. Outras perguntas serão em formato múltipla escolha, pois não darão margem a erros e serão utilizadas como métrica no processo de avaliação.

O questionário está a seguir com o modelo de cada questão.

1. Quantos anos você tem?

2. Você assistiu a quantas aulas?

3. Quanto vale a soma dos ângulos internos de um triângulo?

Caixa de seleção⁸: igual, maior ou menor que 180°

4. Duas retas paralelas ...

Caixa de seleção: nunca se encontram; encontram-se no infinito; convergem; divergem

5. Existe uma relação entre a geometria e gravidade?

6. Você sabe enunciar o princípio de Fermat para a óptica geométrica?

7. O que é uma geodésica?

8. Uma garrafa cheia de água com vários furos na lateral é abandonada do 2º andar de um prédio. Durante a sua queda, o que ocorre com a água que saía pelos orifícios?

9. A luz, segundo a mecânica clássica, não possui massa. Ela pode então sofrer ação da gravidade?

Múltipla escolha⁹: sim; não; depende

10. Descreva como ocorre um eclipse solar.

11. Por que durante o dia não podemos ver as estrelas no céu, com exceção do Sol? E durante um eclipse solar essas estrelas ocultas podem ser observadas?

⁸Permite a marcação de mais de uma opção

⁹Permite a marcação de uma única opção

12. O princípio da equivalência foi “a ideia mais feliz” de Einstein. Sobre o que ele fala?
13. Como o princípio de equivalência pode ser usado para demonstrar o *redshift* gravitacional e o desvio da luz?
14. Você saberia calcular a distância entre dois pontos em algum sistema de coordenadas? Qual?
Caixas de seleção: Sim, coordenadas cartesianas; Sim, coordenadas polares; Sim, coordenadas esféricas; Sim, outra; Nenhuma
15. O que é o intervalo espaçotemporal?
16. O que são cones de luz?
17. Pode algum corpo se mover mais rápido que a luz?
Múltipla escolha: Sim; Não; Depende
18. O que é um buraco negro?
19. Como, na teoria, funciona a dobra espacial?
20. Qual assunto você gostaria que fosse abordado nessas aulas?
21. Do que mais você gostou nessas aulas?
22. Do que menos você gostou nessas aulas?
23. O quanto essas aulas fizeram você apreciar física?
Escala linear¹⁰: 1. Odeio física até 5. Vou cursar física na graduação
24. Deixe a sua opinião:

¹⁰Uma escala de 1 a 5

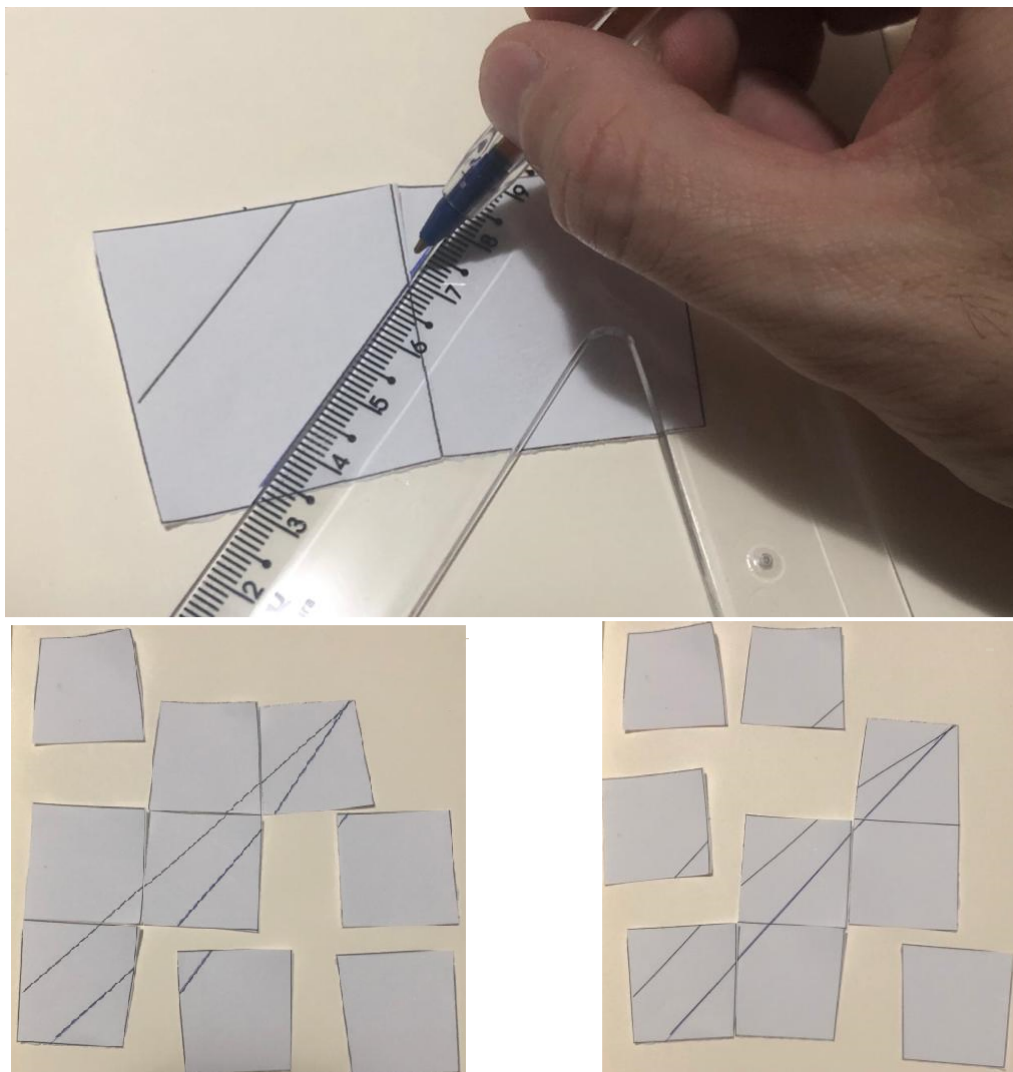


Figura 4.6: Construção de uma geodésica em um modelo de setor. Os setores são unidos pelos vértices adjacentes para desenhar a geodésica, localmente uma linha reta. Traçamos duas geodésicas que se iniciam paralelas no setor inferior esquerdo.

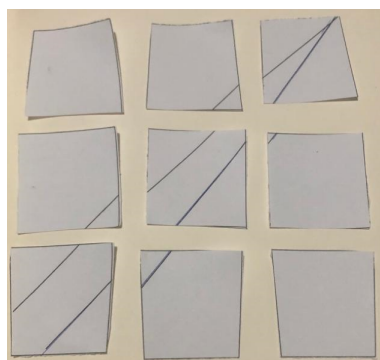


Figura 4.7: Duas geodésicas desenhadas no modelo de setores. Elas são paralelas no setor inferior esquerdo, mas convergem para o lado superior direito.

Capítulo 5

Relatos das aulas

Esse minicurso de quatro aulas foi aplicado três vezes no final de 2019. Uma turma mista com 10 alunos da 1^a e 2^a séries; outra turma continha apenas 6 alunos da 2^a série e a última possuía 8 alunos da 3^a série. Todos os alunos pertenciam à mesma escola e cursavam turmas preparatórias para os concursos militares mais difíceis do país, como o IME¹ e o ITA. Todos os alunos dessas turmas foram convidados, mas eles participaram por vontade própria, sem nenhum tipo de seleção. Queremos deixar um relato de como foram as aulas e a minha impressão do curso.

5.1 Primeira aula

No início da aula quando os alunos deveriam realizar medidas dos ângulos, percebi que eles não sabiam usar o transferidor. Na primeira aplicação, os alunos fizeram as atividades e concluíram antes da medida que a soma dos ângulos do triângulo na esfera seria maior que 180° . Além disso, foram capazes de responder “Como esse experimento poderia ser usado para demonstrar que a Terra é curva e não plana?”. Construindo um triângulo muito grande sobre a Terra e então medindo seus ângulos. Mas ainda não parecia haver nenhuma relação da curvatura com a gravidade. Pelo menos um deles em cada aula foi capaz de responder corretamente ao enigma do urso. Disse que o urso era branco e descreveu adequadamente a trajetória que ele executaria para retornar ao ponto inicial.

¹Instituto Militar de Engenharia, no Rio de Janeiro.

Não houve mistério também na trajetória descrita pelas partículas vermelha e amarela sobre os meridianos da Terra. Rapidamente eles associaram o desenho à superfície do planeta. Foi então com a planificação do mapa que surgiu a ideia de *linha reta* para explicar a trajetória dos pontos. Sendo assim, a curvatura da Terra dizia como as partículas deviam se mover. Um deles concluiu que talvez a gravidade fosse uma curvatura e as partículas andariam em MRU (movimento retilíneo uniforme) sobre essa superfície.

Em seguida, usando caneta hidrocor, fizemos possíveis desenhos de trajetórias dos corpos sobre a esfera para vermos que os meridianos partindo perpendiculares ao equador e paralelos entre si, encontram-se. A fim de descrevermos essas superfícies curvas, o conceito de geodésica foi introduzido como o menor caminho possível entre dois pontos, numa superfície localmente é uma reta. Os alunos fizeram um paralelo com o princípio de Fermat da óptica geométrica, em que o raio de luz sempre faz a trajetória no menor tempo possível.

Usando a ideia do livro *Flatland* sobre seres que vivem em apenas duas dimensões, pudemos verificar como esses seres podem avaliar uma dimensão superior, mesmo sem ter acesso direto a ela. No nosso caso, somos seres tridimensionais e podemos estudar a quarta dimensão, mesmo sem poder acessá-la. Para isso apresentamos os modelos de setores, que, para alguns alunos, pareceram redundantes com toda explanação prévia, mas mesmo assim eles ficaram surpresos ao desenharem as geodésicas e verem a sua interseção.

O último assunto da aula foi o que mais chamou a atenção deles. Com várias ideias equivocadas de que um buraco negro é uma espécie de fosso cósmico que sugaria todos os corpos, inclusive a luz, tivemos que dar mais atenção à sua definição. Falamos brevemente sobre o processo de evolução estelar, assunto que não havia sido previsto inicialmente, até que eles percebessem que os buracos negros não seriam mais exóticos que uma estrela apagada com gravidade muito grande. Assim, pudemos usar os modelos de setores para desenhar a geodésica de um raio luminoso que passa próximo a um desses objetos astronômicos. De forma geral, os desenhos nos modelos de setores não atraiu muito a atenção

dos alunos.

5.2 Segunda aula

Essa pareceu aos alunos uma aula muito interessante e poderia ter sido a primeira para aqueles com maior aptidão em matemática e física. Quando questionados, ninguém tinha ouvido falar do princípio de equivalência, que parecia muito óbvio para eles. E talvez não tenha ficado clara a diferença entre as massas inercial e gravitacional. Com a analogia da carga elétrica, essa ideia ficou melhor definida e assim pudemos avançar para o vídeo do Brian Greene e da garrafa vazada em queda livre [34].

No exemplo da simulação do campo gravitacional com o foguete acelerado não ficou claro onde aparecia o princípio de equivalência, mesmo eles tendo entendido a gravidade como uma aceleração. Ao usarmos o primeiro exemplo dos canhões, alguns deles tentaram resolver escrevendo as equações das parábolas. Mas foram interrompidos quando perguntei qual seria a trajetória dos projéteis vista por um referencial em queda livre. Depois de pensarem um pouco, alguns chegaram à conclusão do movimento retilíneo e foram capazes de *resolver a questão em uma linha*. Aparentemente eles ficaram deslumbrados em como a mudança de referencial poderia facilitar a resolução de um problema.

Depois dessa atividade, ficou elucidado que um foguete acelerado e a aceleração da gravidade causavam os mesmos efeitos², portanto era equivalente trocá-los quando fosse conveniente. No desvio para o vermelho houve um problema pois alguns deles não conheciam a equação do efeito Doppler, embora já tivessem ouvido falar do fenômeno. Fiz um resumo breve da equação e sua aplicação antes de começarmos os cálculos. Depois dessa breve explanação, realizamos o cálculo do efeito Doppler para um foguete acelerado simulando a gravidade. O resultado foi interpretado por um aluno não apenas em função da frequência, mas da energia. Como se parte da energia do fóton³ tivesse sido

²Para um campo gravitacional uniforme.

³Nessa turma, os alunos já tiveram contato com introdução à Mecânica Quântica.

perdida para a potencial gravitacional, assim como ocorre em um lançamento vertical. A conclusão guiada foi que os relógios passam mais devagar quando afetados pelo campo gravitacional. E um deles citou o filme *Interestelar*, em que ocorre tal fenômeno.

Continuando com a simulação da gravidade pelo foguete acelerado, pudemos calcular a deflexão sofrida pela luz devido à aceleração constante. Para um referencial dentro do foguete, onde há gravidade, a luz é defletida. Já para um referencial externo, a luz segue em linha reta, enquanto o foguete sobe. Com um cálculo simples de lançamento horizontal, determinamos o desvio sofrido pela luz em um trajeto de 1 km sob ação do campo gravitacional terrestre. Como as turmas já tinham noções básicas de cálculo diferencial, também fomos capazes de calcular a deflexão que o Sol faria em um raio de luz que o tangencia. Devido à turma ser heterogênea, alguns estudantes só apreciaram o resultado final.

Comparamos os resultados com o modelo de seção do buraco negro argumentando que esse objeto seria ainda mais capaz de desviar a luz. Também apresentamos o resultado do eclipse de Sobral, mostrando que o cálculo anterior estaria equivocado. Cometendo um anacronismo proposital perguntamos onde estava o erro. Depois de alguns intempéries, um aluno disse que usamos geometria *plana*, querendo se referir à Euclidiana. Portanto mesmo sem ter chegado a tal conclusão, devia haver uma outra geometria para descrever o espaço-tempo.

Essa foi uma ótima aula, em que os conceitos físicos foram amplamente discutidos.

5.3 Terceira aula

Iniciamos a aula falando mais uma vez sobre o princípio de equivalência, em que podemos trocar um campo gravitacional uniforme por uma aceleração constante. Em seguida ilustramos uma deformação num sistema cartesiano para verificar que a distância entre dois pontos adjacentes depende da posição deles.

Agora iremos apresentar o relógio de luz para demonstrarmos o fenômeno da dilatação

temporal e de onde surge o invariante do intervalo espaçotemporal. A relatividade restrita será vista como a geometria de Minkowski e uma combinação do tempo e espaço sobreviverão a esses novos fenômenos de dilatação temporal e contração espacial. Em uma das aplicações, a turma já havia estudado a TRR e ela fora apenas lembrada. Em outra aplicação, tivemos que passar mais tempo debatendo os efeitos temporais. Portanto, a TRR deve fazer parte de um conhecimento prévio para essas aulas ou fazer parte do curso.

Em seguida, apresentamos as coordenadas cartesianas e esféricas como uma forma de rotular os pontos no espaço comentando sobre a vantagem de existirem várias maneiras de fazer esses rótulos. Definimos, em seguida, a **geometria Riemanniana** como método para encontrar a distância entre dois pontos em qualquer sistema de coordenadas. Usando uma esfera de raio a para representar uma geometria não Euclidiana, iremos calcular a distância entre dois pontos muito próximos um do outro para representar como operar a geometria Riemanniana em um sistema de coordenadas conhecido. Usando o elemento de linha ds^2 , vamos calcular o comprimento da circunferência, em que aparece uma fórmula com o seno de um ângulo, já que não estamos numa geometria Euclidiana. Usamos o limite do raio da esfera indo para infinito e chegamos à fórmula do comprimento da circunferência tradicional $2\pi r$. Na primeira aplicação, confundi-me um pouco com o sistema de coordenadas e isso prejudicou alguns alunos em entenderem o que estava sendo calculado. Em outra aplicação, as coordenadas foram melhor definidas e ficaram mais intuitivos os resultados apresentados.

Depois passamos para as coordenadas do espaço-tempo definindo o elemento de linha como ds^2 na forma cartesiana e esférica. Houve algumas dúvidas com relação ao termo $(cdt)^2$ e que essa quantidade era a distância entre dois pontos num espaço-tempo. Usamos o *redshift* para alterarmos a componente temporal em função do potencial gravitacional. E usando o desvio da luz precisamos ter uma alteração também nas componentes espaciais. Nesse momento um dos alunos perguntou o que causaria essa mudança no espaço-tempo. Essa dúvida seria respondida com o princípio da correspondência. Fizemos um anacro-

nismo para “roubar” o resultado da mudança na métrica espacial.

De posse das coordenadas, vamos apresentar os diagramas espaçotemporais com uma dimensão temporal e outra espacial. Aqui já multiplicamos o tempo pela velocidade da luz c de maneira a igualar as dimensões representadas. Imediatamente eles reconheceram os gráficos da cinemática e a inclinação da reta como a razão entre a velocidade do corpo e a da luz. Os cones de luz foram mais intuitivos, pois eles já reconheceram a constância da sua velocidade e a inclinação 45° . Também já escrevemos a velocidade da luz com o valor unitário. Diferenciamos os possíveis sinais para o ds^2 definindo os cones de luz do passado e do futuro. A curvatura do espaço-tempo será uma deformação da malha de cones de luz e daí que surgem o desvio na sua trajetória. Já deixamos o gancho pois na próxima aula, iniciaremos com o princípio da correspondência para justificar que são as massas que causam tal deformação no espaço-tempo.

5.4 Quarta aula

Iniciamos descrevendo a geodésica como o percurso de uma partícula livre em um espaço-tempo. Os alunos conseguiram fazer a analogia com o uso de derivada e igualar a zero para extremizar o intervalo espaço temporal e achar a equação da trajetória. Para introduzir as equações de Einstein, escrevemos as equações de Maxwell do eletromagnetismo, já conhecida por vários alunos, e apresentamos uma solução particular para a lei de Gauss no caso de uma carga pontual. A ideia aqui foi dizer que as equações de Einstein são muito amplas e complexas, por isso vamos trabalhar com soluções particulares. Agora vamos colocar uma métrica com uma função que altera a parte espacial perguntando qual é a origem dessa deformação. Os alunos já disseram que é a gravidade ou a massa responsável por essa mudança na métrica espacial.

Para justificar que realmente são as massas que causam essa deformação espacial, usamos o princípio da correspondência sem fazer as contas para chegar à equação de Newton para a gravitação. Exibimos a relação de Einstein entre o tensor curvatura e o

energia-momento e sem contas, mostramos a lei da gravitação de Newton. E para ilustrar uma aplicação, mostramos a métrica de Schwarzschild para um buraco negro por se tratar de um fenômeno gravitacional de grande interesse. Usando essa métrica, demonstramos o efeito Doppler gravitacional. Acredito que os alunos não tenham entendido nada da conta apresentada, a não ser o resultado final, talvez pelo uso do tempo próprio, que eles não estavam tão acostumados. Eles perguntaram sobre usar essa métrica para o desvio da luz, mas a conta não é tão fácil e deixamos de lado. Em seguida, discutimos as propriedades do buraco negro: não ter acesso a todo o espaço-tempo, horizonte de eventos, deformações dos cones de luz e como essas características mostram a deflexão da luz. Inspirado na primeira observação de um buraco negro [35] em abril/2019, recomendamos o vídeo do Veritasium [36] sobre a primeira imagem de um buraco negro.

Sobre a velocidade de dobra, iniciamos com o cone de luz do futuro e sobre a possibilidade de fazer uma viagem em um tempo menor que a luz faria. Pelos desvios do cone de luz, os alunos acharam que a gravidade poderia ter feito aquela deformação. Mas eles parecem ter entendido a ideia central dos desvios desses cones de luz e a viagem ser feita com velocidade menor que a da luz (dentro do cone), mas aparentemente maior que a da luz vista pelo “lado de fora”. Então podemos fazer um motor de dobra? Ainda não! Explicamos o problema da energia negativa e da matéria exótica como vistos nas séries como *Flash* e *Star Trek*.

Uma das perguntas interessantes foi se era possível girar o cone de luz “para trás” e viajar para o passado. Respondi que este assunto até hoje é debatido nos meios acadêmicos. Outra pergunta foi sobre o que há dentro do buraco negro. Mas essa pergunta não pode ser respondida pela TRG por causa da divergência da curvatura naquela região. Por um motivo os alunos ficaram abismados sobre TRG não ser a teoria definitiva da física e ainda ter muitas coisas a serem descobertas. Eles pareciam interessados em quem estuda “essas coisas” e pareceram bem motivados em participar desse processo de descobertas. Eles ficaram muito empolgados com a ficção de viagem no tempo.

5.5 Análise das respostas

A análise das respostas revela alguns aspectos importantes do que os alunos aprenderam com as aulas, pois o questionário foi aplicado cerca de dois meses após as aulas. 80% dos alunos assistiram a pelo menos três das quatro aulas e possuem 15 ou 16 anos de idade.

Na relação entre a gravidade e geometria, associaram a gravidade a alteração do “plano”. Muitos enunciaram corretamente o princípio de Fermat e disseram que a geodésica era o caminho mais curto entre dois pontos. Já sobre o buraco negro, ninguém deu uma resposta equivocada como “um objeto que suga tudo, até mesmo a luz”; apenas relataram ser um corpo muito massivo com grande atração gravitacional.

Apesar de responderem corretamente o que aconteceria com a água saindo da garrafa em queda livre, alguns não associaram ao princípio de equivalência. Devemos nas aulas dar mais ênfase a tal fenômeno. Outros responderam corretamente que um corpo em queda livre não sentiria seu próprio peso. Esses alunos também responderam que um campo gravitacional poderia ser substituído por uma aceleração para demonstrar a deflexão da luz e o desvio para o vermelho gravitacional.

Não houve dúvidas no processo de formação do eclipse nem na razão de não vermos estrelas (sem ser o Sol) no céu diurno, pois o Sol as ofusca. Mas nenhum deles soube responder o que era o intervalo espaçotemporal. Assim, devemos enfatizar melhor essa grandeza, pois ela relaciona diferentes referenciais, sendo também a grandeza em cuja definição aparece a métrica do espaço-tempo.

Eles parecem ter entendido a ideia dos cones de luz, mas não ficou claro o conceito de passado e futuro. Um deles respondeu “Dentro dele (do cone de luz) há todos os fenômenos visíveis para o observador e o que se encontra fora dele é como se não existisse.” Apesar disso, alguns descreveram adequadamente a dobra espacial como uma rotação desses cones.

Muitos pediram mais assuntos de mecânica quântica nas próximas aulas e ideias de

viagem no tempo. No geral, eles gostaram das aulas como um todo. Algumas respostas merecem destaque: “O conteúdo na internet sobre o assunto é muito limitado ao meio acadêmico, com uma linguagem nada acessível. Essas aulas conseguiram traduzir muito bem essa física com conceitos e cálculos avançados para um público menos maduro.” Apesar deles se chamarem de menos maduros, trata-se de um público que se prepara para os concursos mais difíceis do país. Alguns não gostaram dos modelos de seção ou da geometria, mas alegaram ter sido ao menos interessante.

A escala de apreciação continha apenas notas 4 e 5, ou seja, eles gostaram muito das aulas e ficaram felizes por terem participado dessa experiência. Nesse novo ano letivo, muitos deles perguntaram sobre o andamento da dissertação e se haveria novas aulas. Uma das opiniões vale destaque “Gostei muito da experiência de ter um contato mais formal com a teoria da relatividade, que antes só obtive por meio da internet e livros de divulgação científica. Consigo enxergar aulas especiais como essas, acontecendo de forma opcional para os alunos do ensino médio, abordando não só a Teoria da Relatividade, mas também outros tópicos. Isso ajuda muitos jovens a saciar a curiosidade sobre esse assunto, que atualmente é bem popular. Além disso, introduz, de modo acessível, os jovens a tópicos que são, em sua maioria, limitados para o meio acadêmico. Eu, particularmente, gostaria muito de ter outra experiência como essa sobre outros temas, como Mecânica Quântica e Economia.”

5.6 Últimas impressões

Quatro aulas é um tempo ínfimo para um curso de TRG. Muitos temas de grande curiosidade dos alunos ficaram de fora como buracos de minhoca, lentes gravitacionais, matéria escura, etc. Além disso, muitos deles se mostraram interessados em se aprofundar nos temas com mais matemática envolvida. Uma amostra de que eles são capazes e interessados em temas de alta complexidade. Concluímos que a primeira aula não fora tão relevante e os modelos de seção devem ser usados em um público menos qualificado. Va-

mos modificar bastante a aula de buracos negros para tratar desde a evolução estelar até os fenômenos mais exóticos por trás deles como a radiação Hawking e até mesmo sobre a questão da termodinâmica de buracos negros. Também queremos deixar mais clara a ideia do intervalo espaçotemporal e as métricas associadas às mudanças de coordenadas para mostrarmos os fenômenos utilizando mais cálculos.

Capítulo 6

Conclusão

Neste trabalho apresentamos uma sequência didática para apresentar noções introdutórias da teoria da relatividade geral em turmas do ensino médio. Usamos uma abordagem não convencional ao falarmos da curvatura do espaço-tempo antes dos princípios físicos. Acreditamos que assim os alunos ficariam mais atraídos pela curiosidade prevista na geometria bem como pelas atividades que foram realizadas. No entanto, as turmas não se mostraram tão interessadas nos experimentos da curvatura, pois os resultados pareciam muito óbvios para eles. Talvez, se aplicadas em turmas de menor excelência na área de exatas, as atividades se mostrem mais promissoras.

As noções básicas de TRG devem ser apresentadas com muita calma enfatizando a importância do princípio de equivalência, pois parecia algo óbvio para os alunos. Uma sugestão seria falar da massa inercial da 2ª Lei de Newton, depois da força elétrica como resultante e, por último, tratar das massas gravitacionais. Isso deve causar uma surpresa, pois a carga elétrica não é proporcional à massa inercial, mas a gravitacional, sim. O exercício dos canhões se mostrou essencial para validar a importância do princípio e deixar mais claro como usá-lo para justificar os fenômenos que vieram a seguir: deflexão da luz e desvio para o vermelho gravitacional. A parte matemática foi muito bem aproveitada pelos alunos que conseguiram fazer paralelos interessantes entre o desvio para o vermelho e a conservação da energia do fóton. O resultado dos relógios passaram mais devagar sob ação da gravidade foi amplamente debatido. Mais uma vez quando tentamos usar

o modelo de seção para exibir o desvio da luz em um campo gravitacional, ele não fora bem apreciado pelos alunos que pareciam cansados dessa abordagem lúdica e queriam aprofundar-se nas equações.

Nós nos propusemos a não fazer uma abordagem unicamente experimental, queríamos que os alunos tivessem noções básicas de geometria Riemanniana não Euclidiana para compreenderem melhor os fenômenos relativísticos. A relatividade restrita é uma excelente introdução para os fenômenos não convencionais do dia-a-dia, pois os alunos não compreendem a ideia de tempo e confundem com a sensação da passagem do tempo. Essa observação está de acordo com estudos feitos sobre a noção de tempo relativístico [38]. Ela deve ser o ponto de partida, caso os alunos não tenham ainda tido contato com tal assunto, que não foi o nosso caso. Como os alunos possuíam noções básicas de cálculo diferencial e integral, a ideia básica da geometria Riemanniana foi rapidamente compreendida e passamos mais tempo explicando o intervalo espaçotemporal. Essas ideias seriam muito difíceis de serem compreendidas se os alunos não tivessem afinidade com geometria analítica.

Como nós invertemos os eixos dos diagramas espaço-tempo em comparação com os que aparecem nos livros de relatividade, as linhas de mundo foram rapidamente entendidas e a relação entre a inclinação da reta com a velocidade tornou-se uma comparação com a cinemática tradicional. Os alunos tiveram mais dificuldade com os cones de luz e a ideia de passado e futuro, um tópico que deveria ter sido melhor explorado nessa aula diferenciando os pontos tipo tempo, espaço e nulo.

A ideia da geodésica também fora compreendida como propriedade espacial, mas falhamos em expressá-la na coordenada temporal. Essa dificuldade já foi mostrada também no trabalho [39]. Não encontramos também um meio termo matemático para apresentar aos alunos e as equações que surgiram daí pareceram “jogadas”. Mesmo com o princípio da correspondência, não encontramos uma forma prática de reduzir a equação de Einstein para campos fracos e derivar o potencial newtoniano. Mais uma vez, as equações

foram apenas mostradas aos alunos. Isso não pareceu um problema para eles, porém não atingimos nosso objetivo de demonstrar ao máximo os resultados.

Verificamos que buraco negro é o principal fenômeno gravitacional que deve ser explorado. Na primeira aplicação percebemos isso e já melhoramos nas demais. Esse é o fenômeno de maior interesse dos alunos, pois eles já ouviram falar e possuem ideias do que é e de como funciona. Apesar de ainda apresentarem alguns equívocos quanto a esse objeto. Tentamos trazer a métrica de Schwarzschild para contemplação e uso no Doppler gravitacional, mas os alunos não foram capazes de entender os cálculos. Parece que achamos a fronteira entre o que eles são capazes de compreender e o que está muito distante matematicamente. Deveríamos aqui dar mais ênfase na *morte* de uma estrela e o processo de surgimento da anã branca e do buraco negro. E depois da foto do buraco negro em abril de 2019, esse assunto voltou a ter relevância nas mídias. Acredito que os trabalhos de Stephen Hawking sobre esse tópico também poderiam ser explorados, tendo em vista que eles tratam da termodinâmica e outros assuntos relacionados a buracos negros e mecânica quântica [40]. Com isso, devemos buscar uma abordagem mais próxima do livro *Explorando buracos negros: introdução à relatividade geral* [9] por usar esse fenômeno gravitacional como base para explicar toda a TRG.

A velocidade de dobra espacial era o assunto sobre o qual eu tinha mais interesse, pois enquanto aluno não sabia que era um fenômeno que fazia parte de uma teoria. Acreditava ser apenas parte da ficção científica. Os alunos pareceram surpresos com essa previsão teórica, mesmo que apenas tivéssemos mostrado a possibilidade pelos diagramas espaço-tempo. Também comentamos sobre, até o momento, a impossibilidade de fazer essas viagens com velocidade maiores que a da luz devido à falta de energia negativa e matéria exótica.

Como já mencionamos, os alunos têm predisposição com esses fenômenos físicos. Tanto que ao final desse minicurso surgiram várias perguntas relacionados a problemas que não foram abordados como buracos de minhoca, ponte de Einstein-Rosen, existência de

curvas de tempo fechadas, matéria escura, táquions, energia negativa foram alguns dos tópicos que surgiram no decorrer das aulas. Estamos, com a educação do ensino médio, negando esse conhecimento aos alunos que buscam fontes não confiáveis na internet para conhecerem esses temas.

Nosso curso teve muito poucas aulas, e ele deve ser, portanto, expandido para um curso de um semestre. Além disso, há muito a ser melhorado, devemos, portanto, continuar o trabalho para acrescentar os fenômenos da precessão de Mercúrio, ondas gravitacionais, lentes gravitacionais e a imagem do buraco negro como outros fenômenos que são corroborados pela TRG. As descobertas de Einstein moldaram o século XX, parece injusto que as suas teorias se restrinjam a um pequeno grupo acadêmico nas universidades.

Mesmo com muitas coisas a serem melhoradas, revistas, retiradas ou acrescentadas estamos muito felizes com o resultado do nosso trabalho. Mostramos com ele que os alunos de ensino médio são capazes de aprender essa teoria sem necessariamente recorrer a analogias como a do tecido elástico [41, 42] para mostrar a curvatura do espaço-tempo. Queremos ingressar um pequeno grupo de países com programas bem sucedidos de ensino da TRG como a Noruega [7]. Para isso precisamos fazer um esforço para que o ensino de física não seja deixado para trás. Um dos maiores problemas em ensinar TRG no ensino médio é o retreinamento dos professores, cuja educação foi desviada da física einsteniana. Com essas aulas, acreditamos que muitos alunos e professores se aprofundarão no tema e trarão resultados expressivos para nossa educação.

A última proposta de gravar as aulas e colocá-las online ainda não foi implementada. Mas outros alunos e professores se mostraram interessados no projeto devido à sua abrangência e devemos em breve lançar esse curso em um canal do próprio autor <https://www.youtube.com/user/edcarageorge/>.

Referências Bibliográficas

- [1] HARTLE, J. B. *Gravity: An introduction to einstein's general relativity*. AAPT, 2003. 1, 21, 23, 27, 28, 30, 34, 35, 36, 37, 40, 42, 43, 59, 91, 117, 118, 122, 126, 127, 128, 131, 132
- [2] DOMINGUINI, L. O.; ORTIGARA, V. O. *O conteúdo física moderna nos livros didáticos do pnlem*. 2010. Tese (Doutorado em Física) - Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em educação da Universidade do Extremo Sul Catarinense (PPGEUNESC). Criciúma., 2010. 1, 2, 45
- [3] STANNARD, R. Modern physics for the young. *Physics Education*, v. 25, n. 3, p. 133, 1990. 1
- [4] VIANNA, D.; OLIVEIRA, F.; GERBASSI, R. Física moderna no ensino médio: o que dizem os professores. *Revista Brasileira de Ensino de Física (São Paulo)*, v. 29, p. 1–8, 2007. 2
- [5] HEWITT, P. G. *Fundamentos de física conceitual*. Bookman, 2000. 2, 43
- [6] NACIONAIS, P. C. Ministério da educação. *Coordenação de Educação Ambiental. A implantação*, 2001. 2
- [7] KERSTING, M.; HENRIKSEN, E. K.; BØE, M. V.; ANGELL, C. General relativity in upper secondary school: Design and evaluation of an online learning environment using the model of educational reconstruction. *Physical Review Physics Education Research*, v. 14, n. 1, p. 010130, 2018. 3, 42, 43, 46, 79

- [8] D'INVERNO, R. A. *Introducing einstein's relativity*. Clarendon Press, 1992. 5, 7, 23, 28, 36, 37, 43, 105, 118, 128
- [9] TAYLOR, E. F.; WHEELER, J. A.; BERTSCHINGER, E. *Exploring black holes: introduction to general relativity*. 2013. 5, 49, 78
- [10] BBC. Brian cox visits the world's biggest vacuum | human universe - bbc. 6, 54, 103
- [11] *Curso de física básica, 1: mecânica*. E. Blucher, 2013. 7, 13, 56, 105, 110
- [12] SCIAMA, D. W. *The physical foundations of general relativity*. 1969. 8
- [13] NATARIO, J. *General relativity without calculus: a concise introduction to the geometry of relativity*. Springer Science & Business Media, 2011. 9, 10, 89, 106, 107, 108
- [14] POUND, R. V.; REBKA JR, G. A. Gravitational red-shift in nuclear resonance. *Physical Review Letters*, New York, v. 3, n. 9, p. 439, 1959. 12, 56, 109
- [15] VESSOT, R. F.; LEVINE, M. W.; MATTISON, E. M.; BLOMBERG, E.; HOFFMAN, T.; NYSTROM, G.; FARREL, B.; DECHER, R.; EBY, P. B.; BAUGHER, C. et al. Test of relativistic gravitation with a space-borne hydrogen maser. *Physical Review Letters*, New York, v. 45, n. 26, p. 2081, 1980. 12, 109
- [16] NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de física básica, 4*. E. Blucher. 38, 129
- [17] KENNEFICK, D. No shadow of doubt: Eddington, einstein and the 1919 eclipse. *Bulletin of the American Physical Society*, v. 64, 2019. 13, 110
- [18] CÉSAR, H. L.; POMPEIA, P. J.; STUDART, N. A deflexão gravitacional da luz: De newton a einstein. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 41, 2019. 13, 110
- [19] EINSTEIN, A. *A teoria da relatividade especial e geral*. Contraponto Editora, 2003. 15, 16, 17, 85, 112

- [20] ABBOTT, E. *Flatland: a romance of many dimensions*. Penguin Books, 1987. 31, 123
- [21] ZAHN, C.; KRAUS, U. Sector models—a toolkit for teaching general relativity: I. curved spaces and spacetimes. *European Journal of Physics*, Bristol, v. 35, n. 5, p. 055020, 2014. 31, 32, 33, 34, 44, 50, 124, 125
- [22] FOSTER, J. A.; NIGHTINGALE, J. D. *A short course in general relativity*. Springer Science & Business Media, 2010. 34, 43, 126
- [23] SCHWARZSCHILD, K. On the gravitational field of a mass point according to einstein’s theory. *arXiv preprint physics/9905030*, 1999. 36, 127
- [24] MACHADO, R.; TORT, A. Michell, laplace e as estrelas negras: uma abordagem para professores do ensino médio. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 38, n. 2, p. e2314, 2016. 37, 129
- [25] ALCUBIERRE, M. The warp drive: hyper-fast travel within general relativity. *Classical and Quantum Gravity*, v. 11, n. 5, p. L73, 1994. 39, 41
- [26] NATÁRIO, J. Warp drive with zero expansion. *Classical and Quantum Gravity*, v. 19, n. 6, p. 1157, 2002. 41
- [27] MAJOR, J. Warp drives may come with a killer downside. 41
- [28] ZAGO, L. *Situações didáticas no ensino da relatividade geral: análise do engajamento dos alunos*. 2018. Tese (Doutorado em Física) - Universidade de São Paulo, 2018. 43
- [29] WHEELER, J. A.; FORD, K. Geons, black holes and quantum foam: A life in physics. 2000. 44
- [30] BRASIL. Ministério da Educação. Portaria nº 2.116, de 06 de dezembro de 2019. Estabelece novas diretrizes, novos parâmetros e critérios para o Programa de Fomento

às Escolas de Ensino Médio em Tempo Integral - EMTI, em conformidade com a Lei nº 13.415, de 16 de fevereiro de 2017. Diário Oficial da União, Brasília, DF, 09 dez. 2019, nº 237, Seção 1, p. 28. 44

- [31] ZABALA, A. A avaliação. ZABALA, A.. *A Prática educativa: como ensinar*. Porto Alegre: ArtMed, 1998. 45
- [32] WOOD, M.; SMITH, W.; JACKSON, M. Curvature of spacetime: A simple student activity. *The Physics Teacher*, Stony Brook, v. 54, n. 9, p. 572–573, 2016. 47, 49
- [33] ZAHN, C.; KRAUS, U. Sector models—a toolkit for teaching general relativity: Ii. geodesics. *European Journal of Physics*, Bristol, v. 40, n. 1, p. 015601, 2018. 50
- [34] WITH STEPHEN COLBERT, T. L. S. Brian greene explains that whole general relativity thing. 54, 68
- [35] COLLABORATION, E. H. T. et al. First m87 event horizon telescope results. i. the shadow of the supermassive black hole. *arXiv preprint arXiv:1906.11238*, 2019. 61, 72
- [36] MULLER, D. A. Como entender a imagem de um buraco negro. 61, 72
- [37] AAKER, D. A.; KUMAR, V.; DAY, G. S. *Marketing research*. John Wiley & Sons, 2008. 62
- [38] KARAM, R. A. S.; CRUZ, S. M. S. C. D.; COIMBRA, D. et al. Tempo relativístico no início do ensino médio. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 28, n. 3, p. 373–386, 2006. 77
- [39] KERSTING, M. Navigating four dimensions—upper secondary students’ understanding of movement in spacetime. In: . c2019. v. 1287. p. 012007. 77

- [40] HAWKING, S. W. Black hole explosions? *Nature*, London, v. 248, n. 5443, p. 30–31, 1974. 78
- [41] KERSTING, M.; STEIER, R. Understanding curved spacetime. *Science & Education*, v. 27, n. 7-8, p. 593–623, 2018. 79
- [42] NETO, A. A. G. Teoria da relatividade geral: uma proposta em ensino não formal. 79
- [43] NEWTON, I. Principia: princípios matemáticos de filosofia natural- livro i. *Trad. de Trieste Ricci et ali*, v. 2, 2002. 89
- [44] MINKOWSKI, H. *O princípio da relatividade*. Fundação Calouste Gulbenkian, 2001. 89
- [45] HAWKING, S. W.; ELLIS, G. F. R. *The large scale structure of space-time*. Cambridge university press, 1973. v. 1.

Apêndice A

Relatividade restrita

Apresentaremos nesse apêndice um brevíssimo resumo sobre relatividade restrita. A relatividade restrita levou em 1905 a uma mudança no entendimento do tempo e do espaço e provocou uma mudança revolucionária na mecânica Newtoniana. Para entender essas relações, vamos mostrar como a mecânica Newtoniana relaciona as coordenadas de referenciais inerciais, movendo-se uniformemente com velocidade relativa \vec{v} , as chamadas transformações de Galileu, que podem ser vistas na Fig. A.1.

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}t \Rightarrow \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t, \quad (\text{A.1a})$$

$$t = t', \quad (\text{A.1b})$$

onde (\vec{r}, t) e (\vec{r}', t') são as coordenadas de um evento no espaço-tempo no referencial \mathcal{S} e referencial \mathcal{S}' , respectivamente.

“A teoria da relatividade restrita usa como um dos seus princípios que as leis da física (p. ex., as leis da Mecânica ou a lei da propagação da luz no vácuo) têm exatamente o mesmo enunciado para todos os referenciais inerciais.” [19].

A.1 Transformações de Lorentz

Esse princípio levou Lorentz a um conjunto de transformações diferentes das de Galileu. Essas relações tinham validade nas equações do eletromagnetismo de Maxwell e na

constância da velocidade da luz c mesmo para mudanças de referenciais.

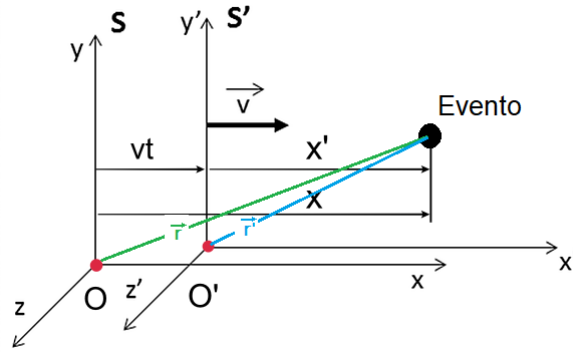


Figura A.1: Referencial \mathcal{S}' se movendo uniformemente com velocidade \vec{v} em relação a \mathcal{S} .

Abaixo estão essas transformações para referenciais que se movem relativamente ao eixo x com velocidade de módulo v como mostrado na Fig. A.1:

$$x' = \gamma(x - vt), \quad (\text{A.2a})$$

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad (\text{A.2b})$$

$$y = y', \quad (\text{A.2c})$$

$$z = z'. \quad (\text{A.2d})$$

Também introduzindo o fator relativístico γ , chamado fator de Lorentz. Ambos os referenciais estão medindo as coordenadas espaço-tempo de um evento. Se o evento medido pelos referenciais for um raio luminoso se propagando com velocidade c , então:

$$x = ct, \quad (\text{A.3a})$$

$$x' = ct'. \quad (\text{A.3b})$$

Substituindo as Eqs. (A.3a), (A.3b) e (A.2a) em (A.2b), teremos:

$$x = \gamma \left(x' + \frac{v}{c} x' \right) \Rightarrow ct = \gamma \gamma (ct - vt) \left(1 + \frac{v}{c} \right),$$

resultando em:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \quad (\text{A.4})$$

Já para o tempo, teremos da Eq. (A.2b)

$$ct = \gamma \left(ct' + v \frac{x'}{c} \right),$$

resultando numa transformação temporal dada por:

$$t = \gamma \left(t' + \frac{vx'}{c^2} \right) \Rightarrow t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) \quad (\text{A.5})$$

Dilatação temporal

Considere agora dois eventos A e B com coordenadas espaçotemporais (x_A, y_A, z_A, t_A) e (x_B, y_B, z_B, t_B) para \mathcal{S} e (x'_A, y'_A, z'_A, t'_A) e (x'_B, y'_B, z'_B, t'_B) para \mathcal{S}' . Sendo que no referencial \mathcal{S}' os eventos acontecem no mesmo lugar $(x'_A, y'_A, z'_A) = (x'_B, y'_B, z'_B)$. O intervalo de tempo medido nesse referencial é chamado de **próprio**. Usando a transformação de Lorentz para o tempo descrito na Eq. (A.5), podemos encontrar a relação entre os tempos medidos nos dois referenciais:

$$t_A = \gamma \left(t'_A + \frac{vx'_A}{c^2} \right) \text{ e } t_B = \gamma \left(t'_B + \frac{vx'_B}{c^2} \right).$$

Calculando a diferença entre esses tempos e lembrando que $x'_A = x'_B$ temos:

$$t_B - t_A = \gamma \left(t'_B + \frac{vx'_B}{c^2} \right) - \gamma \left(t'_A + \frac{vx'_A}{c^2} \right) \Rightarrow \Delta t = \gamma \Delta t'. \quad (\text{A.6})$$

A Eq. (A.6) descreve a dilatação temporal. Observe que $\Delta t \geq \Delta t'$, então os referenciais medem intervalos de tempo diferentes entre os dois eventos.

Transformação de velocidades

Para relacionar as velocidades¹ u e u' de um corpo em dois referenciais \mathcal{S} e \mathcal{S}' , usaremos a definição de velocidade $u = dx/dt$ e $u' = dx'/dt'$. Aplicando as transformações de Lorentz das Eq. (A.5) e (A.2b)

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{d\gamma(x' + vt')}{d\gamma(t' + \frac{vx'}{c^2})} = \frac{dx' + vdt'}{dt' + \frac{v}{c^2}dx'} \Rightarrow$$

¹Usamos a notação escalar, pois nossos movimentos são unidimensionais ao longo do eixo x

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} \text{ e } u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}. \quad (\text{A.7})$$

A.2 Geometria de Minkowski

Nas transformações de Galileu existem dois invariantes: o intervalo de tempo e a distância. Suponha dois eventos A e B com coordenadas espaçotemporais (\vec{r}_A, t_A) e (\vec{r}_B, t_B) para o referencial \mathcal{S} e (\vec{r}'_A, t'_A) e (\vec{r}'_B, t'_B) para \mathcal{S}' , que se move com velocidade \vec{v} em relação a \mathcal{S} . Usando as transformações de Galileu descritas nas Eqs. (A.1a) e (A.1b), temos:

$$t_A = t'_A \text{ e } t_B = t'_B \Rightarrow \Delta t = \Delta t',$$

$$\vec{r}_A = \vec{r}'_A + \vec{v}t_A \text{ e } \vec{r}_B = \vec{r}'_B + \vec{v}t_B \Rightarrow \vec{r}_A - \vec{r}_B = \vec{r}'_A - \vec{r}'_B.$$

Em sua *magnum opus*, Princípios Matemáticos da Filosofia Natural, Isaac Newton fez a seguinte afirmação sobre espaço e tempo absolutos:

“O espaço absoluto, em sua própria natureza, sem relação com qualquer coisa externa, permanece sempre similar e imóvel. Espaço relativo é alguma dimensão ou medida móvel dos espaços absolutos, a qual nossos sentidos determinam por sua posição com relação aos corpos, e é comumente tomado por espaço imóvel; assim é a dimensão de um espaço subterrâneo, aéreo ou celeste, determinado pela sua posição com relação à Terra. Espaços absoluto e relativo são os mesmos em configuração e magnitude, mas não permanecem sempre numericamente iguais. Pois, por exemplo, se a Terra se move, um espaço de nosso ar, o qual relativamente à Terra permanece sempre o mesmo, será em algum momento parte do espaço absoluto pelo qual o ar passa; em um outro momento será outra parte do mesmo, e assim, com certeza, estará continuamente mudando [...] O tempo absoluto, verdadeiro e matemático, por si mesmo e por

sua própria natureza, flui uniformemente sem relação com qualquer coisa externa e é também chamado de duração. O tempo comum aparente e relativo é uma medida de duração perceptível e externa (seja ela exata ou irregular) que é obtida por meio de movimento e que é normalmente usada no lugar do tempo verdadeiro, tal como uma hora, um dia, um mês, um ano.” [43]

No entanto, na teoria da relatividade restrita, esses valores variam com as transformações de Lorentz. Minkowski ciente desses resultados afirmou que

“As visões de espaço e tempo que desejo colocar diante de vocês surgiram do solo da física experimental, e aí reside sua força. Eles são radicais. Doravante o espaço, por si só, e o tempo em si, estão condenados a desaparecer em meras sombras, e apenas uma espécie de união dos dois preservará uma realidade independente.” [44]

O espaço-tempo de Minkowski é uma formulação geométrica para a relatividade restrita. Os eventos unidimensionais serão representados em um eixo cartesiano ($x \times ct$) e a distância entre dois eventos, chamada de intervalo espaçotemporal, é preservada em mudanças de referencial [13].

Tal invariante, denominado intervalo espaçotemporal será dado por²:

$$(\Delta s)^2 = -(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2. \quad (\text{A.8})$$

Generalizando para o espaço tridimensional, temos:

$$(\Delta s)^2 = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2. \quad (\text{A.9})$$

Para demonstrarmos esse invariante, vamos usar um *Gedankenexperiment* proposto por Albert Einstein na demonstração do fenômeno da dilatação temporal. Suponha um relógio

²Vamos nos restringir ao caso unidimensional a fim de facilitar a visualização.

de luz composto de uma fonte, um detector e um espelho plano preso ao teto de um vagão de um trem que se desloca com velocidade constante v_1 em relação a um referencial \mathcal{S}_1 e v_2 em relação a um referencial \mathcal{S}_2 , como representado na Fig.A.2

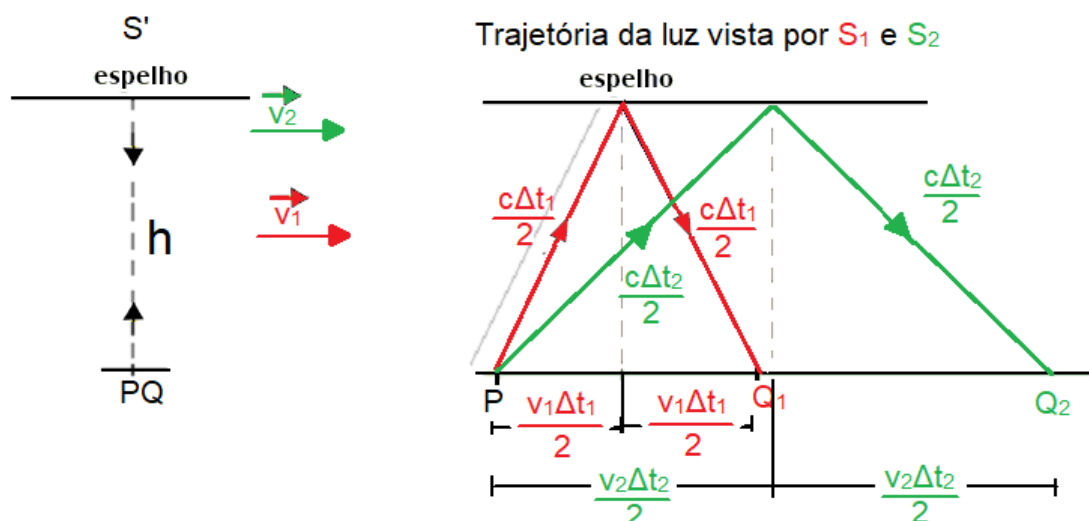


Figura A.2: Trajetória da luz em um relógio de luz para diferentes referenciais. Uma fonte de luz é colocada em **P**, emitindo seus raios para cima, refletindo em um espelho plano e retornando para um detector colocado junto à fonte luminosa. O observador \mathcal{S}' está dentro do vagão de um trem onde o aparato foi montado e vê a luz subir e descer pela altura h do trem, sendo detectada em **Q**. O referencial \mathcal{S}_1 vê o vagão se deslocando para a direita com velocidade de módulo v_1 . No tempo Δt_1 que a luz sobe e desce com velocidade constante c , o vagão se desloca para a direita até **Q1**, onde ocorre a detecção da luz vista por \mathcal{S}_1 . Na figura, vemos cada metade da trajetória de subida e descida, que leva um tempo $\frac{\Delta t_1}{2}$. Analogamente para o referencial \mathcal{S}_2 , que vê o vagão se deslocando para a direita com velocidade de módulo v_2 , medindo um tempo de detecção Δt_2 .

Como a velocidade da luz c é constante para ambos os referenciais e o movimento relativo só ocorre na horizontal, podemos expressar através do Teorema de Pitágoras a medida da altura h do vagão para os referenciais \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2

$$\left(\frac{c\Delta t_1}{2}\right)^2 - \left(\frac{v_1\Delta t_1}{2}\right)^2 = \left(\frac{c\Delta t_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{v_2\Delta t_2}{2}\right)^2 = h^2 \Rightarrow$$

$$(c\Delta t_1)^2 - (v_1\Delta t_1)^2 = (c\Delta t_2)^2 - (v_2\Delta t_2)^2 = 4h^2.$$

Finalmente, podemos escrever que $\Delta x = v\Delta t$ e expressar o invariante espaçotemporal como:

$$(c\Delta t_1)^2 - (\Delta x_1)^2 = (c\Delta t_2)^2 - (\Delta x_2)^2 \quad (\text{A.10})$$

A.3 Projeção de Mapas

Uma das aplicações do sistema de coordenadas está em projeções de mapas. Como representamos a Terra, por exemplo, em uma folha de papel plana? Consideremos como aproximação a geometria esférica para representar o nosso planeta como a Eq. (3.9), onde θ é a latitude e ϕ é longitude.

Para fazermos um mapa, devemos usar um sistema de coordenadas retangulares a fim de planificar a esfera definido pelas relações:

$$x = x(\theta, \phi), y = y(\theta, \phi). \quad (\text{A.11})$$

A escolha de diferentes funções $x(\theta, \phi)$ e $y(\theta, \phi)$ fornecem mapas com características diferentes. Por exemplo, a projeção equirretangular provê distâncias verdadeiras em escala. Já a projeção de Mercator preserva ângulos. Ela é uma projeção cilíndrica e pode ser melhor vista na Fig. A.3³

³Para mais informações sobre essas projeções, veja o BOX 2.3 do livro do Hartle [1]

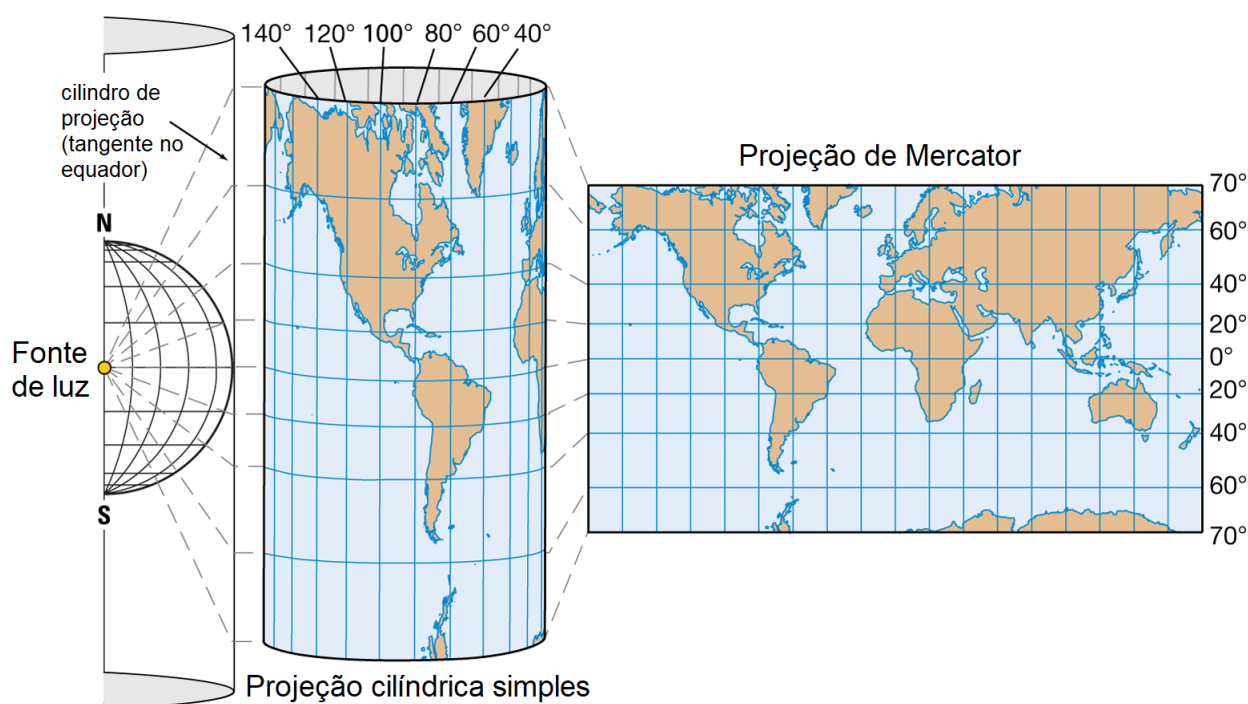


Figura A.3: A Projeção Mercator, introduzida em 1569 por Gerardus Mercator, é descrita como uma projeção cilíndrica. Os meridianos são linhas verticais paralelas igualmente espaçadas, e os paralelos de latitude são linhas retas horizontais paralelas que são espaçadas cada vez mais longe à medida que aumenta a distância do Equador. Essa projeção é amplamente usada para cartas de navegação, porque qualquer linha reta em um mapa de projeção Mercator é uma linha de rumo constante que permite ao navegador traçar um percurso em linha reta. É menos prático para mapas mundiais, no entanto, porque a escala está distorcida; áreas mais afastadas do Equador parecem desproporcionalmente grandes. Em uma projeção Mercator, por exemplo, a massa terrestre da Groenlândia parece ser maior que a do continente da América do Sul; na área real, a Groenlândia é menor que a Península Arábica. Fonte: disponível em <https://www.britannica.com/science/Mercator-projection>

Apêndice B

Questões de concursos abordando TRG

Neste apêndice, apresentamos algumas questões de concursos de ensino fundamental e médio que abordam algum conceito de TRG, mesmo que não seja o tema central da questão. Todas as questões estão gabaritadas e foram selecionadas utilizando o site <https://www.sprweb.com.br>, também responsável pelos comentários das questões. Com essas questões, queremos mostrar que a TRG é um tema abordado nos concursos, mesmo que de forma incipiente. Podendo se tornar cada vez mais relevante falar sobre assunto na sala de aula, diante da cobrança que pode ser feita nesses concursos.

1. (Colégio Naval 2017) Com relação aos conceitos da Física, assinale a opção correta.
- a) Em qualquer meio transparente, a propagação da luz ocorre sempre em linha reta.
 - b) A patinação sobre o gelo acontece porque o aumento da pressão, exercida pelos patins, altera a temperatura de fusão do gelo.
 - c) As garrafas e outros objetos jogados no mar chegam até as praias transportados pelas ondas.
 - d) No processo de eletrização por contato, o corpo que recebe elétrons fica negativo e o que perde elétrons fica positivo.
 - e) As bússolas magnéticas são muito importantes na navegação porque apontam precisamente para o norte geográfico.

Resposta: [B]

- [A] Incorreta. A relatividade de Einstein provou que a luz pode se curvar ao passar próxima de um corpo celestial muito massivo como o Sol.
- [B] Correta. Os patins possuem uma área de contato com o solo muito pequena, resultando em aumento de pressão no local do contato, derretendo o gelo e solidificando em seguida devido à temperatura do gelo estar abaixo do ponto de congelamento para o local.
- [C] Incorreta. As ondas não transportam matéria e sim energia.
- [D] Incorreta. Na eletrização por contato os dois corpos ficam com o mesmo sinal de carga, podendo ficar negativo e ceder elétrons ou ainda ficar positivo recebendo elétrons, para os casos de corpo negativo com neutro e corpo positivo com neutro respectivamente.
- [E] Incorreta. As bússolas não apontam com precisão para o norte geográfico e sim aproximadamente.

2. (UDESC 2017) Os pesquisadores do projeto LIGO (*Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*) anunciaram, no início deste ano, a primeira detecção das ondas gravitacionais.

Analise as proposições em relação à informação.

- I. Estas ondas se propagam com a mesma velocidade da luz.
- II. Estas ondas se propagam com velocidade superior à velocidade da luz.
- III. Estas ondas foram previstas por Albert Einstein em sua Teoria da Relatividade Geral.
- IV. Estas ondas foram previstas por Albert Einstein em sua Teoria do Efeito Fotoelétrico.

Assinale a alternativa **correta**.

- a) Somente a afirmativa III é verdadeira.
- b) Somente as afirmativas I e IV são verdadeiras.
- c) Somente as afirmativas I e III são verdadeiras.
- d) Somente a afirmativa IV é verdadeira.
- e) Somente as afirmativas II e IV são verdadeiras.

Resposta: [C]

- [I] Verdadeira. As ondas gravitacionais se propagam com a velocidade da luz.
- [II] Falsa. Nenhuma velocidade do universo supera a velocidade da luz no vácuo.
- [III] Verdadeira. Tal detecção confirmou o que já estava previsto na Teoria da Relatividade Geral de Einstein.
- [IV] Falsa. A teoria correta foi enunciada na resposta do item acima.

3. (UEG 2006) "Buraco negro" é o nome dado a regiões do espaço sideral de onde radiotelescópios não captam nenhuma emissão de ondas eletromagnéticas. A designação "negro" vem do fato de que nenhuma luz emana daquele local. A astronomia detectou que há um fluxo intenso de radiação eletromagnética e de matéria para dentro do buraco negro que, portanto, não é vazio e sim hiperdenso em termos de concentração de massa e energia. O fato de que não sai luz visível de um buraco negro pode ser associado a qual das seguintes alternativas?

- a) Por ser hiperdenso, o "buraco negro" tem a capacidade de emitir todas as cores de luz, formando uma mistura de cor "negra".

- b) A forte concentração de nêutrons no buraco negro não permite a saída de luz por causa da atração eletrostática.
- c) Mesmo que muito pequena, a luz tem uma massa associada a ela e fica presa ao "buraco negro" pela forte atração gravitacional.
- d) O "buraco negro" tem temperatura próxima ao zero absoluto e, por isso, não emite radiação alguma.

Resposta: ANULADA (sem resposta)

[A] **Falsa.** A mistura de todas as radiações dá a luz branca.

[B] **Falsa.** Nêutrons não tem carga, não sofrem atração eletrostática.

[C] **Falsa.** A luz não tem massa em situação alguma, o que acontece para que um Buraco Negro consiga capturar a luz é a distorção do espaço-tempo. Por ser extremamente massivo, a distorção do espaço é tão grande que a luz que passa por dentro do horizonte de eventos é obrigada a seguir um caminho que não tem volta, logo fica presa no buraco negro.

[D] **Falsa,** de acordo com o já exposto acima.

4. (ENEM PPL 2015) Observações astronômicas indicam que no centro de nossa galáxia, a Via Láctea, provavelmente exista um buraco negro cuja massa é igual a milhares de vezes a massa do Sol. Uma técnica simples para estimar a massa desse buraco negro consiste em observar algum objeto que orbite ao seu redor e medir o período de uma rotação completa, T , bem como o raio médio, R , da órbita do objeto, que supostamente se desloca, com boa aproximação, em movimento circular uniforme. Nessa situação, considere que a força resultante, devido ao movimento circular, é igual, em magnitude, à força gravitacional que o buraco negro exerce sobre o objeto.

A partir do conhecimento do período de rotação, da distância média e da constante gravitacional, G , a massa do buraco negro é

a) $\frac{4\pi^2 R^2}{GT^2}$.

b) $\frac{\pi^2 R^3}{2GT^2}$.

c) $\frac{2\pi^2 R^3}{GT^2}$.

d) $\frac{4\pi^2 R^3}{GT^2}$.

e) $\frac{\pi^2 R^5}{GT^2}$.

Resposta: [D]

A força gravitacional age como resultante centrípeta. Seja M a massa do buraco negro e m massa do objeto orbitante. Combinando a lei de Newton da gravitação com a expressão da velocidade para o movimento circular uniforme, vem:

$$\left\{ \begin{array}{l} v = \frac{\Delta S}{\Delta t} \Rightarrow v = \frac{2\pi R}{T} \\ \frac{GMm}{R^2} = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow M = \frac{R}{G} v^2 \end{array} \right\} \Rightarrow M = \frac{R}{G} \left(\frac{2\pi R}{T} \right)^2 = \frac{R}{G} \frac{4\pi^2 R^2}{T^2} \Rightarrow \boxed{M = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2}}$$

5. (ITA 2009) Desde os idos de 1930, observações astronômicas indicam a existência da chamada matéria escura. Tal matéria não emite luz, mas a sua presença é inferida pela influência gravitacional que ela exerce sobre o movimento de estrelas no interior de galáxias. Suponha que, numa galáxia, possa ser removida sua matéria escura de massa específica $d >$

0, que se encontra uniformemente distribuída. Suponha também que no centro dessa galáxia haja um buraco negro de massa M , em volta do qual uma estrela de massa m descreve uma órbita circular. Considerando órbitas de mesmo raio na presença e na ausência de matéria escura, a respeito da força gravitacional resultante \vec{F} exercida sobre a estrela e seu efeito sobre o movimento desta, pode-se afirmar que:

- a) \vec{F} é atrativa e a velocidade orbital de m não se altera na presença da matéria escura.
- b) \vec{F} é atrativa e a velocidade orbital de m é menor na presença da matéria escura.
- c) \vec{F} é atrativa e a velocidade orbital de m é maior na presença da matéria escura.
- d) \vec{F} é repulsiva e a velocidade orbital de m é maior na presença da matéria escura.
- e) \vec{F} é repulsiva e a velocidade orbital de m é menor na presença da matéria escura.

Resposta: [C]

Pela lei da gravitação de Newton $\rightarrow F = GMm/d^2$

O que importa é a massa entre a estrela e o buraco negro.

A força será atrativa e com mais massa entre a estrela e o buraco negro (devido a presença de matéria escura) a força será maior. Como esta força será também a resultante centrípeta $\rightarrow GMm/d^2 = mv^2/d \rightarrow GM/d = v^2$. A velocidade será maior com a presença de mais massa.

6. (ITA 2003) Considerando um buraco negro como um sistema termodinâmico, sua energia interna U varia com a sua massa M de acordo com a famosa relação de Einstein: $\Delta U = \Delta M c^2$. Stephen Hawking propôs que a entropia S de um buraco negro depende apenas de sua massa e de algumas constantes fundamentais da natureza. Desta forma, sabe-se que uma variação de massa acarreta uma variação de entropia dada por: $\Delta S / \Delta M = 8\pi GM k_B / h c$. Supondo que não haja realização de trabalho com a variação de massa, assinale a alternativa que melhor representa a temperatura absoluta T do buraco negro.

- a) $T = h c^3 / GM k_B$.
- b) $T = 8\pi M c^2 / k_B$.
- c) $T = M c^2 / 8\pi k_B$.
- d) $T = h c^3 / 8\pi GM k_B$.
- e) $T = 8\pi h c^3 / GM k_B$.

Resposta: [D]

7. (ITA 2000) O raio do horizonte de eventos de um buraco negro corresponde à esfera dentro da qual nada, nem mesmo a luz, escapa da atração gravitacional por ele exercida. Por coincidência, esse raio pode ser calculado não-relativisticamente como o raio para o qual a velocidade de escape é igual à velocidade da luz. Qual deve ser o raio do horizonte de eventos de um buraco negro com uma massa igual à massa da Terra?

- a) 9 μm .
- b) 9 mm.
- c) 30 cm.
- d) 90 cm.
- e) 3 km.

Resposta: [B]

8. (UEG 2016) Recentemente, os noticiários divulgaram a descoberta de ondas gravitacionais, previstas teoricamente por Albert Einstein. Essa descoberta reforça a teoria

- a) da radiação de corpo negro.
- b) do efeito fotoelétrico.
- c) do efeito Compton.
- d) da relatividade.
- e) das cordas.

Resposta: [D]

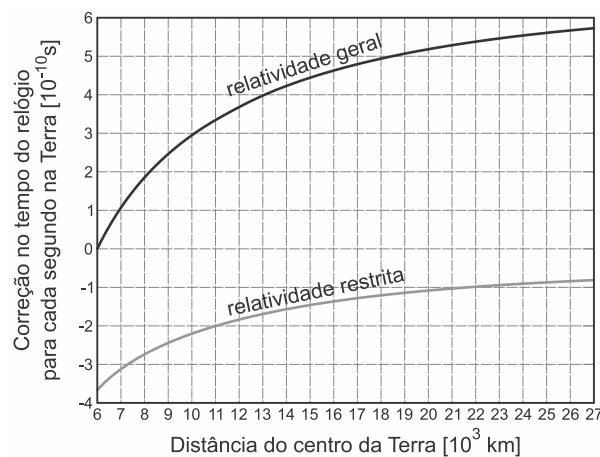
Segundo Paul Tipler, em seu livro *Física Moderna*, 3ª edição, LTC: "Implícita na teoria da

relatividade geral está a possibilidade de que uma massa acelerada emita ondas gravitacionais, da mesma forma como uma carga elétrica acelerada emite ondas eletromagnéticas."

9. (UNICAMP 2017) O uso do sistema de localização GPS (*Global Positioning System*) cresceu bastante nos últimos tempos devido principalmente à existência do sensor GPS na maioria dos celulares disponíveis no mercado. Nesses celulares, o sinal de GPS tem sido usado para localização do aparelho em mapas, para obter sugestões de rotas e até em jogos. Considere que os satélites responsáveis por enviar o sinal GPS encontram-se a aproximadamente $R_{\text{GPS}} = 27.000 \text{ km}$ do centro da Terra, seu período de rotação em torno do centro da Terra é $T_{\text{GPS}} = 12 \text{ horas}$ e sua órbita é circular.

Use $\pi = 3$.

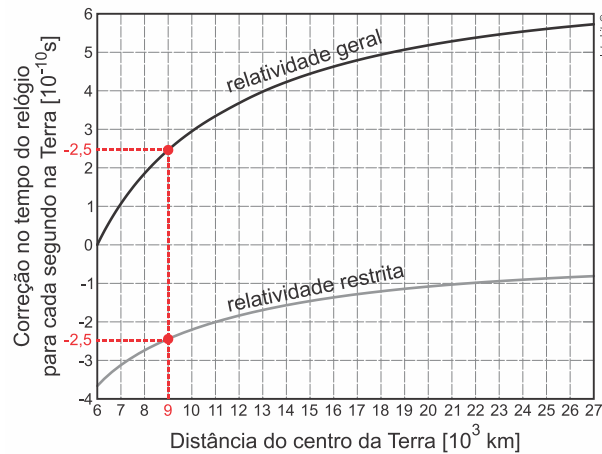
- Qual é a velocidade escalar média de um satélite do sistema GPS?
- Os satélites de GPS enviam continuamente as três coordenadas que determinam sua posição atual e o horário do envio da mensagem. Com as informações de 4 satélites, o receptor pode determinar a sua posição e o horário local. Para garantir a precisão dessas informações, efeitos relativísticos são considerados na determinação do horário enviado pelos satélites. Os relógios localizados nos satélites são afetados principalmente por efeitos da relatividade restrita, que atrasam os relógios, e da relatividade geral, que adiantam os relógios, conforme mostra a figura abaixo. Qual é a distância do centro da Terra R e o período T da órbita em que os efeitos da relatividade geral e da relatividade restrita se cancelam, ou seja, quando a soma dos dois efeitos é zero?



Resposta:

$$a) v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{2 \pi R_{\text{GPS}}}{T_{\text{GPS}}} = \frac{2 \times 3 \times 27.000}{12} \Rightarrow v_m = 13.500 \text{ km/h} = 3.750 \text{ m/s.}$$

- Analisando o gráfico, nota-se que a compensação entre o adiantamento e o atraso ocorre para $R = 9 \times 10^3 \text{ km}$, onde esses tempos são $+2,5 \times 10^{-10} \text{ s}$ e $-2,5 \times 10^{-10} \text{ s}$ conforme mostra o gráfico.

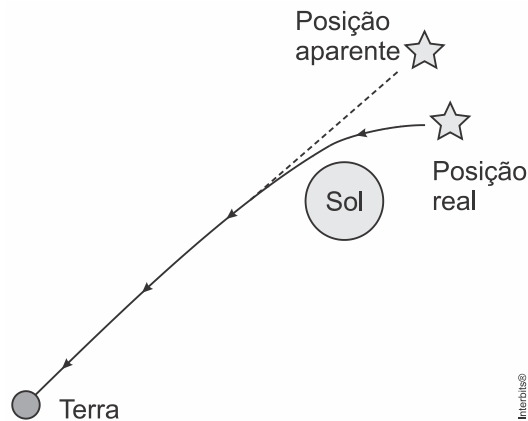


O tempo T para a órbita pode ser calculado aplicando a 3ª lei de Kepler, comparando as duas situações, órbita regular e órbita com compensação de tempos.

$$\left(\frac{T}{T_{\text{GPS}}}\right)^2 = \left(\frac{R}{R_{\text{GPS}}}\right)^3 \Rightarrow \frac{T^2}{12^2} = \left(\frac{9 \times 10^3}{27 \times 10^3}\right)^3 \Rightarrow T^2 = \frac{144}{27} = \frac{16}{3} \Rightarrow T = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$T = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ h.}$$

10. (UPE-SSA 2 2016) No dia 29 de maio de 1919, uma equipe de astrônomos ingleses visitou a cidade de Sobral, no Ceará, na tentativa de comprovar a Teoria da Relatividade Geral de Einstein, publicada em 1915. O objetivo da comitiva era verificar se a luz que vinha de uma estrela sofreria algum desvio ao passar nas proximidades do Sol. Nessa teoria, movimentos sob a ação de campos gravitacionais são compreendidos como movimentos em um espaço curvo, conforme mostra a figura a seguir. Nela ilustramos como a massa do Sol muda a nossa percepção da posição de uma estrela. Que tipo de instrumento óptico representa, de forma mais precisa, a função da massa do Sol na alteração do caminho da luz?



- a) Espelho plano
- b) Espelho côncavo
- c) Espelho convexo
- d) Lente convergente
- e) Lente divergente

Resposta: [D]

O feixe emitido pela estrela, antes de passar próximo aos Sol é divergente, após a passagem ele se torna cilíndrico. A massa do Sol tem a função similar à de uma lente convergente.

11. (UCS 2012) Pela teoria da Relatividade Geral de Einstein, quando raios de luz provenientes de um corpo estelar, como estrelas ou galáxias, passam muito próximos de um objeto estelar de grande densidade de massa, esses raios de luz são desviados para um ponto de encontro oposto ao lado em que os raios incidem no objeto. No contexto da ótica, esse objeto de grande densidade de massa estaria fazendo o papel de
- um espelho plano.
 - um filtro polarizador.
 - uma lente.
 - um espelho côncavo.
 - um espelho convexo.

Resposta: [C]

Se os raios convergem ao passar próximo do objeto, esse objeto estaria fazendo o papel de uma lente convergente.

12. (UNICAMP 2010) O GPS (*Global Positioning System*) consiste em um conjunto de satélites que orbitam a Terra, cada um deles carregando a bordo um relógio atômico. A Teoria da Relatividade Geral prevê que, por conta da gravidade, os relógios atômicos do GPS adiantam com relação a relógios similares na Terra. Enquanto na Terra transcorre o tempo de um dia ($t_{\text{Terra}} = 1,0 \text{ dia} = 86400 \text{ s}$), no satélite o tempo transcorrido é $t_{\text{satélite}} = t_{\text{Terra}} + \Delta t$, maior que um dia, e a diferença de tempo Δt tem que ser corrigida. A diferença de tempo causada pela gravidade é dada por $(\Delta t / t_{\text{Terra}}) = (\Delta U / mc^2)$, sendo ΔU a diferença de energia potencial gravitacional de uma massa m entre a altitude considerada e a superfície da Terra, e $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, a velocidade da luz no vácuo.

- Para o satélite podemos escrever $\Delta U = mgR_T(1 - R_T/r)$, sendo $r \approx 4R_T$ o raio da órbita, $R_T = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$ o raio da Terra e g a aceleração da gravidade na superfície terrestre. Quanto tempo o relógio do satélite adianta em $t_{\text{Terra}} = 1,0 \text{ dia}$ em razão do efeito gravitacional?
- Relógios atômicos em fase de desenvolvimento serão capazes de medir o tempo com precisão maior que uma parte em 10^{16} , ou seja, terão erro menor que 10^{-16} s a cada segundo. Qual é a altura h que produziria uma diferença de tempo $\Delta t = 10^{-16} \text{ s}$ a cada $T_{\text{terra}} = 1,0 \text{ s}$? Essa altura é a menor diferença de altitude que poderia ser percebida comparando medidas de tempo desses relógios. Use, nesse caso, a energia potencial gravitacional de um corpo na vizinhança da superfície terrestre.

Resposta:

a) Dados: $R_T = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$; $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$; $t_{\text{Terra}} = 1 \text{ dia} = 86.400 \text{ s}$.

Considerando as expressões dadas:

$$\frac{\Delta t}{t_{\text{Terra}}} = \frac{\Delta U}{m c^2} \quad \text{(I)}$$

$$\Delta U = m g R_T \left(1 - \frac{R_T}{r}\right) \quad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), vem:

$$\frac{\Delta t}{t_{\text{Terra}}} = \frac{m g R_T}{m c^2} \left(1 - \frac{R_T}{r}\right). \text{ Como } r \cong 4 R_T, \text{ temos:}$$

$$\frac{\Delta t}{t_{\text{Terra}}} = \frac{m g R_T}{m c^2} \left(1 - \frac{R_T}{4R_T} \right) \Rightarrow \Delta t = (t_{\text{Terra}}) \frac{g R_T}{c^2} \left(\frac{3}{4} \right). \text{ Substituindo os dados:}$$

$$\Delta t = 86.400 \frac{10 \times 6,4 \times 10^6}{(3 \times 10^8)^2} \frac{3}{4} = 28.800 \times 16 \times 10^6 \times 10^{-16} \Rightarrow$$

$$\Delta t = 4,6 \times 10^{-5} \text{ s}$$

b) Dado: $\frac{\Delta t}{t_{\text{Terra}}} = 10^{-16} \text{ s}$

Usando novamente as expressões dadas:

$$\frac{\Delta t}{t_{\text{Terra}}} = \frac{\Delta U}{m c^2}.$$

Considerando que na vizinhança da Terra é: $\Delta U = m g h$, temos:

$$10^{-16} = \frac{gh}{c^2} \Rightarrow h = \frac{10^{-16} c^2}{g} \Rightarrow h = \frac{10^{-16} \times 9 \times 10^{16}}{10} \Rightarrow h = 0,9 \text{ m}$$

Apêndice C

Princípios Físicos e Matemáticos da Teoria da Relatividade Geral



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Física
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física
Mestrado Profissional em Ensino de Física

Princípios Físicos e Matemáticos da Teoria da Relatividade Geral

(Textos de apoio para professores e alunos)

Edward Céspedes Carageorge
Carlos Augusto Domingues Zarro

Material instrucional associado à dissertação de mestrado de Edward Céspedes Carageorge, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro

Março de 2020

Neste material, vamos apresentar os conteúdos básicos da teoria da relatividade geral (TRG) como os princípios físicos e matemáticos que guiaram Albert Einstein na sua busca pela TRG. Ele servirá tanto para o professor que deseja lecionar o conteúdo quanto para o aluno que quiser se aprofundar no tema.

C.1 Princípios físicos da TRG

C.1.1 Princípio da equivalência

Para entendermos o significado desse princípio, lembremos do experimento de Galileu ao abandonar dois corpos com diferentes massas do alto da torre de Pisa e constatar que eles chegam simultaneamente ao solo. Essa é uma constatação de que a aceleração devido à ação gravitacional, nas vizinhanças da superfície da Terra, é a mesma para todos os corpos, independente de suas massas, formas ou composição. E pode ser ilustrado por um vídeo da BBC disponível no YouTube <https://youtu.be/E43-CfukEgs?t=169> em que uma pena e uma bola de boliche são abandonados de uma mesma altura em uma câmara de vácuo e elas caem juntas no solo [10]. Esta mesma ideia é o que acontece com os astronautas em órbita, uma nave orbitando a Terra está em queda livre ao redor do planeta, juntamente com todos os corpos dentro da nave, por isso a tripulação parece estar flutuando, mas cada astronauta está em repouso em relação aos outros.

A massa inercial m_i de um corpo é a medida do seu coeficiente de inércia, ou seja, da sua resistência em ter seu estado de movimento alterado e corresponde ao termo que aparece na 2ª lei de Newton conforme a Eq. (C.1). A priori m_i não possui nenhuma relação com gravitação.

$$\vec{F} = m_i \vec{a}, \quad (\text{C.1})$$

onde \vec{F} é a força resultante que atua no corpo e \vec{a} é a aceleração.

A força gravitacional por sua vez é outro tipo de força provocada em corpos que possuem uma *carga gravitacional*, denominada massa gravitacional passiva $m_{g(p)}$. Na lei

da gravitação de Newton aparece um outro tipo de massa que é capaz de provocar forças em outros corpos, ou em termos modernos, ser fonte de campo gravitacional. Essa é a massa gravitacional ativa $m_{g(a)}$.

Considere um corpo 1 que *produz* uma força gravitacional $F_{1(2)}^{\vec{}}$ com sua massa gravitacional ativa $m_{g1(a)}$ e outro que sofre essa força por ter uma massa gravitacional passiva $m_{g2(p)}$, usando a lei da gravitação Newtoniana, temos:

$$F_{1(2)}^{\vec{}} = -G \frac{m_{g1(a)} m_{g2(p)}}{r_{1(2)}^2} r_{1(2)}^{\vec{}}, \quad (\text{C.2})$$

onde $r_{1(2)}^{\vec{}}$ é o vetor que liga o centro de massa do corpo 1 ao do 2.

Analogamente a força gravitacional sobre o corpo 1 devido ao 2 $F_{2(1)}^{\vec{}}$ deve ser escrita como:

$$F_{2(1)}^{\vec{}} = -G \frac{m_{g2(a)} m_{g1(p)}}{r_{2(1)}^2} r_{2(1)}^{\vec{}}, \quad (\text{C.3})$$

onde $r_{2(1)}^{\vec{}} = -r_{1(2)}^{\vec{}}$ é o vetor que liga o centro de massa do corpo 2 ao do 1. Mas sabemos, pela 3ª Lei de Newton, que $F_{2(1)}^{\vec{}} = -F_{1(2)}^{\vec{}}$, dessa forma:

$$m_{g1(a)} m_{g2(p)} = m_{g2(a)} m_{g1(p)} \Rightarrow \frac{m_{g1(a)}}{m_{g1(p)}} = \frac{m_{g2(a)}}{m_{g2(p)}}, \quad (\text{C.4})$$

mostramos que razão entre as massas gravitacionais ativa e passiva é a mesma para quaisquer corpos. Logo, podemos tomar, sem perda de generalidade, essa constante como 1, obtendo uma única quantidade de massa gravitacional m_g

$$\frac{m_{g(p)}}{m_{g(a)}} = 1 \Rightarrow m_{g(p)} = m_{g(a)} = m_g. \quad (\text{C.5})$$

No entanto, já era um fato conhecido pelos experimentos da queda livre de Galileu que a aceleração gravitacional \vec{g} nas proximidades da superfícies da Terra é a mesma para todos os corpos, assim podemos igualar a força gravitacional \vec{F}_g à força resultante \vec{F}_r :

$$\vec{F}_g = \vec{F}_r \Rightarrow m_i \vec{a} = m_{g(p)} \vec{g} \Rightarrow \frac{m_i}{m_{g(p)}} = \text{constante}, \quad (\text{C.6})$$

podemos arbitrar essa constante como 1.

$$\frac{m_g}{m_i} = 1 \Rightarrow m_g = m_i. \quad (\text{C.7})$$

Este resultado da Eq. (C.7) foi reconhecido por Isaac Newton como uma coincidência. Vários experimentos nos séculos XIX e XX mostraram a equivalência entre as massas com um erro menor que $10^{-12}\%$. Sendo esse um dos melhores resultados estabelecidos na física [11].

“Em 1907, Einstein teve ‘a ideia mais feliz de sua vida’: o princípio da equivalência. Para um observador em queda livre não há gravidade nas suas proximidades. Assim se ele abandonar um corpo qualquer, ele permanecerá em repouso para esse observador.” [8]

Essa propriedade surpreendente verificada pela mecânica clássica é o fato das forças gravitacionais serem proporcionais à massa inercial, assim como as forças de inércia. Assim, a gravidade não apenas pode ser eliminada por um referencial em queda livre, mas pode ser criada por uma aceleração. A ideia central de Einstein foi tratar a força gravitacional como uma força inercial.

Vamos ilustrar essa equivalência do campo gravitacional uniforme com aceleração constante usando um experimento de pensamento¹. Seja um astronauta confinado em um foguete sem janelas nem meios de contato com outras pessoas. Ele possui uma bola, um cronômetro e uma fita métrica para realizar alguns experimentos simples. Vamos considerar quatro situações descritas abaixo e representadas pelas Figs. C.1-C.4

- **Situação 1:** o foguete é colocado no espaço em um local infinitamente distante de quaisquer outros corpos. Os seus motores são ligados, fazendo-o acelerar para cima

¹*Gedankenexperiment*, do alemão.

com aceleração constante de módulo g . Quando o astronauta abandona a bola, ele percebe que ela cai em direção ao solo como aceleração g .

- **Situação 2:** os motores do foguete são desligados, então ele segue com velocidade constante. Quando o astronauta abandona a bola, ela permanece parada em relação a ele.
- **Situação 3:** o foguete é trazido para superfície da Terra. Desprezando os efeitos de rotação, um corpo abandonado irá cair em direção ao solo da nave com aceleração constante de módulo g .
- **Situação 4:** por último, o foguete é abandonado caindo livremente sob ação do campo gravitacional uniforme, próximo à superfície da Terra, em direção ao centro do planeta. Um corpo abandonado permanece em repouso em relação ao astronauta que também está caindo junto da nave.

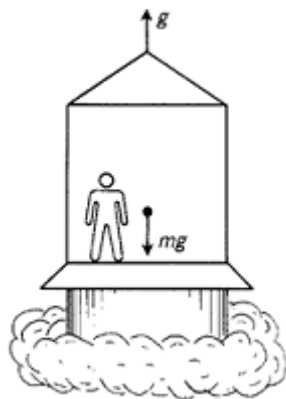


Figura C.1: Situação 1: O astronauta abandona um corpo dentro de um foguete acelerado para cima com aceleração de módulo g . Disponível em [13].

Claramente, do ponto de vista do astronauta, as situações **1** e **3** são indistinguíveis. Assim como **2** e **4**. Vamos usá-los para traçar argumentos que nos levem aos conceitos do espaço não plano, ou seja, curvo.

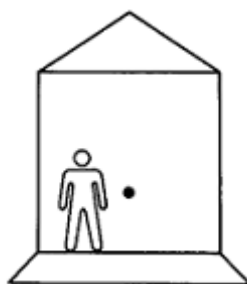


Figura C.2: Situação 2: O astronauta abandona um corpo dentro de um foguete sem aceleração. Disponível em [13].

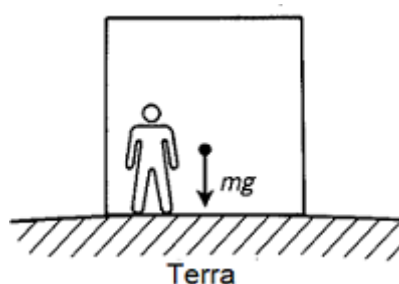


Figura C.3: Situação 3: O astronauta abandona um corpo dentro de um foguete posicionado na superfície da Terra. Disponível em [13].

C.1.2 Desvio para o vermelho

Outro experimento de pensamento no qual Einstein aplicou o princípio de equivalência foi no desvio para o vermelho (*redshift*).

Suponha um prédio com altura h , como o da Fig. C.5, com duas pessoas, uma na parte inferior, \mathcal{S} , que envia um sinal luminoso de frequência f para o outra na parte superior, \mathcal{S}' . Qual a frequência f' medida por \mathcal{S}' ?

Vamos aplicar o princípio de equivalência substituindo a ação gravitacional no prédio por um foguete acelerado para cima. Assim, teremos o observador de cima se afastando da luz emitida, sendo a frequência recebida afetada pelo efeito Doppler.

Considere \mathcal{S}' partindo do repouso e ganhando velocidade para cima devido à aceleração g . Seja Δt o tempo que a luz, com velocidade constante c , leva para atingir a parte superior do foguete. Supondo a velocidade da luz muito grande, podemos desprezar a variação da posição do foguete até que ela chegue na parte superior ($\Delta h \ll h$), sendo assim:

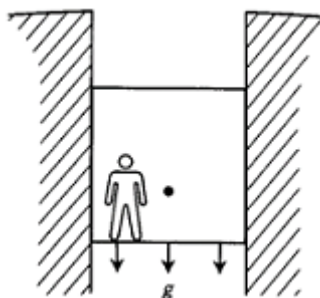


Figura C.4: Situação 4: O astronauta abandona um corpo dentro de um foguete em queda livre próximo à superfície da Terra. Disponível em [13].

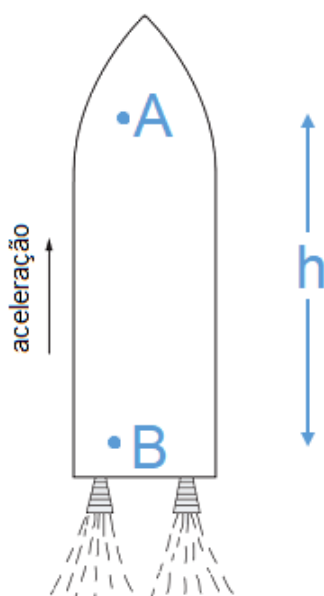


Figura C.5: Desvio para o vermelho gravitacional da luz ao se mover para cima em uma região com campo gravitacional. Fonte: disponível em <http://homepage.physics.uiowa.edu>

$$\Delta t = \frac{h}{c}. \quad (\text{C.8})$$

Nesse mesmo intervalo de tempo, o foguete acelerado terá uma velocidade igual a:

$$v = g\Delta t = g\frac{h}{c}. \quad (\text{C.9})$$

Usando a equação do efeito Doppler não relativístico e supondo o módulo da velocidade do foguete $v \ll c$, temos:

$$f' = f\frac{c-v}{c}. \quad (\text{C.10})$$

Assim, teremos:

$$f' = f \frac{c - \frac{gh}{c}}{c} = f \frac{c^2 - gh}{c^2} \Rightarrow f' = f \left(1 - \frac{gh}{c^2} \right). \quad (\text{C.11})$$

Identificando o potencial gravitacional $\Phi = gh$ próximo à superfície da Terra, temos que o período T' medido por \mathcal{S}' em relação ao período T de \mathcal{S} vale²:

$$T' = \frac{1}{f'} = \frac{1}{f \left(1 - \frac{\Phi}{c^2} \right)} = T \left(1 - \frac{\Phi}{c^2} \right)^{-1} \Rightarrow T' \approx T \left(1 + \frac{\Phi}{c^2} \right). \quad (\text{C.12})$$

Assim, \mathcal{S}' medirá um período maior para o sinal, dessa forma teremos uma frequência menor nesse referencial, por isso esse efeito é chamado de desvio para o vermelho gravitacional (*gravitational redshift*).

De outra maneira, podemos imaginar que esse sinal emitido possa ser usado para quantificar o tempo, por exemplo, dois sinais consecutivos são emitidos em um segundo. Assim quando um receptor está num potencial gravitacional maior que o emissor, os sinais são recebidos mais devagar do que são emitidos. Já quando um receptor está num potencial gravitacional menor que o emissor, os sinais são recebidos mais rapidamente do que são emitidos. Concluímos assim que os relógios passam mais devagar quando afetados pelo campo gravitacional mais intenso.

Há uma comprovação prática do desvio para o vermelho que é o experimento de Pound-Rebka [14] de 1959, uma medida do redshift feita na superfície da Terra com raios- γ emitidos do topo de um prédio até o solo. Não entraremos em detalhes sobre o experimento, mas ele foi realizado em uma distância de 22,5 m avaliando uma diferença de energia relativa entre o fóton emitido e recebido da ordem de $2,5 \cdot 10^{-15}$. O resultado confirmou as previsões da teoria da relatividade geral com uma precisão de 10%. Outros testes envolvendo hidrogênio [15] na década de 1980 aumentaram a precisão para 0,01%.

²Usando a aproximação de Bernoulli $(1+x)^n \approx 1+nx$, $x \ll 1$.

C.1.3 Deflexão da luz em um campo gravitacional

O poder do princípio de equivalência reside na sua aplicação a todas as leis da física. Consideremos o foguete em queda livre num campo gravitacional uniforme \vec{g} com uma fonte de luz F , emitindo um raio de luz perpendicular ao campo de acordo com a Fig. C.6. Para o observador S' , dentro do foguete, a luz viaja em linha reta e sai pelo orifício P . Entretanto para um observador externo S , o raio luminoso descreverá uma parábola. Portanto, há deflexão dos raios luminosos num campo gravitacional.

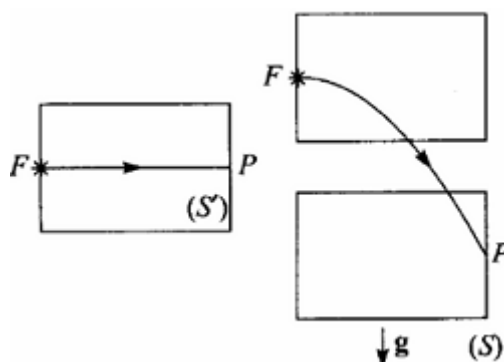


Figura C.6: Deflexão gravitacional da luz. Uma fonte de luz em F emite um raio em direção a P , localizado em uma mesma altura de F . Na figura da esquerda, temos a trajetória da luz vista por um referencial solidário ao foguete: uma linha reta. Na direita, vemos a trajetória vista por um referencial externo ao foguete, para quem os efeitos do campo gravitacional são observados: uma parábola. Fonte: disponível em [11]

A existência da deflexão da luz exigida pela teoria foi comprovada fotograficamente durante o eclipse solar em maio de 1919 por duas expedições organizadas pela *Royal Astronomical Society*, uma delas à África e outra ao Brasil, sob a direção dos astrônomos Eddington e Crommelin³.

Cabe ressaltar que Einstein não foi o primeiro a propor que a luz pode sofrer um desvio na sua trajetória. Em 1801, Johhan von Sodner escreve um artigo em que desenvolve ideias Newtonianas de atração gravitacional para mostrar a influência da gravidade na trajetória de um raio luminoso [18]. Vamos fazer uma abordagem simplificada do problema.

Nesse método para calcular a deflexão da luz, assumimos, baseado na óptica Newto-

³Para mais detalhes recomenda-se [17].

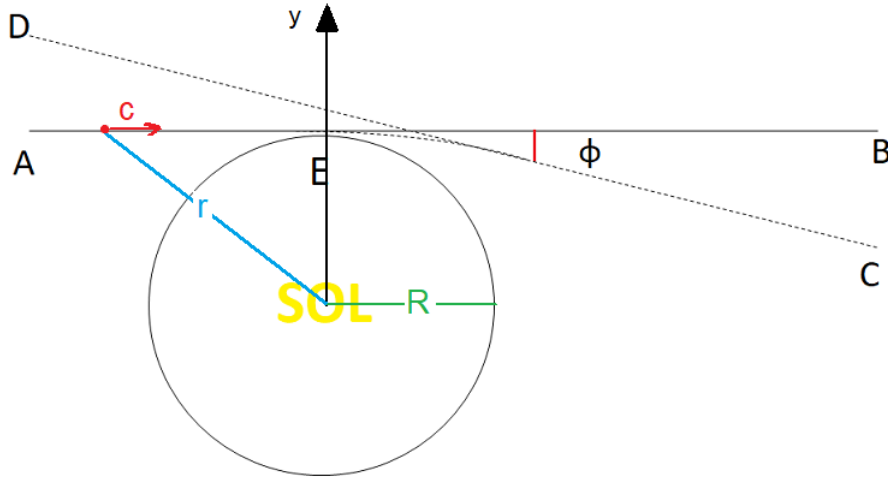


Figura C.7: Deflexão gravitacional da luz passando próximo ao Sol. Um raio de luz vindo do infinito seguindo a trajetória de A para B, tangente ao Sol. Mas ao ser atraído pelo astro, com massa M e raio R , ele é defletido pela ação gravitacional e segue a trajetória para C, onde um observador pensa que a luz fora emitida do ponto D.

niana, que a luz é um corpúsculo que sofre ação gravitacional como qualquer outro corpo, independente da sua massa. Essa aceleração gravitacional fará com que a luz adquira velocidade vertical devido à atração do Sol, como exemplificado na Fig. C.7. Portanto há uma deflexão ϕ no percurso desse raio luminoso, que pode ser calculado pela razão entre a velocidade vertical *adquirida* pela interação gravitacional e a velocidade da luz na horizontal assim:

$$\tan \phi = \frac{v_y}{c}. \quad (\text{C.13})$$

Usando a aceleração gravitacional, temos:

$$a = \frac{GM}{r^2}. \quad (\text{C.14})$$

onde r é a distância do corpúsculo luz até o centro do Sol.

Somente a componente vertical será levada em consideração, pois na horizontal o ganho de velocidade será desprezado e a luz continuará com velocidade constante c

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} \Rightarrow v_y = \int_0^\infty \frac{GM}{cr^2} \cos(\theta) dy = \int_0^\infty \frac{GMR}{c(R^2 + y^2)^{3/2}} dy = \frac{2GM}{cR}. \quad (\text{C.15})$$

Substituindo os dados no SI para um raio que tangencia o Sol $G = 6,7 \cdot 10^{-11}$, $M = 2,0 \cdot 10^{30}$, $R = 7,0 \cdot 10^8$ e $c = 3,0 \cdot 10^8$, temos:

$$\tan \frac{v_y}{c} = \tan \frac{2GM}{c^2 R} \Rightarrow \tan \phi = 0,87''.$$

Esse resultado é metade do valor previsto pela TRG, comprovada pelo Eclipse de 1919. Einstein atribui metade dessa deflexão ao efeito do campo Newtoniano de atração do Sol e a outra metade à curvatura apenas do espaço causada pela presença do Sol [19]. Quando esses efeitos são somados, temos o resultado previsto pela TRG.

C.2 Curvatura do espaço-tempo

A ideia central da relatividade geral é que a gravidade surge da curvatura do espaço-tempo, ou seja, gravidade é geometria. De maneira simplificada, imagine uma malha feita por varetas formando um quase contínuo espaço Euclidiano bidimensional. Se esse conjunto de varetas sofrer um aquecimento desigual, ou seja, cada uma se dilatar de uma maneira especial, teremos um modelo de um espaço não-Euclidiano ou Gaussiano como mostrado na Fig. C.8.

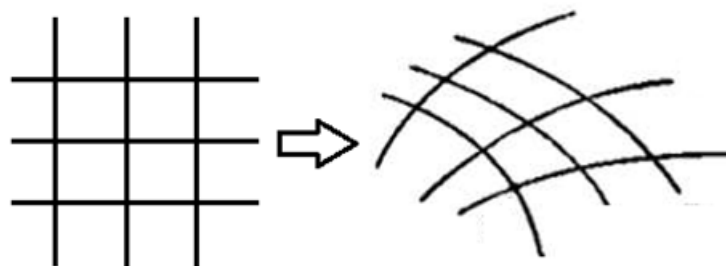


Figura C.8: Modelo de espaços Euclidiano e Gaussiano. Na esquerda, temos uma malha representando o espaço Euclidiano (plano), em que todos os pontos adjacentes são equidistantes entre si. Na direita, temos um espaço curvo qualquer, em que a distância entre pontos adjacentes dependem da sua posição. Fonte: adaptado de [19].

Como já falamos no princípio de equivalência, apenas no campo gravitacional todos os corpos realmente se movem da mesma maneira dadas as mesmas condições iniciais. A ideia de Einstein foi que a unicidade desses percursos poderia ser explicada em termos de

uma geometria quadridimensional, denominada espaço-tempo⁴. Dessa forma, os corpos se moveriam em trajetórias *retilíneas* nesse espaço-tempo curvo.

C.2.1 Descrição da curvatura

A descrição geométrica pode ser facilmente ilustrada em duas dimensões. Na geometria Euclidiana, por exemplo, temos que a soma dos ângulos internos α_i de um triângulo vale:

$$\Sigma(\alpha_i) = \pi. \quad (\text{C.16})$$

Outra relação define a razão entre o comprimento C da circunferência com seu raio r dada por:

$$\frac{C}{r} = 2\pi. \quad (\text{C.17})$$

Veremos agora um exemplo de geometria espacial não-Euclidiana sobre uma superfície esférica de raio R para ilustração de uma diferente geometria bidimensional. Primeiro vamos aprender a desenhar uma linha reta nessa esfera. A definição continua a mesma do espaço Euclidiano, menor distância entre dois pontos distintos. Mas como somos obrigados a permanecer sobre a superfície da esfera, essa menor distância estará sobre um *grande círculo*, uma circunferência traçada entre os dois pontos e o centro dessa esfera, como representado na Fig. C.9.

Uma relação curiosa é que a soma dos ângulos internos α_i de um triângulo, como o da Fig. C.10, depende da sua área A :

$$\Sigma(\alpha_i) = \pi + \frac{A}{R^2}. \quad (\text{C.18})$$

Coordenadas

A ideia chave para descrição da geometria é usar cálculo diferencial para reduzir toda a geometria através de distâncias entre cada par de pontos próximos. A partir disso, a

⁴Do inglês *spacetime*.

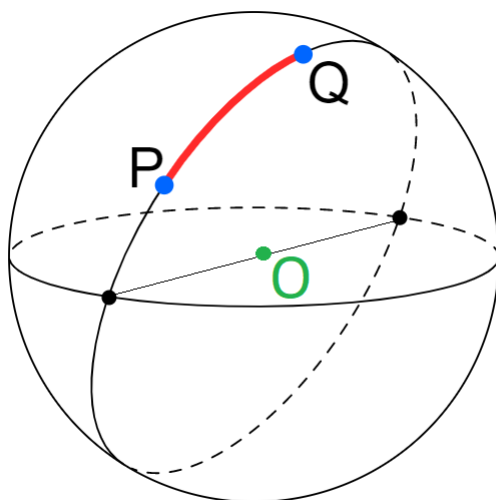


Figura C.9: Um diagrama ilustrando um grande círculo para representar a menor distância entre dois pontos P e Q sobre a esfera.

distância entre pontos distantes será dada por integração. E linhas retas são curvas que minimizam a distância entre dois pontos.

Uma maneira sistemática de rotular pontos é um pré-requisito para uma especificação dessa distância entre pontos próximos. Um sistema de coordenadas atribui rótulos exclusivos a cada ponto e há muitos sistemas que fazem isso. Em três dimensões, por exemplo, há as coordenadas Cartesianas (x, y, z) e esféricas (r, θ, ϕ) .

Como o sistema de coordenadas pode ser qualquer um, usaremos uma grandeza invariante chamada de **intervalo espaçotemporal**, representada por ds^2 , que é descrito pelos elementos de linha. Já o elemento de linha especifica a geometria espaçotemporal utilizada. Vamos mostrar um exemplo do espaço-tempo de Minkowski⁵:

$$ds^2 = -(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (\text{C.19})$$

A parte espacial da Eq. (C.19) pode ser transformada em coordenadas esféricas, melhor observada na Fig. C.11, através das relações:

⁵Essa é a formulação geométrica da relatividade restrita.

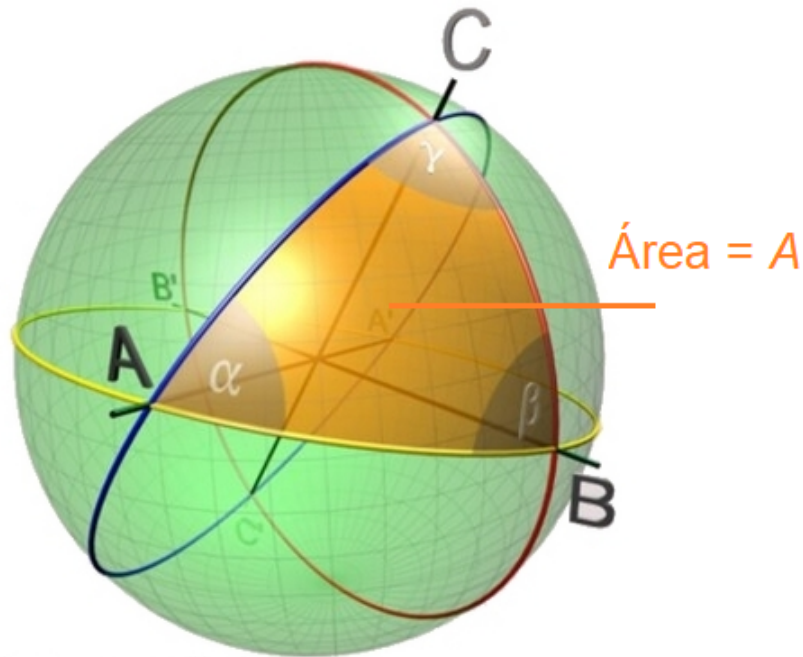


Figura C.10: Um triângulo representado sobre a superfície de uma esfera, de raio R , obtido por três pontos de interseção (A , B e C) entre grandes círculos desenhados sobre a superfície dessa esfera. Fonte: adaptado de <http://commons.wikimedia.org/>.

$$x = r \operatorname{sen} \theta \cos \phi \quad (\text{C.20a})$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \quad (\text{C.20b})$$

$$z = r \cos \theta \quad (\text{C.20c})$$

Assim, as relações entre as derivadas em ambos os sistemas valem:

$$dx = dr \operatorname{sen} \theta \cos \phi + r \cos \theta d\theta \cos \phi - r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi d\phi,$$

$$dy = dr \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi + r \cos \theta d\theta \operatorname{sen} \phi + r \operatorname{sen} \theta \cos \phi d\phi,$$

$$dz = dr \cos \theta - r \operatorname{sen} \theta d\theta.$$

Finalmente, podemos calcular $ds^2 = (cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ em coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} ds^2 = & -(cdt)^2 + (dr \operatorname{sen} \theta \cos \phi + r \cos \theta d\theta \cos \phi - r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi d\phi)^2 + \\ & + (dr \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi + r \cos \theta d\theta \operatorname{sen} \phi + r \operatorname{sen} \theta \cos \phi d\phi)^2 + (dr \cos \theta - r \operatorname{sen} \theta d\theta)^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

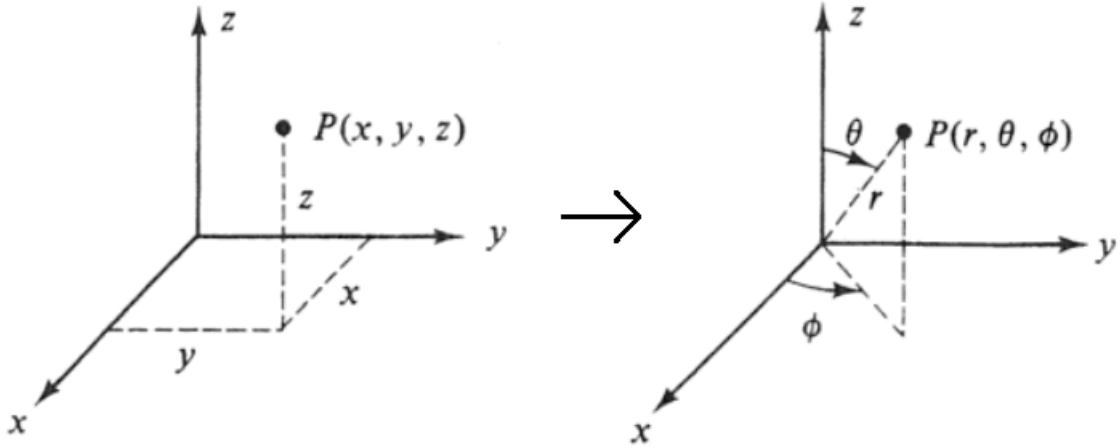


Figura C.11: As coordenadas cartesianas são representadas por 3 valores, (x, y, z) . Quando são convertidos em coordenadas esféricas, os novos valores serão representados como (r, θ, ϕ) . Fonte: disponível em <https://bit.ly/3ckxNNV>.

$$ds^2 = -(cdt)^2 + dr^2 + (rd\theta)^2 + (r\text{sen } \theta d\phi)^2, \quad (\text{C.21})$$

que é o elemento de linha do espaço de Minkowski em coordenadas esféricas.

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\text{sen}^2\theta d\phi^2 \quad (\text{C.22})$$

Para descrição de uma geometria genérica, devemos usar o sistema quadridimensional x^a , com a sendo 0, 1, 2 ou 3, para mapear os pontos⁶ e especificar o elemento de linha ds^2 entre por dois pontos próximos separados pelo intervalo coordenado dx^a . De forma geral, o elemento de linha pode ser escrito como:

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b, \quad (\text{C.23})$$

onde g_{ab} é a métrica do espaço-tempo .

Geometria sobre uma esfera

Para descrevermos outras propriedades, usaremos as coordenadas (θ, ϕ) conforme mostra a Fig. C.12. O seu elemento de linha dS^2 apenas nas componentes espaciais, com $r = R$ constante, será dado por:

$$dS^2 = R^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2). \quad (\text{C.24})$$

⁶No espaço de Minkowski temos $x^0 = t$, $x^1 = x$, $x^2 = y$ e $x^3 = z$.

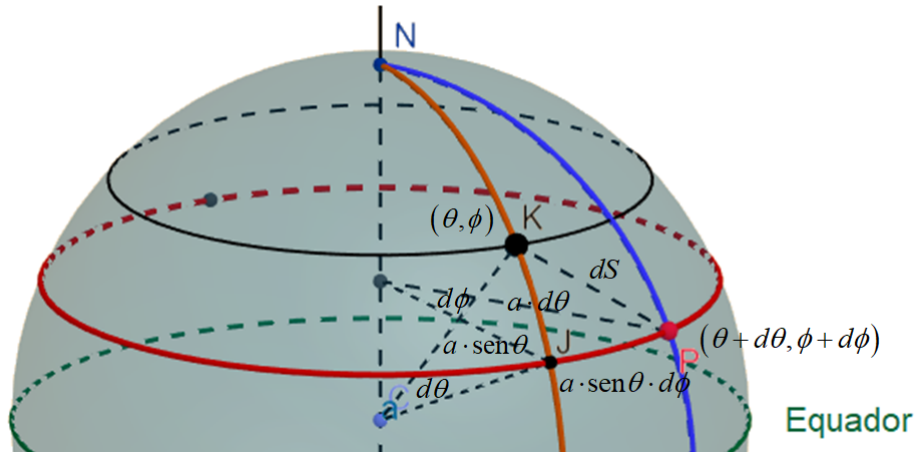


Figura C.12: Representação do elemento de linha em coordenadas esféricas. Dois pontos K e P separados por uma distância infinitesimal estão localizados em (θ, ϕ) e $(\theta + d\theta, \phi + d\phi)$. A distância entre os pontos J e P, localizados na mesma latitude θ , vale $R \sin\theta d\phi$. A distância entre K e J, localizados na mesma longitude ϕ , vale $R d\theta$. Usando o teorema de Pitágoras, podemos determinar o valor ds^2 , distância entre os pontos K e P. Adaptado de [1].

Vamos agora calcular a razão entre o perímetro da circunferência de raio r pelo seu raio nessa geometria esférica. Colocando o centro da circunferência no polo norte da esfera, O perímetro C será a integral de dS em torno do círculo de θ constante, ou seja, $\theta = \Theta$.

$$C = \oint dS = \int_0^{2\pi} R \sin\Theta d\phi = 2\pi R \sin\Theta. \quad (\text{C.25})$$

Já o raio r é a integral ao longo de qualquer curva onde ϕ é constante, portanto vale:

$$r = \int dS = \int_0^{\Theta} R d\phi = R\Theta \Rightarrow \Theta = \frac{r}{R}. \quad (\text{C.26})$$

Substituindo a (C.26) em (C.25), obtemos:

$$C = 2\pi R \sin\left(\frac{r}{R}\right) \quad (\text{C.27})$$

Quando $r \ll R$, recuperamos a relação clássica da geometria

$$C = \lim_{\frac{r}{R} \rightarrow 0} 2\pi R \sin\left(\frac{r}{R}\right) = 2\pi R \left(\frac{r}{R}\right) = 2\pi r \quad (\text{C.28})$$

Não é necessário deixar a superfície da Terra para determinar sua geometria. Pode-se medir os ângulos de um triângulo ou o comprimento e raio de uma circunferência. Pela

aplicação das Eqs. (C.18) e (C.27), podemos determinar o raio R de curvatura da nossa geometria.

A mudança da componente temporal já foi observada no desvio para o vermelho gravitacional com alteração do tempo pelo potencial gravitacional representado pela Eq. (C.12). Aplicando esse resultado na componente temporal, temos a mudança dessa geometria por ação da gravidade:

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2} \right) (cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (\text{C.29})$$

onde Φ é o potencial gravitacional⁷. Nota-se que no resultado da deflexão da luz utilizando o modelo Newtoniano não há nenhuma previsão na alteração na componente espacial, mas há na temporal.

Contudo na TRG, existe uma alteração na componente espacial da métrica provocada pelas massas⁸. Um exemplo é o campo gravitacional produzido por uma distribuição esférica de matéria, obtido pelo astrônomo alemão Karl Schwarzschild em 1916 [8]. Essa curvatura pode ser expressa por uma métrica (doravante chamada métrica de Schwarzschild) com a seguinte forma [1]:

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2} \right) (cdt)^2 + \frac{1}{1 + \frac{2\Phi}{c^2}} (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (\text{C.30})$$

Observe que a componente espacial também é modificada pelo potencial gravitacional.

C.2.2 Diagramas de espaço-tempo

Para conseguirmos expressar os eventos usando a geometria, vamos descrever um sistema quadridimensional (t, x, y, z) , que será representado por um diagrama **espaço-tempo**, como o da Fig. C.13.

⁷O potencial gravitacional gerado por uma estrela, de massa M , como o Sol é dado por $\Phi = -\frac{GM}{r^2}$, onde G é a constante da gravitação e r é a distância do centro da estrela ao ponto onde estamos medindo o potencial.

⁸Pela relatividade restrita, existe uma equivalência entre massa e energia, no entanto, usaremos apenas a massa como causador das deformações no espaço-tempo.

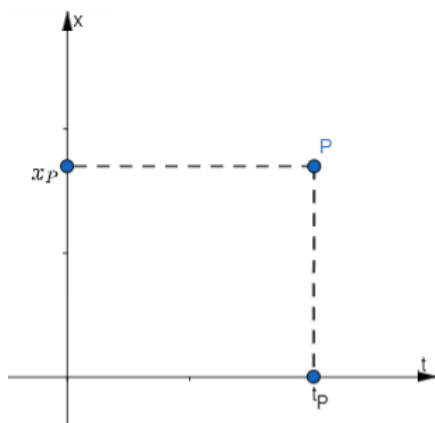


Figura C.13: Diagrama espaço-tempo em duas dimensões (x, t) . A coordenada x_p indica a posição espacial da partícula e t_p indica a sua posição temporal.

Os eventos serão representados por um ponto P , e as coordenadas x_p e t_p trazem informações de onde e quando o evento ocorreu respectivamente. É conveniente transformarmos a coordenada temporal em espacial ct , aproveitando a constância da velocidade da luz a fim de que ambos os eixos tenham mesma dimensão.

Uma partícula descreverá sua trajetória espacotemporal por uma linha de mundo, alguns exemplos são ilustrados na Fig. C.14.

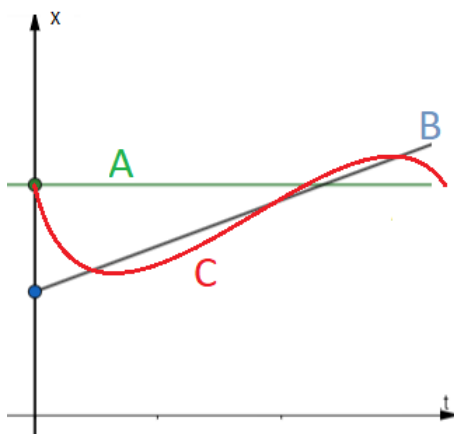


Figura C.14: Linhas de mundo em um espaço-tempo bidimensional. A linha de mundo A representa uma partícula em repouso. A linha de mundo B representa uma partícula em movimento uniforme. A linha de mundo C representa uma partícula em movimento oscilatório.

A descrição matemática da geometria será dada pela sua métrica como, por exemplo, a de Minkowski (Eq. (C.19)) ou a de Schwarzschild (Eq. (C.30)), ambas em coordenadas

Cartesianas.

Cones de Luz

O elemento de linha, (ds^2) , pode assumir três tipos de valores: positivo, negativo ou nulo. Isso leva a três tipos de linhas de mundo: tipo tempo, tipo espaço ou nulo⁹ cujos valores são representados por:

$$ds^2 > 0 \quad \text{tipo tempo,} \quad (\text{C.31a})$$

$$ds^2 = 0 \quad \text{tipo nulo,} \quad (\text{C.31b})$$

$$ds^2 < 0 \quad \text{tipo espaço.} \quad (\text{C.31c})$$

A constância da velocidade da luz é o fator mais importante sobre o espaço-tempo na teoria da relatividade restrita. Observe que o valor de ds^2 é nulo quando o *objeto* se move com velocidade $v = c$:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 = -c^2 dt^2 + (v dt)^2 = -c^2 dt^2 + (c dt)^2 \Rightarrow ds^2 = 0. \quad (\text{C.32})$$

Esta propriedade pode ser expressa geometricamente nos diagramas espaço tempo com linhas inclinadas de 45° . Já se colocarmos com duas dimensões espaciais xy , teremos os *cones de luz*, que podem ser vistos na Fig. C.15. Para termos o cone de luz, não precisamos que a luz esteja presente. Os cones mapeiam as trajetórias que a luz teria se partisse do **presente**. Para linhas do *tipo tempo*, o objeto se move com velocidade menor que a da luz, ou seja, possuem linhas de mundo com inclinação menor que 45° e sempre interior ao cone. Essas linhas representam trajetória de um objeto real, pois sua velocidade é sempre menor que a da luz. Para linhas do *tipo espaço*, o objeto teria que viajar com velocidade superior à da luz, o que é impossível frente à relatividade restrita.

⁹Do inglês *timelike*, *spacelike* e *null*.

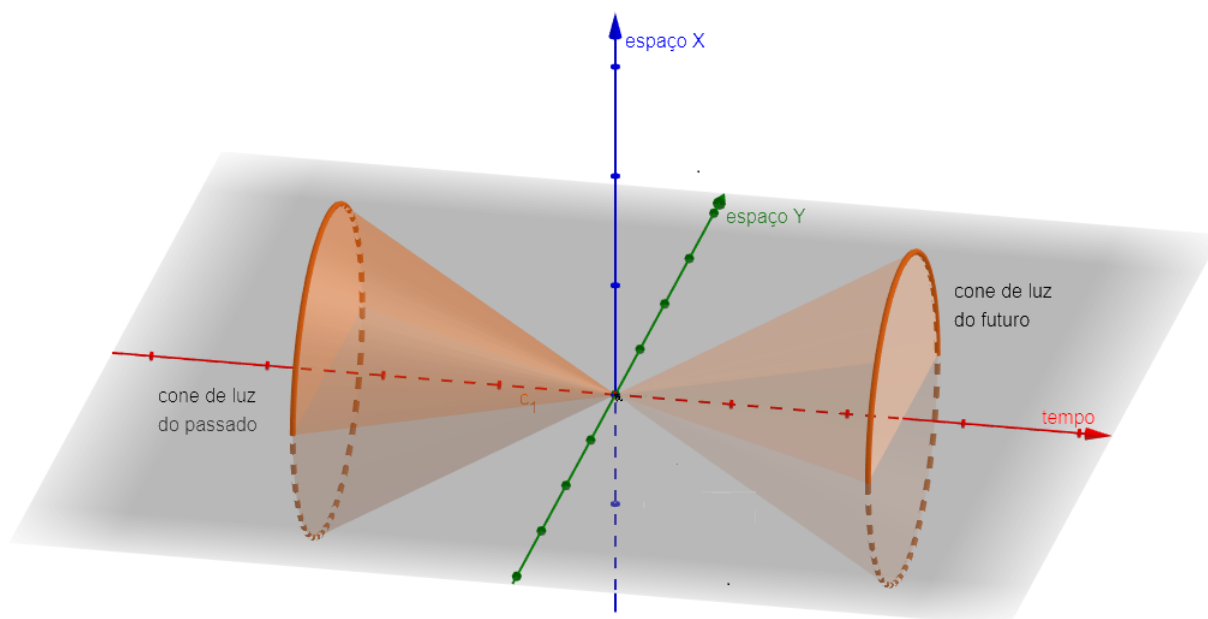


Figura C.15: Representação de um cone de luz tridimensional (t, x, y) . Se você estiver no ponto **presente**, os eventos no interior do cone **futuro** representam todos os eventos que você consegue alcançar com um sinal físico, ou seja, viajando até eles em linhas do *tipo tempo* ou *tipo nulo*. Para esse mesmo ponto inicial, o cone do **passado** contém todos os eventos que podem chegar ao presente, ou seja, ele contém todos os eventos que podem afetar o presente. A região fora do cone não tem uma relação de causalidade com o presente, pois não pode fisicamente alcançá-lo.

C.2.3 O Princípio da Correspondência

A relatividade geral deve concordar com a relatividade restrita na ausência de gravidade $G \rightarrow 0$ e com a gravitação Newtoniana para campos fracos e baixas velocidades comparadas à da luz $c \rightarrow \infty$. E ambas devem levar à mecânica Newtoniana na ausência de gravitação quando as duas condições limites forem satisfeitas.

Isso dá origem ao princípio da correspondência como indicado na Fig. C.16. No entanto a lei da gravitação Newtoniana só aparece se considerarmos uma deformação na componente espacial como vimos no exemplo da métrica de Schwarzschild na Eq. (C.38). Tomando o limite $\Phi \ll 1$ encontramos:

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)(cdt)^2 + \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (\text{C.33})$$

Este elemento de linha é conhecido como **estático** ou de **campo fraco** e é uma boa apro-

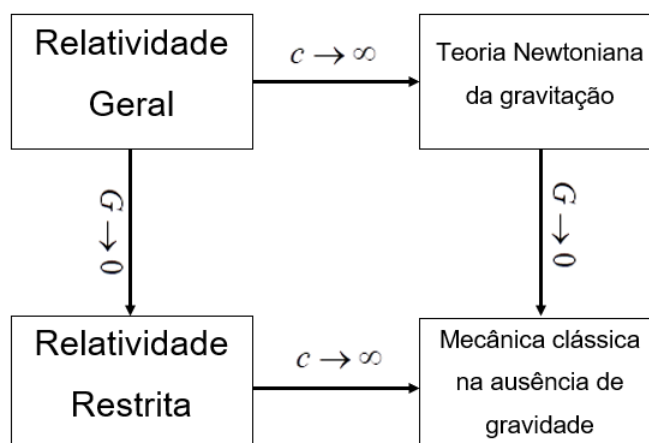


Figura C.16: O princípio da correspondência para a relatividade geral.

ximação para a geometria do espaço-tempo gerada pelo Sol. Podemos deduzir a equação da gravitação Newtoniana usando esse formalismo e as equações de Euler-Lagrange¹⁰:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\nabla\Phi \Rightarrow \vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}, \quad (\text{C.34})$$

onde M é a fonte de campo gravitacional; m é a carga gravitacional e r é a distância que separa o centro desses dois corpos.

C.2.4 Geodésica

O princípio para determinarmos o movimento de uma partícula livre num espaço-tempo curvo é o **Princípio Variacional**, cujo enunciado pode ser descrito como “a trajetória seguida por uma partícula livre entre dois pontos do tipo tempo extremiza o tempo próprio entre eles”, o que, matematicamente pode ser representado por [1]:

$$\delta \int \left(-g_{ab}dx^a dx^b\right)^{1/2} = 0. \quad (\text{C.35})$$

Essa extremização dará origem ao *menor caminho* entre dois pontos, denominado geodésica. Cabe ressaltar que no espaço Euclidiano, a geodésica é simplesmente uma linha reta. E na geometria esférica, um arco de grande círculo como já representamos na Fig. C.9.

¹⁰Para conhecer mais, consulte o Capítulo 3 dessa dissertação.

Modelos de Setores

Para nos prepararmos para este novo ponto de vista, descrevemos a visão de mundo dos *flatlanders*¹¹, os habitantes de *Flatland* no conto de Edwin Abbott com o mesmo nome [20].

“Eu chamo o nosso mundo de Flatland[...]. Imagine uma vasta folha de papel sobre a qual [...] figuras [...] se movem livremente, mas sem o poder de elevar-se ou afundar-se abaixo dela, muito parecido com sombras.” [20]

Os *flatlanders* se movem em duas dimensões (frente-trás ou direita-esquerda), a terceira dimensão (cima-baixo) não é apenas inacessível para eles, mas está além de sua imaginação. Quando estendemos o *Flatland* de Abbott para superfícies curvas, os *flatlanders* ainda se movem apenas sobre a superfície: para a frente ou para trás e para a direita ou para a esquerda. Na falta do conceito de cima e para baixo, eles não podem conceber uma superfície curvada a um espaço tridimensional. No entanto, eles são capazes de estudar a curvatura do seu mundo. Nós somos *spacelanders*, familiarizados com três dimensões, mas incapazes de conceber um espaço dimensional superior, podemos examinar a curvatura do nosso espaço tridimensional da mesma maneira que os *flatlanders* examinam as superfícies planas curvas.

Para visualizarmos os efeitos físicos de um espaço curvo, vamos introduzir os modelos de setores. Neles nós vamos subdividir uma superfície curva em pedaços pequenos o bastante para consideramos planos. Observe na Fig. C.17 em que *buracos* aparecem sempre que a peças de um espaço curvo são montadas em um um espaço Euclidiano.

Como cada setor é pequeno, localmente a geodésica será uma linha reta. Essa linha mantém seu percurso de um setor a outro quando eles são encaixados sem nenhum *buraco* entre eles, ou seja, quando unidos por vértices em comum, como pode ser visto no item (c) da Fig. C.17. Se um segunda geodésica for adicionada paralelamente à primeira no

¹¹Aqui vamos usar o termo original no lugar da tradução planistas.

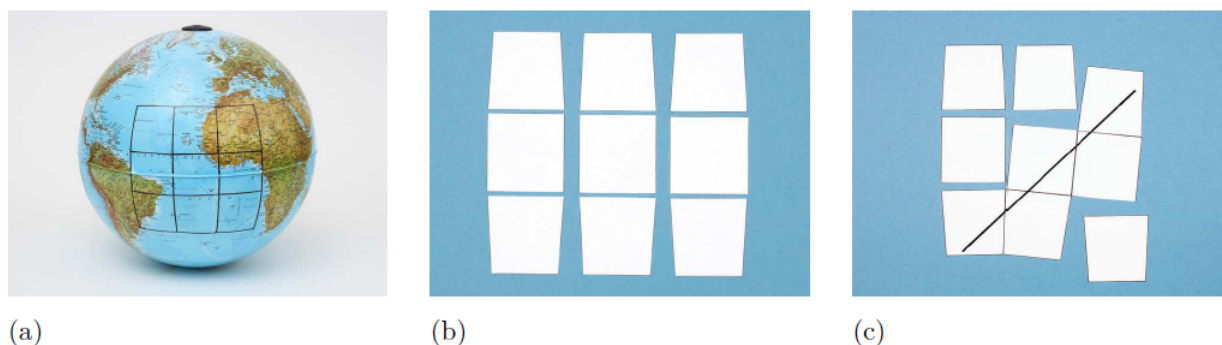


Figura C.17: Modelo de seção de uma superfície esférica. (a) O espaço curvo de uma esfera é subdividido em pequenos elementos de área. (b) Os setores são construídos como pedaços planos com os mesmos comprimentos. (c) A geodésica é construída localmente como uma linha reta usando lápis e régua. Fonte: disponível em [21].

setor inferior esquerdo, pode-se ver an Fig. C.18 que elas convergem. Isso demonstra a curvatura da nossa superfície.

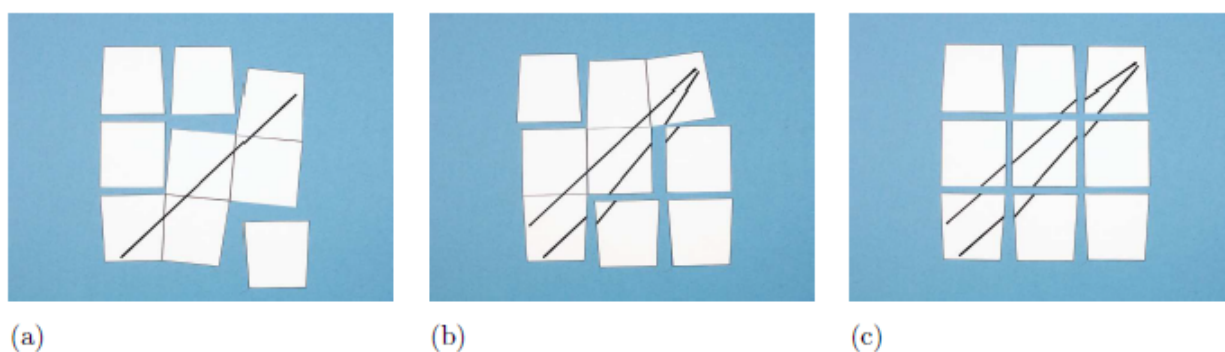


Figura C.18: Geodésicas no modelo setorial de uma esfera. (a) Os setores são unidos para desenhar a primeira linha geodésica. (b) Nova disposição dos setores para desenhar a segunda geodésica acima da primeira. (c) As duas geodésicas começam paralelas na parte inferior, mas convergem na parte superior quando os setores retornam à sua posição original. Fonte: disponível em [21].

Analogamente, podemos fazer modelos de setores que nos permitam construir geodésicas na vizinhança de um buraco negro

Geodésicas próximas a um buraco negro

Vamos agora apresentar um modelo de setores que permita construir geodésicas na vizinhança de um buraco negro. O conjunto completo de setores representam um plano de simetria ao longo do plano equatorial e formam o arranjo da Fig. [?].

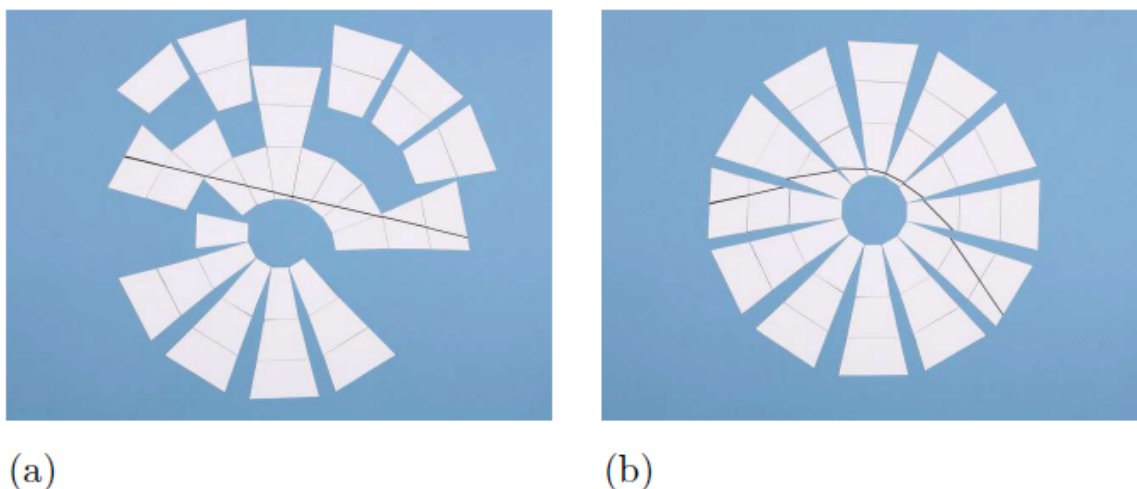


Figura C.19: Uma geodésica no modelo de setores do plano equatorial de um buraco negro. As linhas são localmente retas, no entanto a direção de *entrada* é completamente diferente da de *saída*. (a) Os setores são unidos para desenhar a linha geodésica. (b) Os setores são colocados na sua posição *original* simetricamente, ilustrando a trajetória da luz. Fonte: disponível em [21].

Observe que há *buracos* entre os setores indicando a curvatura do espaço. Para desenharmos uma geodésica, faremos um método análogo aos anteriores: juntando setores vizinhos pelos vértices em comum e desenhando uma linha reta. Pode-se observar que a direção da linha desenhada muda, ilustrando a deflexão da luz sob ação de um campo gravitacional.

Devemos ter cuidado com o resultado do desenho da geodésica, pois, apesar de ser qualitativamente correto, os setores são representações aproximadas do espaço curvo, portanto a geodésica desenhada também é uma solução aproximada. Com o método fornecido em por Zahn e Kraus [21] temos um erro de aproximadamente 0,13% em relação às medidas na esfera¹². Outro detalhe para termos em mente é que as linhas desenhadas nesses modelos não representam a trajetória de um raio de luz. A linha desenhada é uma geodésica no **espaço**, enquanto a luz se propaga em ambos **tempo** e **espaço**. Mesmo assim, trata-se de um excelente método para ilustrar algumas propriedades da geodésica.

¹²O processo de construção desses modelos pode ser encontrado em [21].

C.3 Equação de Einstein

As equações de campo da relatividade geral ou equações de Einstein foram obtidas no final de 1915 por Albert Einstein e David Hilbert, de forma independente.

“[eles] perceberam que a métrica tensorial g_{ab} que descreve a geometria do espaço-tempo parecia depender da quantidade de matéria gravitacional na região.” [22]

Devido à sua complexidade matemática, vamos apenas transmitir o significado físico da equação de Einstein sem apresentar a sua dedução.

Observe pela Eq. (C.34) que a gravitação Newtoniana surge da relatividade geral com uma deformação no espaço-tempo cujo valor depende do potencial gravitacional, diretamente proporcional à massa. A equação de Einstein relaciona a curvatura do espaço-tempo com sua fonte (massa) em um conjunto de dez equações diferenciais de segunda ordem não lineares e não independentes, o que torna sua solução muito complicada [1]. Dessa forma, qualquer fonte pode provocar uma deformação na componente espacial da métrica representada por uma função $f(\Phi)$, originando um elemento de linha em coordenadas esféricas com a forma da Eq. (C.36):

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)c^2 dt^2 + f(\Phi)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (\text{C.36})$$

onde Φ é o potencial gravitacional.

A equação de Einstein pode ser resumida como:

$$\mathbf{G} = \frac{8\pi G}{c^4} \mathbf{T}, \quad (\text{C.37})$$

onde \mathbf{G} é o tensor de curvatura, associado com a estrutura geométrica do espaço-tempo. Essa grandeza diz qual será a métrica do espaço. \mathbf{T} é o tensor de energia-momento, que depende da distribuição de matéria do universo.

No limite Newtoniano, ou seja, para pequenas massas e velocidades muito menores que a da luz, as equações da relatividade geral devem reproduzir a lei do inverso do quadrado das distâncias [1] (veja também a Eq. (C.34)).

C.4 Buracos Negros

Uma das ideias mais divulgadas sobre os buracos negros é de que eles *sugam* objetos para seu interior sem chance de escape e nem mesmo a luz resiste à sua atração gravitacional. Na verdade, um buraco negro de massa M causa a mesma interação que uma estrela de mesma massa¹³, porém sem emitir a luz que antes a estrela irradiava. Se o Sol de alguma forma se tornasse um buraco negro, as órbitas dos planetas do sistema solar se manteriam inalteradas, ou seja, o buraco negro não passa de uma estrela apagada com enorme densidade. Para descrever esses objetos vamos começar apresentando a métrica externa de uma distribuição de massa esférica de valor M e raio R . Ela é descrita pela métrica vista na Eq. (C.30). Ela veio da resolução das equações de Einstein em 1916 realizada pelo físico alemão Karl Schwarzschild [23]. Com ótima aproximação, o Sol pode ser usado para verificar experimentalmente essa métrica [1]. Em um sistema de coordenadas esféricas, o elemento de linha da geometria de Schwarzschild a uma distância r do centro da estrela é dada por:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (\text{C.38})$$

Observe que se $(\frac{2GM}{r} \ll 1)$, podemos usar a aproximação de Bernoulli e escrever a métrica como:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (\text{C.39})$$

A Eq.(C.39) corresponde à forma exata para campos fracos e estáticos com o potencial gravitacional Newtoniano Φ dado por:

$$\Phi = -\frac{GM}{r}. \quad (\text{C.40})$$

¹³Aqui estamos usando a aproximação para um buraco negro e uma estrela esféricas e sem rotação

Isto nos leva a verificar que de fato o valor M corresponde à massa, sendo ela a fonte da curvatura do espaço. E também que a métrica de Schwarzschild descreve um buraco negro estático de massa M .

Não mostraremos aqui, mas essa métrica pode ser usada para calcular diversos fenômenos como o desvio para o vermelho gravitacional, a precessão do periélio de Mercúrio e a deflexão da luz para campos gravitacionais simetricamente esféricos. Para um leitor interessado, sugere-se o Capítulo 15 da referência [8].

Voltando aos buracos negros, eles podem ser originados pela *morte* de uma estrela¹⁴. Se a estrela tiver massa suficiente, haverá um momento de desequilíbrio entre a força gravitacional e as forças de pressão da matéria dentro da estrela. Há, portanto, um colapso gravitacional com a criação de um buraco negro [1].

É comum nos livros de relatividade o uso de unidades onde $G = 1$ e $c = 1$. Estas são chamadas de unidades geometrizadas. Nelas as equações da TRG tornam-se mais simples. A métrica de Schwarzschild, dada pela Eq. (C.38) pode ser simplificada como:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (\text{C.41})$$

Note que nessas unidades M tem dimensão de comprimento.

Observe que a métrica possui dois pontos de singularidade¹⁵ $r = 0$ e $r = 2M$. No caso de $r = 2M$ é possível eliminar a singularidade por meio de uma transformação adequada de coordenadas [8]. Essa região é chamada de *horizonte de eventos* e a distância r é chamada de raio de Schwarzschild r_s . Para examinarmos essa superfície, é possível repetir o procedimento da Seção 3.2.1 para obtermos a seguinte estrutura de cones de luz nas proximidades de um horizonte de eventos, conforme mostra a Fig. C.20. Note que o cone de luz tangencia a superfície $r_s = 2M$ e o interior do cone de luz futuro não permite mais que um observador saia desta superfície daí o nome horizonte de eventos. De outro modo, tudo aquilo que cai dentro do horizonte de eventos é *sugado* e nem a luz pode

¹⁴Morte aqui significa o fim do ciclo de fusão nuclear no interior de uma estrela.

¹⁵Pontos no sistema de coordenadas em que a métrica não é definida, ela diverge indo para infinito.

escapar desta interação gravitacional. Em um paralelo com a gravitação Newtoniana, o horizonte de eventos seria a região do espaço cuja velocidade de escape é igual a da luz, cerca de 300.000 km/s. Já para $r = 0$ não é possível eliminar a singularidade e ainda não conhecemos a física no interior dos buracos negros, mas devido ao horizonte de eventos, estamos isolados do que ocorre no interior.

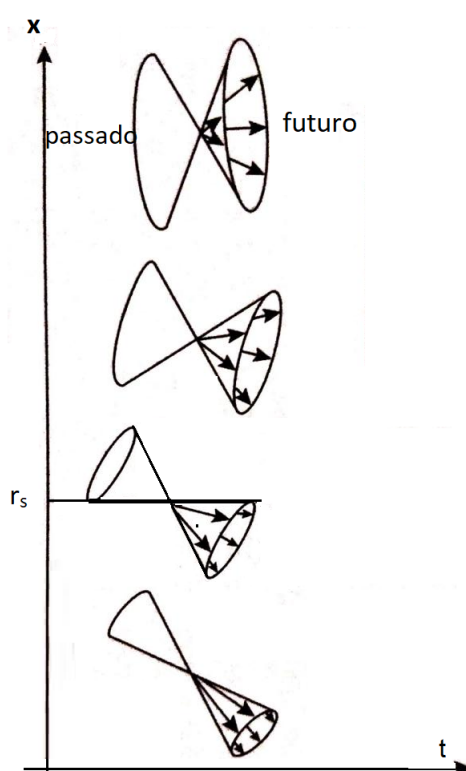


Figura C.20: Cones de luz na vizinhança do raio de Schwarzschild. Dentro do buraco negro, ou seja, para $r < r_s$, todas as linhas de mundo de partículas apontam para dentro dele e permanecem confinadas. A fronteira $r = r_s$ representa o *horizonte de eventos*. Na região externa $r > r_s$, o campo gravitacional do buraco negro continua atuando normalmente. Fonte: adaptado de [16].

Curiosamente este é mesmo raio ($r_s = 2M$) calculado por Michell e Laplace como sendo o raio de uma estrela de massa M de modo que nem a luz consiga escapar da atração do seu campo gravitacional [24].

C.5 Velocidade de Dobra Espacial

Viajar com velocidade superior a da luz é um tema muito difundido em ficção científica. O artigo do físico mexicano Miguel Alcubierre de 1994 traz a abordagem matemática que poderia tornar esse sonho realidade. Vamos analisar qual deveria ser a métrica espaço-temporal para obtermos a chamada velocidade de dobra espacial¹⁶.

Consideremos o seguinte elemento de linha:

$$ds^2 = -dt^2 + [dx - V_e(t)f(r_e)dt]^2 + dy^2 + dz^2 \quad (\text{C.42})$$

onde $V_e(t) \equiv dx_e(t)/dt$ é a velocidade associada com a curva, $x_e(t)$ é a posição da nave em um instante t e $r_e \equiv [(x - x_e(t))^2 + y^2 + z^2]$ representa uma distância ao redor da nave. A função $f(r_e)$ é qualquer função positiva suave que satisfaz a condição $f(0) = 1$ e diminui quando se afasta da origem até chegar a zero para $r_e > R$ para algum R . É como se formasse uma *bolha*, de raio R , ao redor da nave, onde o espaço-tempo seria distorcido. Observe que a geometria do espaço-tempo é plana quando a função $f(r_e) = 0$, mas curva quando não é. A figura C.21 mostra o diagrama espaço-tempo para essa métrica.

Os cones de luz desse espaço-tempo curvo podem ser determinados pela Eq.(3.16b) que resultará em:

$$ds^2 = -dt^2 + [dx - V_e(t)f(r_e)dt]^2 = 0, \quad (\text{C.43})$$

ou, equivalentemente:

$$\frac{dx}{dt} = \pm 1 + V_s(t)f(r_s). \quad (\text{C.44})$$

O sinal \pm corresponde às duas possíveis direções em que um raio de luz pode emergir a partir de um ponto. Deste resultado, vemos a possibilidade de ter $\frac{dx}{dt} > 1$, entretanto a linha de mundo da espaçonave encontra-se dentro do cone de luz. Observe pela Fig. 3.16 que dentro da região da bolha onde o espaço é curvo, os cones de luz estão inclinados em relação aos usuais 45° . Outra característica surge se considerarmos duas estações

¹⁶Do inglês *warp-drive*.

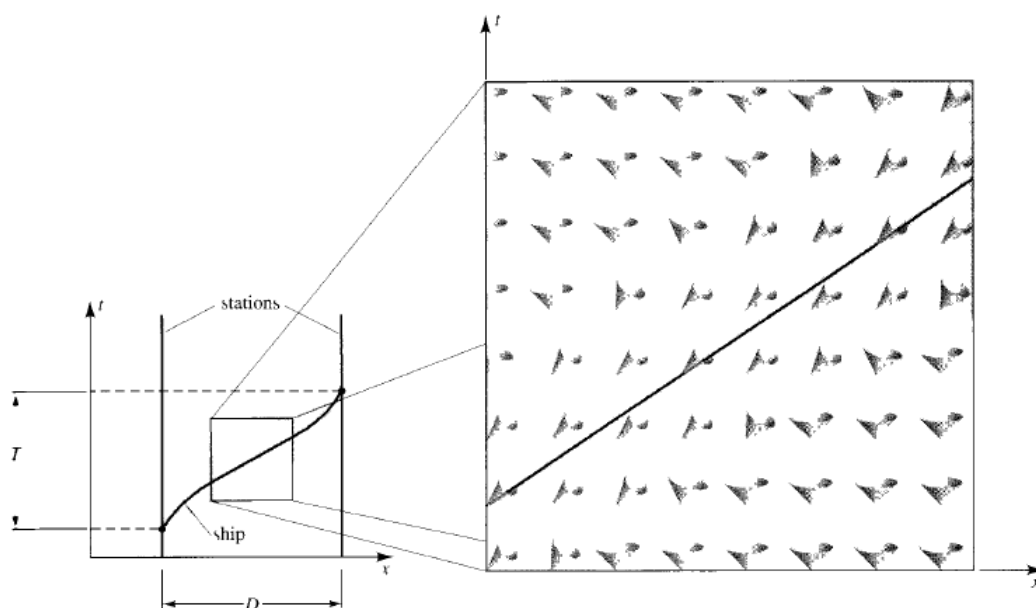


Figura C.21: Cones de luz num espaço-tempo com velocidade de dobra. Uma nave espacial viajando entre duas estações espaciais seguindo a linha de mundo na figura da esquerda estaria às vezes se movendo com velocidade superior à da luz se o espaço fosse de Minkowski. Mas usando a métrica da Eq. (3.31), há uma bolha de curvatura espacotemporal circundando a nave. No destaque da direita, os cones de luz de futuro estão entortados como descritos pela Eq. 3.33. Mas em cada ponto, a linha de mundo da nave pertence ao interior do cone, ou seja, localmente a sua velocidade é sempre inferior à da luz. Contudo para um observador no espaço de Minkowski, fora da bolha, desconhecedor dessa curvatura, a nave teria viajado entre as duas estações em um tempo T menor do que a luz viajaria essa distância D . Fonte: Disponível de [1].

espaciais estacionárias A e B e uma nave se deslocando entre esses pontos num tempo $T < D$. Para os observadores nas estações, onde o espaço-tempo é plano, a nave se deslocou com velocidade aparentemente maior que a da luz conforme a Eq. (3.33). No entanto, o espaço-tempo é curvo, e a linha de mundo da nave é sempre interior aos cones de luz, que estão desviados. Ou seja, a nave está sempre com velocidade menor que a da luz no seu referencial [1].

“Poderia então uma civilização avançada construir uma espaçonave que criaria um espaço-tempo curvo como descrito pela métrica da Eq. (C.42)? [...] ele [espaço-tempo de Alcubierre] requer matéria ou campos com densidade de energia negativa. Todos os campos clássicos [...] possuem densidade de ener-

gia positiva. A mecânica quântica permite densidade de energia negativa, mas a física está longe de entender se ela pode ser aproveitada dessa forma.” [1]

Apêndice D

Roteiro das aulas



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Física
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física
Mestrado Profissional em Ensino de Física

Roteiro das aulas
(Material de apoio para professores)

Edward Cespedes Carageorge

Material instrucional associado à dissertação de mestrado de Edward Cespedes Carageorge, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro

Março de 2020

Este material foi escrito para os professores que desejarem usar a nossa sequência didática para ensinar TRG no ensino médio e nos primeiros anos de graduação. Recomenda-se que o professor leia antes o Apêndice C: Textos de apoio para professores e alunos.

Como já usamos este material em três turmas em aulas extras aos sábados, apresentamos o esquema abaixo com os tópicos abordados, as atividades desenvolvidas em cada aula e os pré-requisitos necessários para o seu desenvolvimento.

Aula	Tópicos abordados	Atividades	Pré-requisitos	Tempo
01	Geometria esférica. Geodésica. Modelos de setores. Buracos negros.	Atividade 1. Atividade 2. Atividade 3. Atividade 4.	Noções básicas de geometria Euclidiana.	150 min
02	Princípio de equivalência. Desvio para o vermelho gravitacional. Deflexão da luz.	Atividade 5. Atividade 6. Atividade 7.	Forças inerciais. Equações do MUV. Efeito Doppler.	150 min
03	Relatividade restrita. Sistema de coordenadas. Elemento de linha: invariante espaço-temporal. Diagramas espaço-temporais. Cones de luz.	Atividade 8. Atividade 9. Atividade 10. Atividade 11. Atividade 12.	Noções básicas de cinemática escalar. Noções básicas de cálculo diferencial.	150 min
04	Tópicos relevantes. Desvio para o vermelho gravitacional. Buraco negro. Imagem de um buraco negro. Velocidade de dobra espacial.	Atividade 13. Atividade 14. Atividade 15. Atividade 16. Atividade 17.	Noções básicas de cálculo diferencial.	150 min

Figura D.1: Sugestão para a divisão das aulas da sequência didática.

D.1 Aula 01

Essa aula será dividida em 4 atividades, cada uma com um objetivo específico de aprendizagem: reconhecer algumas propriedades da geometria não-Euclidiana (esférica, no nosso caso); entender a geodésica como o menor caminho entre dois pontos; representar a geodésica na geometria esférica usando os modelos de setores; descrever a trajetória da luz nas proximidades de um buraco negro usando os modelos de setores.

Atividade 01

Para motivar os alunos com uma geometria *não convencional*, usaremos um experimento para diferenciar dois tipos de curvaturas: Euclidiana (plana) e Riemanniana (esférica). A última será muito importante na descrição da relatividade geral.

Tempo previsto para a atividade: 35 min

Materiais

- Lápis
- Papel A4
- Tiras de papel
- Fita crepe
- Régua
- Transferidor
- Bexiga ou bola

Procedimento

Peça aos alunos que desenhem triângulos quaisquer em uma folha de papel usando lápis e régua, como na Fig. D.2. Em seguida, usando um transferidor, peça que eles meçam os ângulos internos de cada triângulo, some-os e anote o resultado ao lado de cada figura.

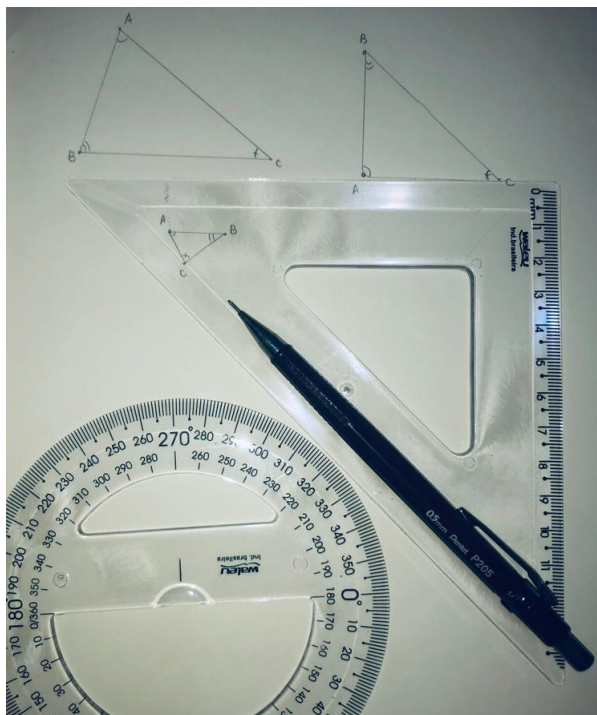


Figura D.2: Triângulos desenhados em um pedaço de papel representando um universo plano.

Repita o experimento na superfície esférica. Para isso, os alunos usarão três tiras de papel e as fixarão com fita crepe na superfície de uma bola, como exemplificado Fig. D.3. Em seguida, removerão cuidadosamente o triângulo da esfera, mantendo a fita crepe unindo os lados das tiras de papel. Agora, eles esticarão cada vértice sobre a superfície de uma mesa, medirão cada ângulo interno e realizarão a sua soma.

Perguntas

1. No primeiro experimento, quanto deu a soma dos ângulos internos do triângulo?
2. Esse valor coincidiu com o esperado?



Figura D.3: Um triângulo feito com três tiras de papel presos com durex na superfície de um balão esférico. Removendo cuidadosamente o triângulo e medindo seus ângulos internos confirmará que a soma será maior que 180° .

3. No segundo experimento, quanto deu a soma dos ângulos internos do triângulo? É maior, menor ou igual ao primeiro?
4. Esse valor coincidiu com o esperado?
5. Como esse experimento poderia ser usado para demonstrar que a Terra é curva e não plana??
6. Existe alguma relação dos triângulos com a gravidade?

Respostas e Discussões

Os alunos devem ser capazes de reconhecer o resultado do primeiro experimento como esperado, pois a soma dos ângulos internos de um triângulo vale 180° . Durante a realização da medida no segundo experimento, deve-se ter uma expectativa de um valor maior que 180° , pois os lados precisam ser esticados para fazer-se a medida. Aqui já pode ser introduzida a ideia de planificação de mapas e suas imperfeições, pois é impossível fazer uma projeção perfeita de uma curva sobre um plano. A curvatura da Terra poderia ser determinada reproduzindo-se um experimento feito por Gauss em fazer um triângulo bem

grande sobre a superfície da Terra e medindo seus ângulos. Se a soma for diferente de 180° , então a Terra é curva. E a princípio não há uma relação com a gravidade, mas trata-se de uma observação geométrica.

Enigma

Para complementar essas ideias sobre curvatura, apresente o seguinte enigma aos alunos: *Um urso anda 1 km para o Sul, em seguida 1 km para o Leste e então 1 km para o Norte, retornando ao ponto em que começou a se mover. Qual é a cor do urso?*

A resposta pode ser dada na aula seguinte, a fim de que eles pensem na curvatura. E pode-se traçar o caminho em um globo de borracha, ou na própria bola que foi usada no experimento anterior. Do polo norte, desenhemos um caminho para o sul. De lá, iremos para o leste, nos movendo ao longo de uma linha de latitude. Finalmente viajamos para o norte, e acabamos exatamente no polo norte, mesmo ponto de partida. A rota percorrida parecerá um triângulo, como visto na Fig. D.4 e podemos dizer que o urso é branco, visto que é um urso polar.

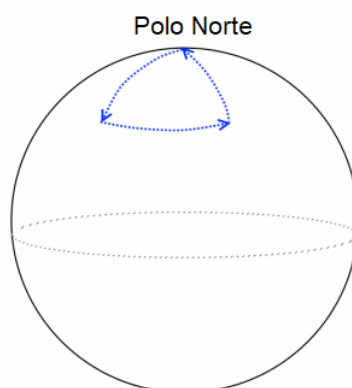


Figura D.4: Trajetória completa do urso até retornar ao ponto inicial. O urso parte do polo norte e segue a trajetória representada pelas setas azuis.

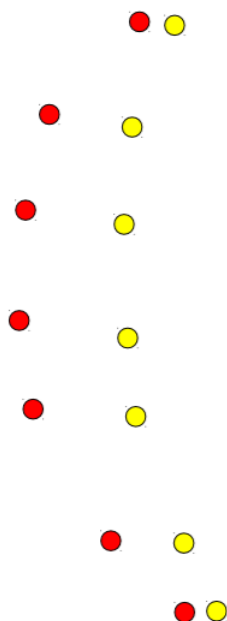
Atividade 02

A atividade 2 servirá para definirmos geometricamente a geodésica, uma dos principais conceitos da relatividade geral.

Tempo previsto para a atividade: 35 min

Duas partículas se movendo

Comece apresentando duas partículas se movendo como a trajetória da figura abaixo. Observe que as partículas se afastam e depois se aproximam.

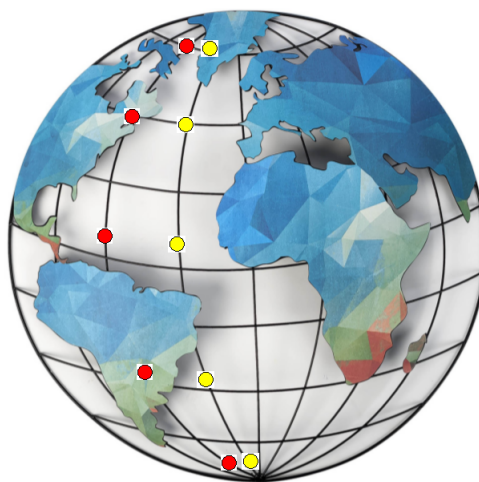


Em seguida, promova o debate sobre “Qual a interação que você acha existir entre elas? Uma força de atração? Repulsão? Existe alguma força com essa propriedade?” Não há nenhuma força que aproxime os corpos e depois afaste, então essa possibilidade pode ser descartada por enquanto.

Mudança de geometria

Apresente novamente o movimento das partículas, mas agora com o globo terrestre

representado como na figura abaixo e pergunte se há uma maneira mais fácil de descrever a trajetória dessas partículas sem usar força. Após algumas ideias, encaminhe os alunos para a mudança da geometria. Pois essas partículas se movem em *linhas retas paralelas entre si* sobre a superfície da esfera. Assim, o faremos com a gravidade. No lugar de usar uma força para descrever o movimento, usaremos uma mudança da geometria que seja equivalente aos efeitos gravitacionais.



Geodésica

Agora defina a geodésica. Ela é o menor caminho possível entre dois pontos em uma superfície, que na geometria Euclidiana é simplesmente uma linha reta. Esse será o percurso de partículas livres e dos raios de luz. Lembrando da óptica geométrica, é chamado de princípio de Fermat. Volte no mapa e veja quais são os menores percursos do polo norte ao sul: qualquer linha de meridiano.

Mapas

Em muitas situações é necessário estudar a geometria de outras superfícies. Para planejar uma grande viagem de avião ou barco, por exemplo, é preciso compreender a geometria de uma superfície esférica. Olhe para o mapa e localize dois lugares em uma

mesma latitude. Pergunte aos alunos para onde um avião deveria seguir viagem para percorrer o menor caminho entre as duas cidades? Talvez eles ainda insistam na linha reta, o que não é uma resposta ruim. Mas quando desenha-se essa *reta* no globo, verificamos que o avião não voa diretamente para oeste, ele deve voar para noroeste, virando para oeste e finalmente para sudeste como pode ser visto na imagem abaixo. Essas linhas são chamadas de *grandes círculos*, pois se prolongadas, elas fecham uma circunferência cujo centro coincide com o da esfera. Esses grandes círculos são as *linhas retas* da geometria esférica.



Atividade 03

A atividade 3 será usada para construirmos as geodésicas usando os modelos de setores.

Tempo previsto para a atividade: 40 min

Flatland - Um romance em muitas dimensões

Comece com uma citação do livro: “*Eu chamo o nosso mundo de Flatland[...]. Imagine uma vasta folha de papel sobre a qual [...] figuras [...] se movem livremente, mas sem o poder de elevar-se ou afundar-se abaixo dela, muito parecido com sombras.*”. Veja se os alunos conseguem entender que as figuras são personagens que habitam um folha bidimensional. Os *flatlanders* se movem em duas dimensões (frente-trás ou direita-esquerda), a terceira dimensão (cima-baixo) não é apenas inacessível para eles, mas está além de sua imaginação. Quando estendemos o *Flatland* de Abbott para superfícies curvas, os *flatlanders* ainda se movem apenas sobre a superfície: para a frente ou para trás e para a direita ou para a esquerda. Na falta do conceito de cima e para baixo, eles não podem conceber uma superfície curvada a um espaço tridimensional. No entanto, eles são capazes de estudar a curvatura do seu mundo. Nós somos *spacelanders*, familiarizados com três dimensões, mas incapazes de conceber um espaço dimensional superior, podemos examinar a curvatura do nosso espaço tridimensional da mesma maneira que os *flatlanders* examinam as superfícies curvas no plano.

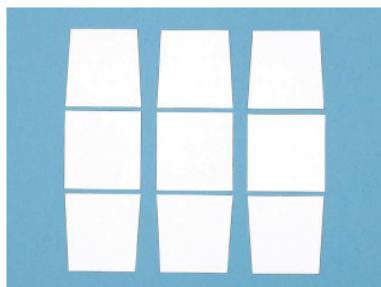
Material

Para começar, acesse o site https://www.spacetimetravel.org/list_of_sectormodels/list_of_sectormodels.html e baixe o modelo chamado *Spherical Cap*, que representará a superfície de uma esfera. Corte o papel seguindo as instruções para destacar os setores. Veja a figura abaixo para verificar a origem dos setores como cortes de pequenos pedaços

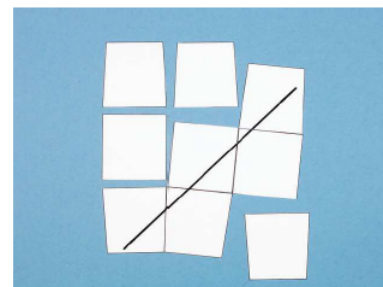
de uma esfera.



(a)



(b)

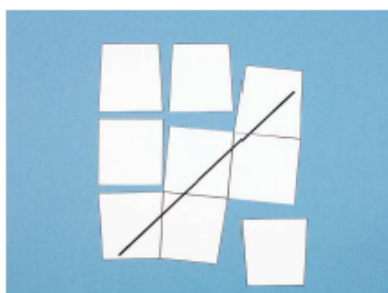


(c)

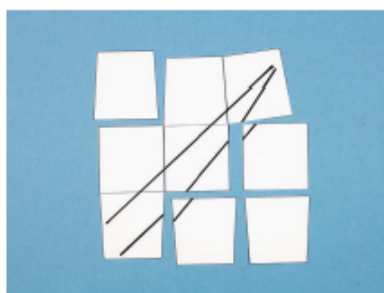
Construção da geodésica

Peça aos alunos para traçarem uma reta no setor inferior esquerdo. Como cada setor é considerado pequeno em relação ao tamanho da esfera que o deu origem, a geodésica é essa linha reta. Chamamos isso de localidade: localmente a geodésica é uma reta, como ocorre no espaço Euclidiano. Basta unir os vértices dos setores adjacentes para continuar o traçado dessa reta. Agora peça aos alunos para fazerem outra geodésica, que se inicia paralela à primeira. Antes deles terminarem o traçado, pergunte o que deve acontecer na parte superior direita. A prova, qualquer que seja a intuição do aluno, será mostrada pelo seu desenho, como o da imagem abaixo: as paralelas convergem. A ideia central mais a frente será usar a geometria para descrever as interações gravitacionais.

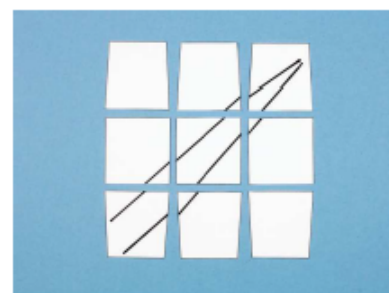
Assim, conseguimos reproduzir a geodésica com uma figura fácil de ser construída. Vamos usar esse método para descrever a trajetória da luz próxima a um buraco negro.



(a)



(b)



(c)

Atividade 04

A atividade 4 será usada para construirmos geodésicas próximas a um buraco negro e discutirmos os conceitos básicos sobre esse objeto astronômico.

Tempo previsto para a atividade: 40 min

Guia

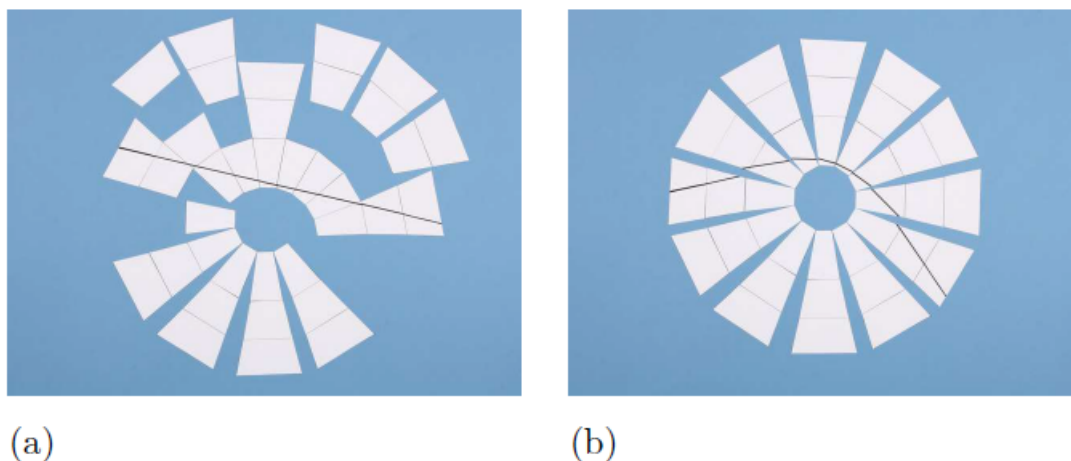
Comece perguntando aos alunos o que é um buraco negro. Várias ideias equivocadas devem surgir das respostas como eles *sugarem* objetos para seu interior sem chance de escape e nem mesmo a luz resiste à sua atração gravitacional. Na verdade, um buraco negro de massa M causa a mesma interação que uma estrela de mesma massa¹, porém sem emitir a luz que antes a estrela irradiava. Se o Sol de alguma forma se tornasse um buraco negro, as órbitas dos planetas do sistema solar se manteriam inalteradas, ou seja, o buraco negro não passa de uma estrela apagada com enorme densidade. Devido à sua massa, o espaço-tempo próximo a esse objeto astronômico não é Euclidiano, portanto vamos usar os modelos de setores para escrever a trajetória da luz.

Material e Utilização

Para começar, acesse o site https://www.spacetime-travel.org/list_of_sector_models/list_of_sector_models.html e baixe o modelo chamado *Equatorial Plane of a Black Hole*, que representará um plano equatorial de um buraco negro. Corte o papel seguindo as instruções para destacar os setores. Veja a figura a seguir para verificar como os setores devem ser dispostos para desenhar a geodésica. Localmente as linhas são retas e são desenhadas pela união dos vértices dos setores adjacentes. Quando eles são colocados de volta na posição original, ilustram a trajetória que viríamos da luz.

Debate final

¹Aqui estamos usando a aproximação para um buraco negro e uma estrela esféricas e sem rotação



Para encerrar a aula 01, promova uma breve discussão com os alunos sobre o que causa essa deformação no espaço. Seria a matéria? Pode ser energia? O que é deformado no espaço, se não há um objeto físico ali para sofrer essa alteração. Além disso, não é apenas o espaço alterado, mas o tempo. Esse conjunto é chamado de *espaço-tempo* e aparece tanto na relatividade especial quanto na geral. Nele, o tempo é uma dimensão como o espaço e descrito em coordenadas cartesianas, por exemplo, ficaria (x, y, z, t) . A TRG estudará os efeitos gravitacionais como geometria e predirá como as partículas e a luz se movimentarão nesse espaço-tempo alterado. Nas palavras de John Archibald Wheeler, o conteúdo físico das equações de Einstein para descrever a gravidade é “*O espaço-tempo diz para a matéria como se mover; a matéria diz para o espaço-tempo como se curvar.*”.

D.2 Aula 02

Nessa aula, iremos abordar os conceitos físicos que juntos da geometria não-Euclidiana darão origem à TRG.

Atividade 05 - Princípio da Equivalência

Tempo previsto para a atividade: 35 min

Definindo as massas

- Massa inercial (m_i): é a medida do coeficiente de inércia do corpo, ou seja, da sua resistência em ter seu estado de movimento alterado e corresponde ao termo que aparece na 2ª lei de Newton. A priori m_i não possui nenhuma relação com gravitação.

$$\vec{F} = m_i \vec{a}$$

- Massa gravitacional ativa ($m_g(a)$): é capaz de provocar forças em outros corpos, ou em termos modernos, ser fonte de campo gravitacional

$$g = \frac{G}{d^2} m_g(a)$$

- Massa gravitacional passiva ($m_g(p)$): é a propriedade do corpo que o faz sofrer ação da força peso, também chamada de uma carga gravitacional

$$\vec{P} = m_g(p) \vec{g}$$

Debate com os alunos

Pegue uma folha de papel e um livro (ou qualquer outro objeto pesado) e os abandone de uma mesma altura. O livro chegará primeiro ao solo. Pergunte aos alunos o porquê

do papel chegar depois no chão. Alguns podem dizer que é a resistência do ar, mas a resposta mais imediata é dizer que o mais pesado cai antes do mais leve. Se esse for o caso, amasse a folha de papel e repita o experimento. Dessa vez, ambos chegarão ao solo ao mesmo tempo. Por quê? A massa do papel não mudou, mas a sua resistência ao ar sim. Então pergunte aos alunos o que deve acontecer se você pudesse retirar todo ar da sala e refazer o experimento com a folha aberta. Nesse momento, eles devem perceber que ambos os corpos devem cair juntos. Assim, a aceleração devido à ação gravitacional, nas vizinhanças da superfície da Terra, é a mesma para todos os corpos, independente de suas massas, formas ou composição e pode ser ilustrado por um vídeo da BBC disponível no YouTube <https://youtu.be/E43-CfukEgs?t=169> em que uma pena e uma bola de boliche são abandonados de uma mesma altura em uma câmara de vácuo e elas caem juntas no solo.

Em 1907, Einstein teve “a ideia mais feliz de sua vida”: para um observador em queda livre não há gravidade nas suas proximidades. Assim se ele abandonar um corpo qualquer, ele permanecerá em repouso para esse observador. Essa propriedade por ser melhor apresentada acompanhada de um vídeo do professor Brian Greene disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=0jjFjC30-4A>, em que ele abandona uma garrafa furada em queda livre. Para a água, é como se não houvesse gravidade e, portanto, ela para de vaziar pelos orifícios.

Essa propriedade surpreendente verificada pela mecânica clássica é o fato das forças gravitacionais serem proporcionais à massa inercial, assim como as forças de inércia. Assim, a gravidade não apenas pode ser eliminada por um referencial em queda livre, mas pode ser criada por uma aceleração. A ideia central de Einstein foi tratar a força gravitacional como uma força inercial.

Experimento de pensamento com uma nave espacial

Considere um astronauta confinado em um foguete sem janelas nem meios de contato

com outras pessoas. Ele possui uma bola, um cronômetro e uma fita métrica para realizar alguns experimentos simples. Vamos considerar quatro situações descritas abaixo e representadas pelas figuras abaixo:

- **Situação 1:** o foguete é colocado no espaço em um local infinitamente distante de quaisquer outros corpos. Os seus motores são ligados, fazendo-o acelerar para cima com aceleração constante de módulo g . Quando o astronauta abandona a bola, ele percebe que ela cai em direção ao solo como aceleração g .
- **Situação 2:** os motores do foguete são desligados, então ele segue com velocidade constante. Quando o astronauta abandona a bola, ela permanece parada em relação a ele.
- **Situação 3:** o foguete é trazido para superfície da Terra. Desprezando os efeitos de rotação, um corpo abandonado irá cair em direção ao solo da nave com aceleração constante de módulo g .
- **Situação 4:** por último, o foguete é abandonado caindo livremente sob ação do campo gravitacional uniforme, próximo à superfície da Terra, em direção ao centro do planeta. Um corpo abandonado permanece em repouso em relação ao astronauta que também está caindo junto da nave.

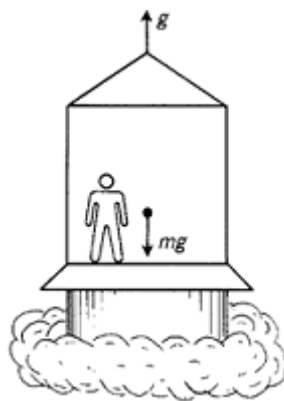


Figura D.5: Situação 1

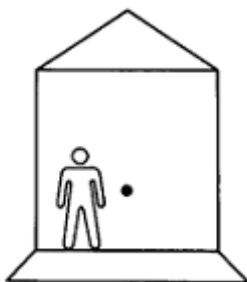


Figura D.6: Situação 2

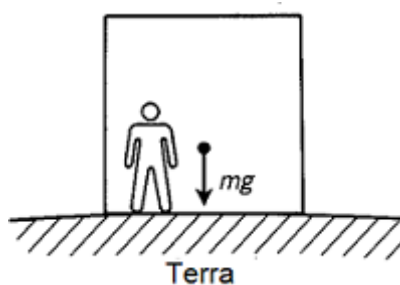


Figura D.7: Situação 3

Claramente, do ponto de vista do astronauta, as situações **1** e **3** são indistinguíveis. Assim como **2** e **4**. Portanto, a gravidade pode ser criada por aceleração. Vamos usar essa propriedade para traçar argumentos que nos levem aos conceitos do espaço curvo.

Exercício

Dois canhões são posicionados conforme a figura abaixo e seus projéteis são lançados simultaneamente. Determine a velocidade v_2 para que os projéteis se interceptem.

Solução

A ideia aqui é usar o princípio de equivalência, mudando para um referencial em queda livre.

Para ele, o movimento dos projetos será um MRU e o problema pode ser facilmente resolvido usando uma única lei dos senos.

$$\frac{500}{\sin 105^\circ} = \frac{200t}{\sin 45^\circ} = \frac{v_2 t}{\sin 30^\circ},$$

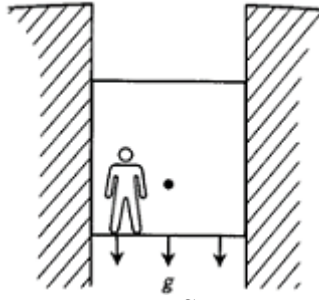


Figura D.8: Situação 3

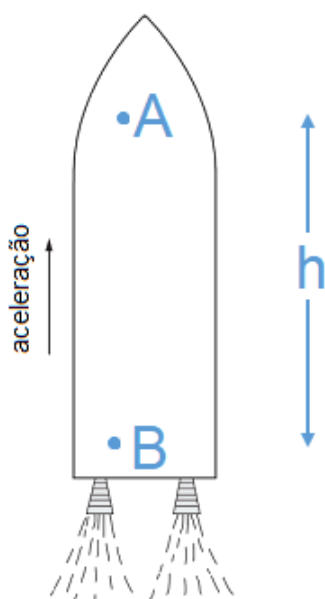
$$v_2 = \frac{200 \cdot 1/2}{\sqrt{2}/2} = 100\sqrt{2} \approx 141 \text{ m/s}, \quad (\text{D.1})$$

$$t = \frac{500 \cdot \sqrt{2}/2}{200 \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}} = 5 \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \approx 1,83 \text{ s}. \quad (\text{D.2})$$

Atividade 6 - Desvio para o vermelho gravitacional

Exercício

Considere a luz viajando de baixo para o topo de um foguete em constante aceleração de módulo a , como na figura abaixo. Seja o referencial \mathcal{S} no ponto A na parte inferior da nave espacial e \mathcal{S}' no ponto B, na parte superior distante h . Qual é a razão entre as frequências da luz emitida por um laser em A e detectada em B?



Solução

Quando a luz sai do ponto A, consideremos o foguete com velocidade nula em relação a outro referencial (a Terra, por exemplo), e vamos chamar Δt de tempo para a luz viajar para o ponto B. Supondo a velocidade da luz muito grande, podemos desprezar a variação da posição do foguete até que ela chegue na parte superior ($\Delta h \ll h$), sendo assim:

$$\Delta t = \frac{h}{c}.$$

Nesse mesmo intervalo de tempo, o foguete acelerado terá uma velocidade igual a:

$$v = g\Delta t = g\frac{h}{c}.$$

Usando a equação do efeito Doppler não relativístico e supondo o módulo da velocidade do foguete $v \ll c$, temos:

$$f' = f \frac{c - v}{c}.$$

Assim, teremos:

$$f' = f \frac{c - g \frac{h}{c}}{c} = f \frac{c^2 - gh}{c^2} \Rightarrow f' = f \left(1 - \frac{gh}{c^2} \right).$$

Identificando o potencial gravitacional $\Phi = gh$ próximo à superfície da Terra, temos que o período T' medido por \mathcal{S}' em relação ao período T de \mathcal{S} vale²:

$$T' = \frac{1}{f'} = \frac{1}{f \left(1 - \frac{\Phi}{c^2} \right)} = T \left(1 - \frac{\Phi}{c^2} \right)^{-1} \Rightarrow T' \approx T \left(1 + \frac{\Phi}{c^2} \right).$$

Debate

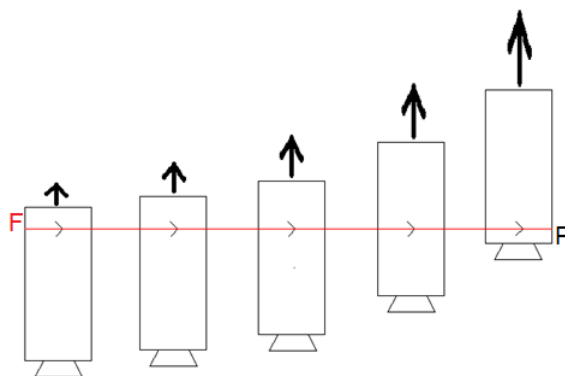
Assim, \mathcal{S}' medirá um período maior para o sinal, dessa forma teremos uma frequência menor nesse referencial, por isso esse efeito é chamado de desvio para o vermelho gravitacional (*gravitational redshift*). De outra maneira, podemos imaginar que esse sinal emitido possa ser usado para quantificar o tempo, por exemplo, dois sinais consecutivos são emitidos em um segundo. Assim quando um receptor está num potencial gravitacional maior que o emissor, os sinais são recebidos mais devagar do que são emitidos. Já quando um receptor está num potencial gravitacional menor que o emissor, os sinais são recebidos mais rapidamente do que são emitidos. Concluimos assim que os relógios **passam mais devagar** quando afetados pelo campo gravitacional mais intenso. Cabe ressaltar que isso já foi testado na década de 1960 com o experimento de Pound-Rebka.

²Usando a aproximação de Bernoulli $(1 + x)^n \approx 1 + nx$, $x \ll 1$.

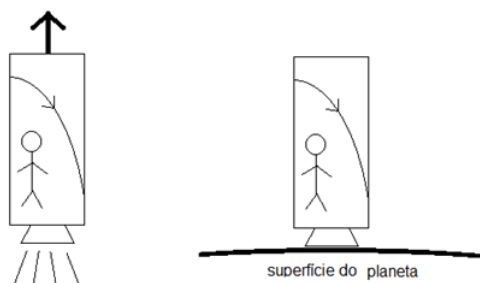
Atividade 7 - Deflexão da luz

Experimento de pensamento com o foguete

Considere um foguete em acelerado para cima, isolado de outras interações gravitacionais, com uma fonte de luz F , emitindo um raio de luz na direção horizontal. Pergunte aos alunos qual será a trajetória para um observador dentro e outro fora do foguete? Para o observador \mathcal{S}' , dentro do foguete, a luz viaja em linha reta e sai pelo orifício P.



Entretanto para um observador externo \mathcal{S} , a luz viaja com velocidade horizontal constante e está *acelerada* na vertical, descrevendo portanto um lançamento horizontal (parábola). Pelo princípio de equivalência, o que podemos afirmar? Se o foguete estiver na superfície da Terra, por exemplo, sob ação de um campo gravitacional uniforme \vec{g} , os efeitos observados pelos observadores serão os mesmos. Portanto, há deflexão dos raios luminosos num campo gravitacional.



A existência da deflexão da luz exigida pela teoria foi comprovada fotograficamente durante o eclipse solar em maio de 1919 por duas expedições organizadas pela *Royal As-*

tronomical Society, uma delas à África e outra ao Brasil, sob a direção dos astrônomos Eddington e Crommelin.

Exercício 1

Considere o trajeto de um raio luminoso sob ação do campo gravitacional terrestre na superfície $g = 10 \text{ m/s}^2$. Após percorrer 1 km, qual será o seu desvio vertical devido à ação gravitacional? Considere a velocidade da luz como $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

Solução 1

Nesse método para calcular a deflexão da luz, assumimos, baseado na óptica Newtoniana, que a luz é um corpúsculo que sofre ação gravitacional como qualquer outro corpo, independente da sua massa. Apesar de sabermos que essa abordagem está **incorreta**, ela servirá para ilustrarmos as ideias iniciais sobre a deflexão da luz e depois ficará clara como ela se relacionará com a TRG. Essa aceleração gravitacional fará com que a luz adquira velocidade vertical devido à atração gravitacional. Portanto há uma deflexão no percurso desse raio luminoso, que pode ser calculado pela usando as equações cinemáticas do MRU e MRUV.

Cálculo do tempo de viagem da luz pelo percurso horizontal:

$$\Delta t = \frac{d}{c} = \frac{1 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^8} \approx 0,3 \cdot 10^{-5} \text{ s.}$$

Cálculo da altura percorrida no lançamento oblíquo sob ação do campo gravitacional:

$$h = \frac{gt^2}{2} = \frac{10 \cdot (0,3 \cdot 10^{-5})^2}{2} \approx 0,3 \cdot 10^{-11} \text{ m.}$$

Observe que o desvio é muito pequeno, menor que um átomo de hidrogênio, portanto muito difícil de ser detectado para um percurso pequeno da luz.

Exercício 2

Aplicando um raciocínio análogo ao da questão anterior, calcule o ângulo de deflexão gravitacional de um raio luminoso que, propagando-se no vácuo, tangencia um corpo esfericamente simétrico de raio R e massa M , percorrendo uma distância muito maior que R . Estime o resultado para o desvio próximo ao Sol.

Dados do Sol: massa: $2 \cdot 10^{30}$ kg e raio: $7 \cdot 10^5$ km

Solução 2

A deflexão ϕ no percurso desse raio luminoso, pode ser calculada pela razão entre a velocidade vertical *adquirida* pela interação gravitacional e a velocidade da luz na horizontal assim:

$$\tan \phi = \frac{v_y}{c}.$$

Usando a aceleração gravitacional, temos:

$$a = \frac{GM}{r^2}.$$

onde r é a distância do corpúsculo luz até o centro do Sol.

Somente a componente vertical será levada em consideração, pois na horizontal o ganho de velocidade será desprezado e a luz continuará com velocidade constante c

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} \Rightarrow v_y = \int_0^\infty \frac{GM}{cr^2} \cos(\theta) dy = \int_0^\infty \frac{GMR}{c(R^2 + y^2)^{3/2}} dy = \frac{2GM}{cR}.$$

Substituindo os dados no SI para um raio que tangencia o Sol $G = 6,7 \cdot 10^{-11}$, $M = 2,0 \cdot 10^{30}$, $R = 7,0 \cdot 10^8$ e $c = 3,0 \cdot 10^8$, temos:

$$\tan \frac{v_y}{c} = \tan \frac{2GM}{c^2 R} \Rightarrow \tan \phi = 0,87''.$$

Debate final

Esse resultado é metade do valor previsto pela TRG, comprovada pelo Eclipse de 1919. Você saberia dizer onde está o erro na abordagem Newtoniana? A curvatura do espaço deve ser trazida à tona, pois usamos a geometria Euclidiana. Aqui começamos a conectar os efeitos geométricos aos gravitacionais.

D.3 Aula 03

Nessa aula, vamos fornecer as ferramentas matemáticas para uma melhor compreensão da TRG. .

Atividade 9 - Teoria da Relatividade Restrita

Recomenda-se ao professor a leitura do Apêndice A deste trabalho.

Vamos novamente usar um experimento de pensamento e a constância da velocidade da luz para demonstrar um dos resultados mais surpreendentes da física moderna: *a dilatação temporal*. Caso os alunos já tenham estudado esse tópico, pode-se passar para a Atividade 10.

Tempo previsto para a atividade: 35 min

Postulados da Relatividade Restrita

Postulado 1: Todas as leis da física são as mesmas em todos os sistemas de referência inercial, ou seja, não existe referencial preferencial. Esse postulado é uma extensão dos princípios da mecânica Newtoniana: não existe um experimento que consiga distinguir um referencial *parado* de outro *andando* com velocidade constante.

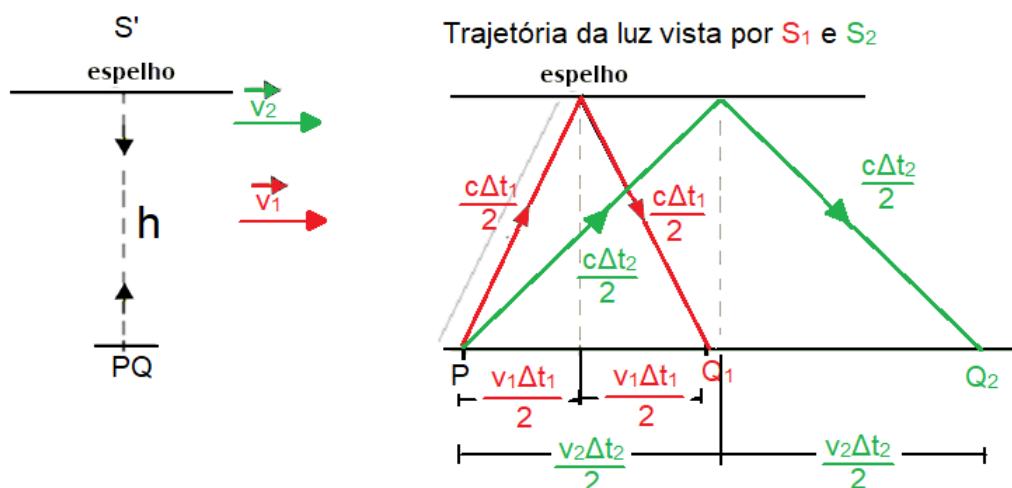
Postulado 2: A velocidade da luz no vácuo é a mesma todos os referenciais. Esse princípio pode ser entendido como uma extensão do **Postulado 1**, pois a velocidade da luz (c) pode ser derivada das equações do eletromagnetismo de Maxwell, que é uma lei da física.

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Relógio de luz

Imagine um trem que viaja com velocidade horizontal constante de módulo v . Dentro dele, existe um relógio de luz, composto por uma fonte no chão do trem e um espelho

plano no teto a uma distância h . O nosso *segundo* será o tempo que o raio de luz leva para sair da fonte, ser refletido pelo espelho e retornar para um detector no chão.



Para um observador solidário ao trem, a luz apenas sobe desce fazendo um percurso igual a $2h$ na velocidade da luz c , portanto o *segundo* para ele será:

$$\Delta t' = \frac{2h}{c}$$

Para o observador em repouso fora do trem, a luz fará um percurso inclinado, mas ainda com velocidade c . Dessa forma, o *segundo* deve ser calculado usando o teorema de Pitágoras:

$$\left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 - \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 = h^2 \Rightarrow \Delta t = \frac{2h}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Observe que $\Delta t \geq \Delta t'$, então os referenciais medem intervalos de tempo diferentes entre os dois eventos.

Intervalo espaço-temporal

Se calcularmos o tempo para dois referenciais que veem o trem se deslocar com velocidades de módulo v_1 e v_2 , podemos expressar através do Teorema de Pitágoras a medida

da altura h do vagão para os referenciais \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2

$$\left(\frac{c\Delta t_1}{2}\right)^2 - \left(\frac{v_1\Delta t_1}{2}\right)^2 = \left(\frac{c\Delta t_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{v_2\Delta t_2}{2}\right)^2 = h^2 \Rightarrow$$

$$(c\Delta t_1)^2 - (v_1\Delta t_1)^2 = (c\Delta t_2)^2 - (v_2\Delta t_2)^2 = 4h^2.$$

Finalmente, podemos escrever que $\Delta x = v\Delta t$ e expressar o invariante espaçotemporal como:

$$(c\Delta t_1)^2 - (\Delta x_1)^2 = (c\Delta t_2)^2 - (\Delta x_2)^2$$

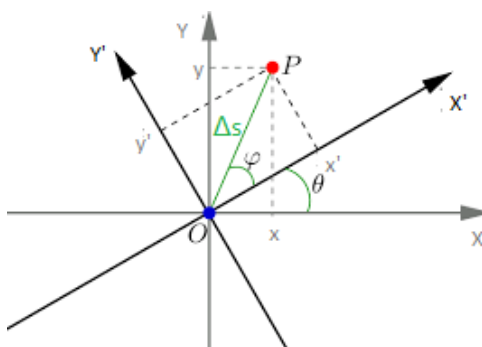
Observe que esse valor é constante, também chamado de **elemento de linha** e independente do referencial. Ele será utilizado para calcularmos as geodésicas nas diferentes geometrias.

Atividade 10 - Geometria não Euclidiana

Recomenda-se ao professor a leitura do Apêndice C deste trabalho.

Tempo previsto para a atividade: 25 min

Vamos agora descrever como rotular os pontos em duas diferentes coordenadas e como calcular a distância entre dois pontos usando o teorema de Pitágoras. Pergunte aos alunos o que acontece com a distância caso os eixos sejam rotacionados. Eles devem perceber que a distância permanece invariada por essa transformação.



O mesmo princípio vale se estivermos sobre uma superfície esférica, em vez de plana. Considere uma esfera em coordenadas (θ, ϕ) conforme. O seu elemento de linha espacial dS^2 , com $r = R$ constante, será dado por:

$$dS^2 = R^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2).$$

Vamos agora calcular a razão entre o perímetro da circunferência de raio r pelo seu raio nessa geometria esférica. Colocando o centro da circunferência no polo norte da esfera, O perímetro C será a integral de dS em torno do círculo de θ constante, ou seja, $\theta = \Theta$.

$$C = \oint dS = \int_0^{2\pi} R \text{sen}\Theta d\phi = 2\pi R \text{sen}\Theta.$$

Já o raio r é a integral ao longo de qualquer curva onde ϕ é constante, portanto vale:

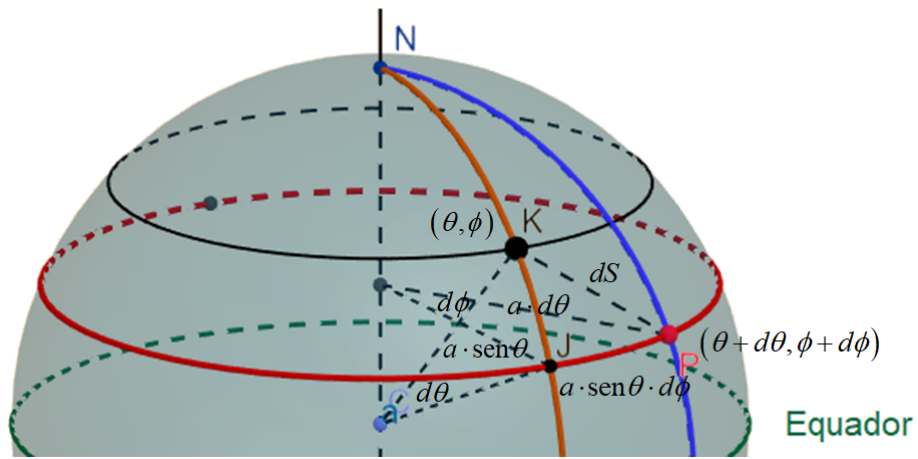
$$r = \int dS = \int_0^{\Theta} R d\phi = R\Theta \Rightarrow \Theta = \frac{r}{R}.$$

Logo,

$$C = 2\pi R \operatorname{sen} \left(\frac{r}{R} \right)$$

Quando $r \ll R$, recuperamos a relação clássica da geometria

$$C = \lim_{\frac{r}{R} \rightarrow 0} 2\pi R \operatorname{sen} \left(\frac{r}{R} \right) = 2\pi R \left(\frac{r}{R} \right) = 2\pi r$$



Atividade 11 - Coordenadas espaço-temporais

Tempo previsto para a atividade: 25 min

Observe o invariante espaço-temporal obtido pela TRR: $ds^2 = -(cdt)^2 + dx^2$. Com uma mudança de referencial, esse valor permanece o mesmo. Portanto ele será nossa *distância* invariada pela *rotação* da geometria. Porém, observe que o tempo faz parte da rotulação dos pontos.

Se generalizarmos o termo para três dimensões espaciais e uma temporal, teremos:

Cartesianas: $ds^2 = -(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$

Esféricas: $ds^2 = -(cdt)^2 + dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\text{sen}^2\theta d\phi^2$

A mudança da componente temporal já foi observada no desvio para o vermelho gravitacional com alteração do tempo pelo potencial gravitacional. Aplicando esse resultado na componente temporal, temos a mudança dessa geometria por ação da gravidade:

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

onde $\Phi = -\frac{GM}{r^2}$ é o potencial gravitacional. Nota-se que no resultado da deflexão da luz utilizando o modelo Newtoniano não há nenhuma previsão na alteração na componente espacial, mas há na temporal.

Contudo na TRG, existe uma alteração também na componente espacial provocada pelas massas. Um exemplo é o campo gravitacional produzido por uma distribuição esférica de matéria, chamada métrica de Schwarzschild, com a seguinte forma:

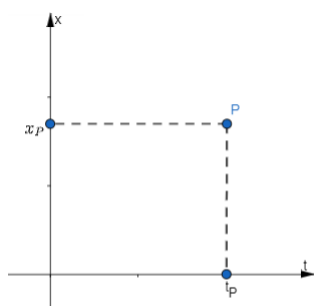
$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Observe que a componente espacial também é modificada pelo potencial gravitacional. Por enquanto apenas demos o resultado sem nenhuma justificativa.

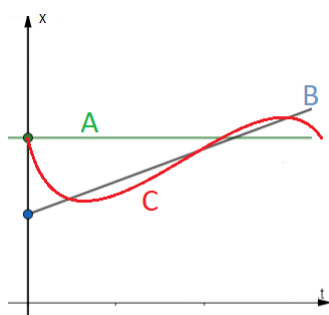
Atividade 12 - Diagramas espaço-temporais

Tempo previsto para a atividade: 15 min

Para conseguirmos expressar os eventos usando a geometria, vamos descrever um sistema quadridimensional (t, x, y, z) , que será representado por um diagrama de espaço-tempo. Os eventos serão representados por um ponto P dizendo onde x_P e quando t_P ele ocorreu.



Uma partícula descreverá sua trajetória espaço-temporal por uma linha de mundo. Pergunte aos alunos o que significa a inclinação da reta tangente à cada linha de mundo. Assim como na cinemática tradicional, a inclinação da reta nos fornecerá o valor da velocidade.



- A linha de mundo A representa uma partícula em repouso.
- A linha de mundo B representa uma partícula em movimento uniforme.
- A linha de mundo C representa uma partícula em movimento oscilatório.

Atividade 13 - Cones de Luz

Tempo previsto para a atividade: 35 min

O elemento de linha, (ds^2) , pode assumir três tipos de valores: positivo, negativo ou nulo, representados por:

$$ds^2 > 0 \quad \text{tipo tempo,}$$

$$ds^2 = 0 \quad \text{tipo nulo,}$$

$$ds^2 < 0 \quad \text{tipo espaço.}$$

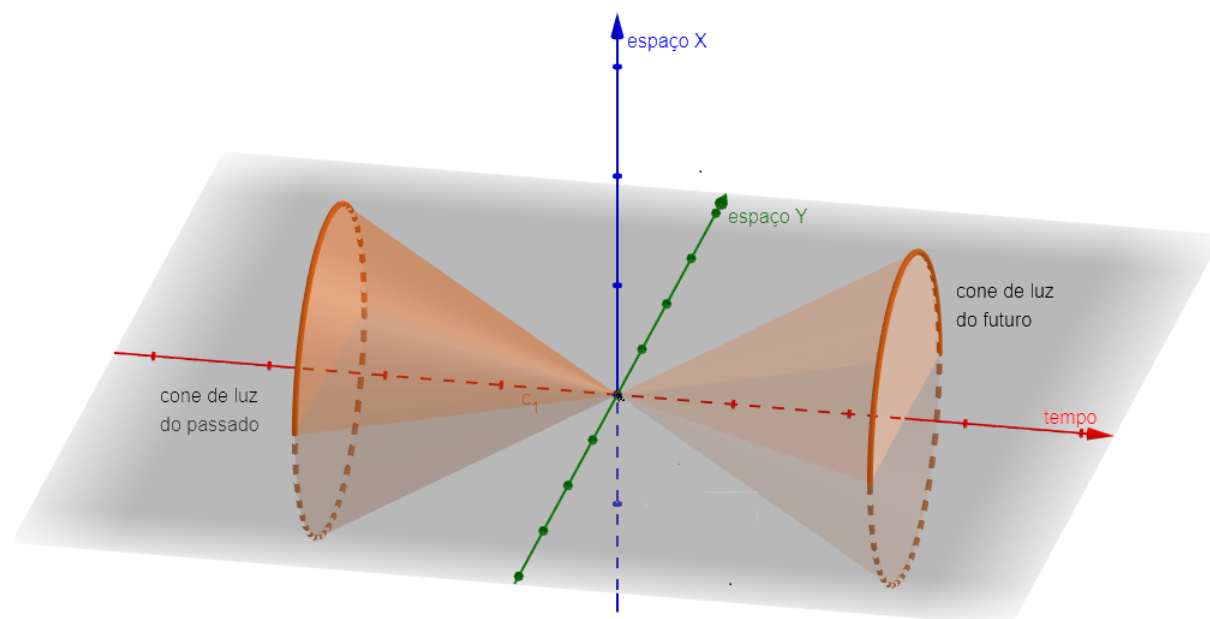
A constância da velocidade da luz é o fator mais importante sobre o espaço-tempo na teoria da relatividade restrita. Observe que o valor de ds^2 é nulo quando o *objeto* se move com velocidade $v = c$:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 = -c^2 dt^2 + (v dt)^2 = -c^2 dt^2 + (cdt)^2 \Rightarrow ds^2 = 0.$$

Esta propriedade pode ser expressa geometricamente nos diagramas espaço tempo com linhas inclinadas de 45° . Já se colocarmos com duas dimensões espaciais xy , teremos os *cones de luz*.

Se você estiver no ponto **presente**, os eventos no interior do cone **futuro** representam todos os eventos que você consegue alcançar com um sinal físico, ou seja, viajando até eles em linhas do *tipo tempo* ou *tipo nulo*. Para esse mesmo ponto inicial, o cone do **passado** contém todos os eventos que podem chegar ao presente, ou seja, ele contém todos os eventos que podem afetar o presente. A região fora do cone não tem uma relação de causalidade com o presente, pois não pode fisicamente alcançá-lo.

Para termos o cone de luz, não precisamos que a luz esteja presente. Os cones mapeiam as trajetórias que a luz teria se partisse do **presente**. Para linhas do *tipo tempo*, o objeto se move com velocidade menor que a da luz, ou seja, possuem linhas de mundo com



inclinação menor que 45° e sempre interior ao cone. Essas linhas representam trajetória de um objeto real, pois sua velocidade é sempre menor que a da luz. Para linhas do *tipo espaço*, o objeto teria que viajar com velocidade superior à da luz, o que é impossível frente à relatividade restrita.

D.4 Aula 04

Atividade 13 - Tópicos Relevantes

Cabe aqui formalizarmos alguns conceitos dos quais já comentamos brevemente nas aulas anteriores e apresentar novas formulações para fecharmos nessa última aula acerca de TRG.

Tempo previsto para a atividade: 30 min

Geodésica: O princípio para determinarmos o movimento de uma partícula livre num espaço-tempo curvo é o *Princípio Variacional*, cujo enunciado pode ser descrito como “a trajetória seguida por uma partícula livre entre dois pontos do tipo tempo extremiza o tempo próprio entre eles”. Essa extremização dará origem ao *menor caminho* entre dois pontos, denominado geodésica. Pergunte aos alunos qual é o menor caminho entre dois pontos no espaço Euclidiano. Claramente é uma linha reta. E na geometria esférica, um arco de grande círculo como já apresentamos na Aula 01.

Princípio da Correspondência: Qualquer nova teoria tem que ser consistente com as teorias anteriores dentro do seu limite de validade. Assim a relatividade geral deve levar à relatividade restrita na ausência de gravidade, quando G tende a 0 e à gravitação newtoniana em campos gravitacionais fracos e com velocidades pequenas quando comparadas a da luz, ou seja, quando c tende para infinito. Para ambas as condições satisfeitas, a mecânica clássica deve prevalecer.

Quando levamos essa métrica $ds^2 = -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ para o limite da mecânica clássica, não derivamos a lei da gravitação Newtoniana. No entanto, quando aplicamos um termo modificando a componente espacial, a lei do inverso do quadrado da distância é obtida. Assim, mesmo que não apresentemos os resultados matemáticos, vemos que tem que existir uma deformação também no espaço causada pelo potencial

gravitacional Φ , cuja origem é na *massa*.

Equação de Einstein: A equação de Einstein governa a geometria do espaço-tempo curvo, sendo a equação básica da relatividade geral [...] Ela é o equivalente das equações de Maxwell para o eletromagnetismo. Ela relaciona a curvatura do espaço-tempo com sua fonte (só falamos de massa nesse trabalho, mas também pode ser a energia) em um conjunto de dez equações diferenciais de segunda ordem não lineares e não independentes, o que torna sua solução muito complicada.

$$\mathbf{G} = \frac{8\pi G}{c^4} \mathbf{T},$$

onde \mathbf{G} é o tensor de curvatura, associado com a estrutura geométrica do espaço-tempo. Essa grandeza diz qual será a métrica do espaço. \mathbf{T} é o tensor de energia-momento, que depende da distribuição de matéria do universo.

Atividade 14 - Desvio para o vermelho gravitacional

Nós já apresentamos a conta do desvio para o vermelho usando o efeito Doppler na Aula 02. Agora vamos usar a métrica de Schwarzschild para mostrar que ela também deriva o mesmo resultado.

Tempo previsto para a atividade: 30 min

Consideremos sinais a propagarem-se no eixo x emitidos a partir de um ponto A em x_A e recebidos em por um ponto B em x_B . Note que, como em um espaço-tempo curvo, a linha de mundo do raio de luz não será mais uma reta com 45° de inclinação. As linhas de mundo dos sinais emitidos terão a mesma forma pois a geometria não depende do tempo. A distância temporal entre dois sinais consecutivos será Δt , porém o tempo próprio medido em x_A e x_B serão diferentes entre si, pois $ds^2 = -c^2 d\tau^2$, onde $d\tau$ é o intervalo infinitesimal de tempo próprio. Para A e B , temos que $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$ de modo que o tempo próprio para a emissão usando a métrica de Schwarzschild será:

$$\Delta\tau = \left(1 + \frac{2\Phi(x)}{c^2}\right)^{1/2} \Delta t \approx \left(1 + \frac{\Phi(x)}{c^2}\right) \Delta t.$$

Relacionando as emissões nos pontos x_A e x_B , teremos:

$$\frac{\Delta\tau_B}{\Delta\tau_A} \approx \frac{\left(1 + \frac{\Phi(x_B)}{c^2}\right) \Delta t}{\left(1 + \frac{\Phi(x_A)}{c^2}\right) \Delta t} \approx \left(1 + \frac{\Phi(x_B)}{c^2} - \frac{\Phi(x_A)}{c^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Delta\tau_B \approx \left(1 + \frac{\Phi(x_B)}{c^2} - \frac{\Phi(x_A)}{c^2}\right) \Delta\tau_A.$$

Observe que recuperamos a equação derivada pelo efeito Doppler.

Atividade 15 - Buraco Negro

Tempo previsto para a atividade: 40 min

Aqui vamos debater com os alunos sobre como surgem os buracos negros. Eles surgem pela *morte* de uma estrela (morte aqui significa o fim do ciclo de fusão nuclear no interior de uma estrela). Se a estrela tiver massa suficiente, haverá um momento de desequilíbrio entre a força gravitacional e as forças de pressão da matéria dentro da estrela. Há, portanto, um colapso gravitacional com a criação de um buraco negro. Com isso, queremos acabar com a ideia equivocada divulgada de que os buracos negros são objetos que sugam tudo para o seu interior. Para verificar se eles entenderam essa ideia, pergunte o que aconteceria com a órbita da Terra e demais planetas do sistema solar se o Sol se transformasse subitamente em um buraco negro. A resposta esperada é que nada aconteceria. A órbita é idêntica. Ou seja, o buraco negro não passa de uma estrela apagada de grande densidade.

É comum nos livros de relatividade o uso de unidades onde $G = 1$ e $c = 1$. Estas são chamadas de unidades geometrizadas. Nelas as equações da TRG tornam-se mais simples. A métrica de Schwarzschild pode ser simplificada como:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2).$$

Note que nessas unidades M tem dimensão de comprimento.

Observe que a métrica possui dois pontos de singularidade, pontos no sistema de coordenadas em que a métrica não é definida e diverge indo para infinito: $r = 0$ e $r = 2M$. No caso de $r = 2M$ é possível eliminar a singularidade por meio de uma transformação adequada de coordenadas. Essa região é chamada de *horizonte de eventos* e a distância r é chamada de raio de Schwarzschild r_s . A estrutura de cones de luz nas proximidades de um horizonte de eventos é mostrada na figura abaixo:

Note que o cone de luz tangencia a superfície $r_s = 2M$ e o interior do cone de luz futuro não permite mais que um observador saia desta superfície daí o nome horizonte de

eventos. De outro modo, tudo aquilo que cai dentro do horizonte de eventos é *sugado* e nem a luz pode escapar desta interação gravitacional. Em um paralelo com a gravitação Newtoniana, o horizonte de eventos seria a região do espaço cuja velocidade de escape é igual a da luz, cerca de 300.000 km/s. Já para $r = 0$ não é possível eliminar a singularidade e ainda não conhecemos a física no interior dos buracos negros, mas devido ao horizonte de eventos, estamos isolados do que ocorre no interior.

Cálculo do raio do horizonte de eventos de um buraco negro: Curiosamente este é mesmo raio ($r_s = 2M$) calculado por Michell e Laplace como sendo o raio de uma estrela de massa M de modo que nem a luz consiga escapar da atração do seu campo gravitacional. Vamos usar a equação da velocidade de escape e determinar esse raio:

$$v_{\text{escape}} = c = \sqrt{\frac{2GM}{r_s}} \Rightarrow r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

Atividade 16 - Imagem do Buraco Negro

Nessa atividade, vamos mostrar as ideias que levaram à primeira imagem de um buraco negro. Para isso, passe o vídeo do Canal Veritasium: Como Entender a Imagem de um Buraco Negro <https://youtu.be/zUyH3XhpLTo>. O vídeo tem uma explicação excelente sobre a imagem e não necessita muito da interrupção do professor. Ele também pode ser passado como atividade para casa.

Tempo previsto para a atividade: 20 min

Atividade 17 - Velocidade de Dobra Espacial

Viajar com velocidade superior a da luz é um tema muito difundido em ficção científica. O artigo do físico mexicano Miguel Alcubierre de 1994 traz a abordagem matemática que poderia tornar esse sonho realidade. Vamos analisar qual deveria ser a métrica espaço-temporal para obtermos a chamada velocidade de dobra espacial.

Tempo previsto para a atividade: 30 min

A figura mostra o diagrama espaço-tempo para essa métrica.

Observe que dentro da região da bolha onde o espaço é curvo, os cones de luz estão inclinados em relação aos usuais 45° . Outra característica surge se considerarmos duas estações espaciais estacionárias A e B e uma nave se deslocando entre esses pontos num tempo $T < D$. Para os observadores nas estações, onde o espaço-tempo é plano, a nave se deslocou com velocidade aparentemente maior que a da luz. No entanto, o espaço-tempo é curvo, e a linha de mundo da nave é sempre interior aos cones de luz, que estão desviados. Ou seja, a nave está sempre com velocidade menor que a da luz no seu referencial.

“Poderia então uma civilização avançada construir uma espaçonave que criaria um espaço-tempo curvo como o da figura? [...] ele [espaço-tempo de Alcubierre] requer matéria ou campos com densidade de energia negativa. Todos os campos clássicos [...] possuem densidade de energia positiva. A mecânica quântica permite densidade de energia negativa, mas a física está longe de entender se ela pode ser aproveitada dessa forma.”

Atividade Final - Questionário

Na tentativa de avaliar se os objetivos das aulas foi atingido, use um questionário online feito pela plataforma do GoogleForms, acesse pelo link <https://forms.gle/aRxHYY9LRSSDnhqr5>. Ele deve ser passado para casa e deve levar de 15 a 25 min para os alunos responderem todas as questões.

Apêndice E

Slides das Aulas



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Física
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física
Mestrado Profissional em Ensino de Física

Slides das Aulas

(Material de apoio para professores)

Edward Cespedes Carageorge

Material instrucional associado à dissertação de mestrado de Edward Cespedes Carageorge, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro

Março de 2020

Neste material instrucional, vamos apresentar os slides utilizados nas quatro aulas.

Aula 01: Geometria não Euclidiana

 @edwardfisica
  Prof Edward Física
  profedwardfisica

1

Atividade 01

- Lápis
- Papel A4
- Tiras de cartolina
- Fita crepe
- Régua
- Transferidor
- Bola de plástico grande, de preferência

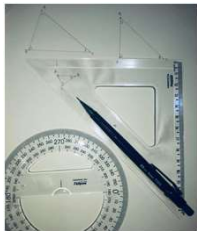


 @edwardfisica
  Prof Edward Física
  profedwardfisica

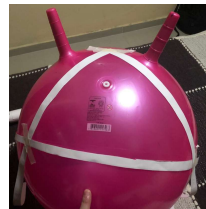
2

Atividade 01

- Na folha de papel, desenhe um triângulo qualquer e meça os seus ângulos.



- Agora use as tiras de papel para fazer um triângulo sobre a esfera. Prenda-as com o durex. Retire cuidadosamente as tiras da superfície e meça os ângulos desse novo triângulo



 @edwardfisica
  Prof Edward Física
  profedwardfisica

3

Atividade 01

- No primeiro experimento, quanto deu a soma dos ângulos internos do triângulo?
- Esse valor coincidiu com o esperado?
- No segundo experimento, quanto deu a soma dos ângulos internos do triângulo? É maior, menor ou igual ao primeiro?
- Esse valor coincidiu com o esperado?
- Como esse experimento poderia ser usado para demonstrar que a Terra é curva e não plana??
- Existe alguma relação dos triângulos com a gravidade?

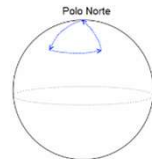
 @edwardfisica
  Prof Edward Física
  profedwardfisica

4

Enigma

- *Um urso sai da sua casa e anda 1 km para o Sul, em seguida 1 km para o Leste e então 1 km para o Norte, retornando ao ponto em que começou a se mover. Qual é a cor do urso?*

- A trajetória do urso pode ser representada pela figura.



- Finalmente, podemos dizer que o urso é branco, visto que é um urso polar.

@edwardfisica
 Prof Edward Física
 profedwardfisica

5

Atividade 02 - Geodésica

- Duas partículas livres descrevem trajetórias como a do vídeo ao lado.
- As partículas se afastam e depois se aproximam.
- Qual a interação que você acha existir entre elas? Uma força de atração? Repulsão?



@edwardfisica
 Prof Edward Física
 profedwardfisica

6

Geodésica

- Existe uma maneira de descrever a trajetória dessas partículas sem usar força.
- Mudando a geometria na qual elas estão inseridas é mais fácil descrever a sua trajetória.
- Assim, o faremos com a gravidade. No lugar de usar uma força para descrever o movimento, usaremos uma mudança da geometria que seja equivalente aos efeitos gravitacionais.



@edwardfisica
 Prof Edward Física
 profedwardfisica

7

Geodésica

- É o menor caminho possível entre dois pontos em uma superfície
 - Não é uma linha reta?
- Esse é o percurso das partículas livres (sob ação gravitacional) e dos raios de luz
 - Em óptica chamamos de princípio de Fermat
- Como descrever uma geodésica em uma superfície curva?
 - Toda curva pode ser reduzida em pedaços infinitesimais planos
 - Localmente será dada por uma linha reta
- Volte no mapa anterior e veja quais são os menores percursos do polo norte ao sul
 - Qualquer meridiano



@edwardfisica
 Prof Edward Física
 profedwardfisica

8

Geodésica

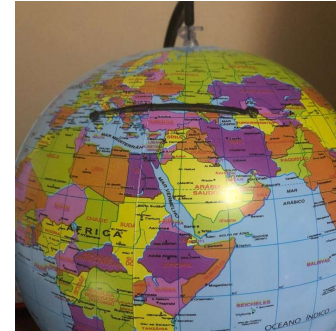


- Para uma esfera, consideremos uma linha que começa no equador ao norte e é localmente reta.
- Essa linha é chamada de meridiano.
- Duas linhas de longitude são paralelas no equador, mas em direção ao polo norte eles convergem.
- As paralelas se encontram!

@edwardfisica Prof Edward Fisica profedwardfisica

9

Mapas

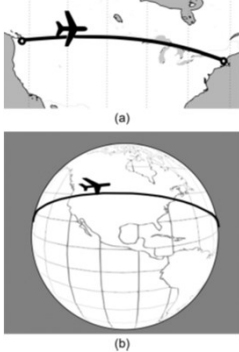


- Em muitas situações é necessário estudar a geometria de outras superfícies. Para planejar uma grande viagem de avião ou barco, por exemplo, é preciso compreender a geometria de uma superfície esférica.
- Olhe para o mapa e localize dois lugares em uma mesma latitude.
- Para onde um avião deveria seguir viagem para percorrer o menor caminho entre as duas cidades?
- Uma linha reta? Essa é um ótima resposta.
- Vamos desenhar essa reta no globo para verificar o caminho.
- Observe que o avião não voa diretamente para oeste, ele deve voar para noroeste, virando para oeste e finalmente para sudeste como pode ser visto na figura

@edwardfisica Prof Edward Fisica profedwardfisica

10

Mapas



- Observe que o avião não voa diretamente para leste, ele deve voar para nordeste, virando para leste e finalmente para sudoeste como pode ser visto na figura

@edwardfisica Prof Edward Fisica profedwardfisica

11

Atividade 03

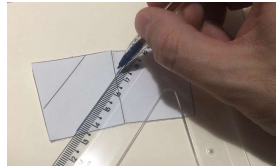
- "Eu chamo o nosso mundo de Flatland[...]. Imagine uma vasta folha de papel sobre a qual [...] figuras [...] se movem livremente, mas sem o poder de elevar-se ou afundar-se abaixo dela, muito parecido com sombras".
- Os flatlanders se movem em duas dimensões (frente-trás ou direita-esquerda), a terceira dimensão (cima-baixo) não é apenas inacessível para eles, mas está além de sua imaginação.
- Na falta do conceito de cima e para baixo, eles não podem conceber uma superfície curvada a um espaço tridimensional de encaixe.
- Será que eles seriam capazes de descobrir se estão em um mundo plano ou curvo? Já respondemos a essa pergunta com a soma dos ângulos internos do triângulo.
- Nós somos flatlanders, familiarizados com três dimensões, mas incapazes de conceber um espaço dimensional superior, podemos examinar a curvatura do nosso espaço tridimensional da mesma maneira que os flatlanders examinam as superfícies curvas no plano.

@edwardfisica Prof Edward Fisica profedwardfisica

12

Modelos de Setores

- Vamos ver agora um recurso geométrico visual para desenharmos as geodésicas
- Os modelos representam setores de superfícies esféricas: como se fossem os gomos
- Pegue um deles e comece a desenhar uma geodésica
 - Localmente são linhas retas

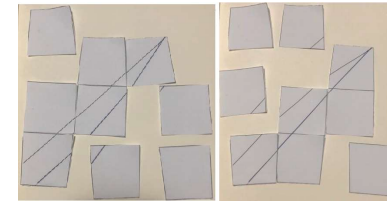


 @edwardfisica
  Prof Edward Física
  profedwardfisica

13

Modelos de Setores

- O que acontece quando desenhamos duas geodésicas que começam paralelas entre si numa superfície esférica?
- Como as peças dos setores não se encaixam, cada reta deve ser traçada unindo os seus pedaços como na figura abaixo

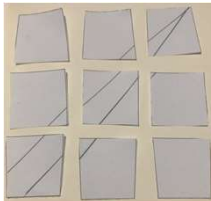


 @edwardfisica
  Prof Edward Física
  profedwardfisica

14

Modelos de Setores

- Como nosso setor é derivada de uma esfera, ao traçarmos as geodésicas que se iniciam paralelas, elas convergem



- Qual você acha que é a relação desse traçado com a interação gravitacional?

 @edwardfisica
  Prof Edward Física
  profedwardfisica

15

Atividade 04 – Buraco negro

- O que você acha que os BN têm de especial?
- O caminho da luz próximo a um BN pode ser descrito geometricamente?



- Sem nenhuma conta conseguimos descrever a trajetória do raio de luz próximo a um BN

 @edwardfisica
  Prof Edward Física
  profedwardfisica

16

Aula 02: Noções básicas de relatividade geral

@edwardfisica Prof Edward Fisica profedwardfisica

17

Princípio da equivalência

- Massa inercial: é a medida do seu coeficiente de inércia, ou seja, da sua resistência em ter seu estado de movimento alterado

$$\vec{F} = m_i \vec{a}$$

- Massa gravitacional ativa: é capaz de provocar forças em outros corpos, ou em termos modernos, ser fonte de campo gravitacional.

$$g = \frac{G}{d^2} m_{g(a)}$$

- Massa gravitacional passiva: é a propriedade do corpo que o faz sofrer ação da força peso, também chamada de uma carga gravitacional.

$$\vec{P} = m_{g(p)} \vec{g}$$

@edwardfisica Prof Edward Fisica profedwardfisica

18

Princípio da equivalência

- Todos os corpos independentemente da massa e do formato são submetidos à mesma aceleração gravitacional



@edwardfisica Prof Edward Fisica profedwardfisica

19

Princípio da equivalência

- Será que é tão óbvio que todas essas massas são iguais?
- Isaac Newton verificou a coincidência entre essas massas
- Vários experimentos nos séculos XIX e XX mostraram a equivalência entre as massas com um erro menor que 10^{-12}
 - Sendo esse um dos melhores resultados estabelecidos na física

- Analogamente será que a carga elétrica também é igual à massa inercial?

$$q\vec{E} = m_i \vec{a}$$

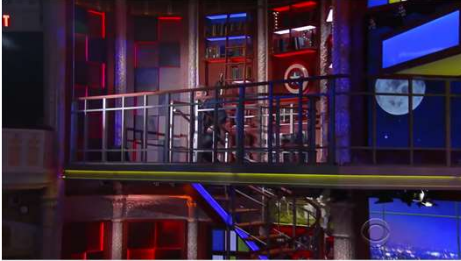
- “Em 1907, Einstein teve “a ideia mais feliz de sua vida”: o princípio da equivalência. Para um observador em queda livre não há gravidade nas suas proximidades. Assim se ele abandonar um corpo qualquer, ele permanecerá em repouso para esse observador”

@edwardfisica Prof Edward Fisica profedwardfisica

20

Princípio da equivalência

- Como um referencial sob ação do campo gravitacional vê objetos em queda livre

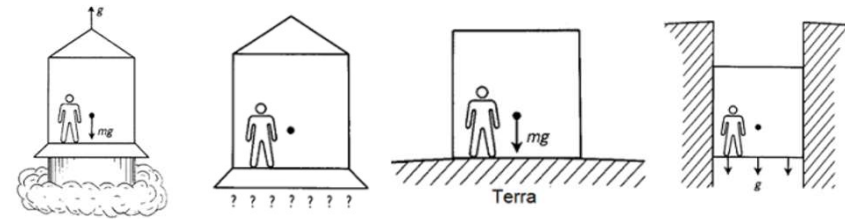


 @edwardfisica
  Prof Edward Física
  profedwardfisica

21

Campo gravitacional

- Claramente, do ponto de vista do astronauta, as situações 1 e 3 são indistinguíveis, assim como 2 e 4.
- Portanto, a gravidade pode ser criada por aceleração (princípio da equivalência).



 @edwardfisica
  Prof Edward Física
  profedwardfisica

22

Princípio de equivalência

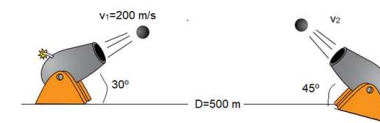
- *"A grande vantagem do Princípio da Equivalência é que os efeitos produzidos por um campo gravitacional uniforme não precisamos da teoria da gravitação [...] Tudo o que devemos fazer é supor que os sistemas considerados possuem aceleração em relação a um referencial inercial"*

 @edwardfisica
  Prof Edward Física
  profedwardfisica

23

Exercício

- Dois canhões são posicionados conforme a figura abaixo e seus projéteis são lançados simultaneamente. Determine a velocidade v_2 para que os projéteis se interceptem.

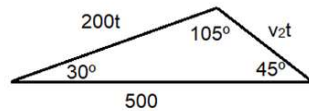


 @edwardfisica
  Prof Edward Física
  profedwardfisica

24

Solução

- Usando um corpo em queda livre como referencial, temos que os projéteis executam MRU.



- Lei dos senos:

$$\frac{200 \cdot t}{\sin(45^\circ)} = \frac{500}{\sin(105^\circ)} = \frac{v_2 \cdot t}{\sin(30^\circ)} \Rightarrow v_2 = 100\sqrt{2} \approx 141 \text{ m/s}$$

$$t \approx 1,83 \text{ s}$$

@edwardfisica Prof Edward Fisica profedwardfisica

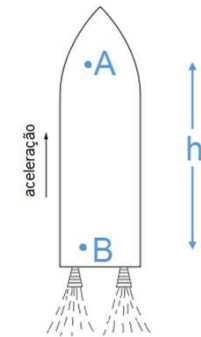
25

Redshift – Desvio para o vermelho

- Considere a luz viajando de baixo para o topo de um foguete em constante aceleração de módulo a , como na figura abaixo. Seja o referencial S no ponto A na parte inferior da nave espacial e S' no ponto B , na parte superior distante h . Qual é a razão entre as frequências da luz emitida por um laser em A e detectada em B ?

$$f' = f \left(\frac{c - v_{obs}}{c} \right) = f \left(1 - \frac{gt}{c} \right) = f \left(1 - \frac{gh}{c^2} \right)$$

$$\frac{1}{T'} = \frac{1}{T} \left(1 + \frac{\varphi}{c^2} \right) \Rightarrow T' \approx T \left(1 + \frac{\varphi}{c^2} \right)$$

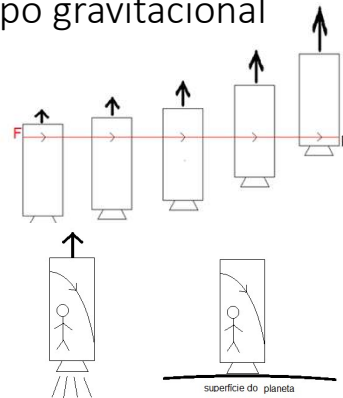


@edwardfisica Prof Edward Fisica profedwardfisica

26

Desvio da luz em um campo gravitacional

- Considere um foguete em acelerado para cima, isolado de outras interações gravitacionais, com uma fonte de luz F emitindo um raio de luz na direção horizontal.
- Qual será a trajetória para um observador dentro e outro fora do foguete?



@edwardfisica Prof Edward Fisica profedwardfisica

27

Exercício

- Considere o trajeto de um raio luminoso sob ação do campo gravitacional terrestre na superfície com $g = 10 \text{ m/s}^2$. Após percorrer 1 km, qual será o seu desvio vertical devido à ação gravitacional?

$$t = \frac{d}{c} = \frac{1 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^8} \approx 0,3 \cdot 10^{-5} \text{ s}$$

$$h = \frac{g \cdot t^2}{2} = \frac{10 \cdot (0,3 \cdot 10^{-5})^2}{2} \approx 0,5 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

@edwardfisica Prof Edward Fisica profedwardfisica

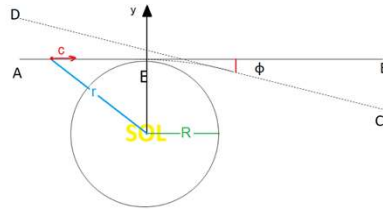
28

Exercício – Um pouco mais difícil

- Aplicando um raciocínio análogo ao da questão anterior, calcule o ângulo de deflexão gravitacional de um raio luminoso que, propagando-se no vácuo, tangencia um corpo esfericamente simétrico de raio R e massa M, percorrendo uma distância muito maior que R. Estime o resultado para o desvio próximo ao Sol

$$M = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

$$R = 7 \cdot 10^5 \text{ km}$$



@edwardfisica Prof Edward Física profedwardfisica

29

Solução

- A velocidade “adquirida” devido à interação gravitacional pode ser calculada pelo teorema do impulso

$$m \cdot v_x = \int F_x \cdot dt = \int F_x \cdot \frac{dy}{v_y} = \frac{1}{c} \int \frac{GMm}{d^2} \sin(\theta) \cdot dy$$

$$v_x = \frac{1}{c} \int \frac{GM}{d^2} \frac{r_0}{d} \cdot dy = \frac{1}{c} \int \frac{GM r_0}{(r_0^2 + y^2)^{3/2}} \cdot dy = -\frac{GM r_0}{c} \frac{-2}{(r_0^2 + y^2)^{1/2}} \Big|_0^{\infty} = \frac{2GM}{Rc}$$

$$\tan \phi = \frac{v_x}{v_y} = \frac{2GM}{Rc^2} \Rightarrow \phi \cong 0,87''$$

@edwardfisica Prof Edward Física profedwardfisica

30

Desvio da luz em um campo gravitacional

- Relembre do trajeto da luz desenhado usando os modelos de seção.
 - A matemática usada é condizente com o desenho do desvio da luz?
- Eclipse de Sobral
 - O resultado real foi o dobro da conta que realizamos. Por que essa diferença?
 - Onde “está” a outra metade do desvio?
- Einstein atribui
 - metade dessa deflexão ao efeito do campo Newtoniano de atração do Sol
 - e a outra metade à curvatura apenas do espaço causada pela presença do Sol.
 - Quando esses efeitos são somados, temos o resultado previsto pela TRG.



@edwardfisica Prof Edward Física profedwardfisica

31

Aula 03: Métrica

@edwardfisica Prof Edward Física profedwardfisica

32

Relatividade restrita

- **Postulado 1:** Todas as leis da física são as mesmas em todos os sistemas de referência inercial, ou seja, não existe referencial preferencial.
- **Postulado 2:** A velocidade da luz no vácuo é a mesma todos os referenciais

Relatividade restrita

- Imagine um trem que viaja com velocidade horizontal constante de módulo v . Dentro dele, existe um relógio de luz, composto por uma fonte no chão do trem e um espelho plano no teto a uma distância h .
- O nosso **segundo** será o tempo que o raio de luz leva para sair da fonte, ser refletido pelo espelho e retornar para um detector no chão.



Relógio de luz

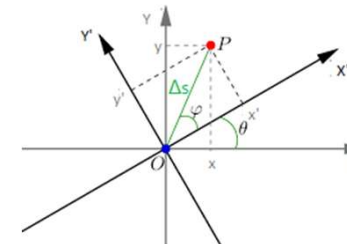
- Para S' : $\Delta t' = 2h/c$
- Para o referencial S , usamos o teorema de Pitágoras:

$$\left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 - \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 = h^2 \rightarrow \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - c^2/v^2}}$$
- Se fizermos isso para dois referenciais S_1 e S_2 , teremos:

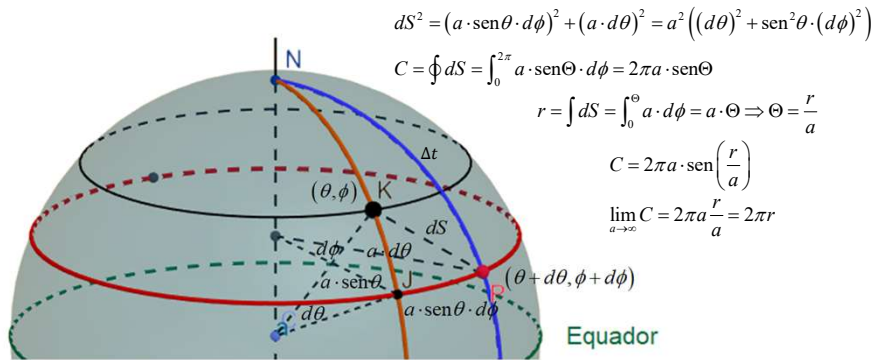
$$(c\Delta t_1)^2 - (v_1\Delta t_1)^2 = (c\Delta t_2)^2 - (v_2\Delta t_2)^2 = 4h^2 = -\Delta s^2$$
- Esse valor $-\Delta s^2$ é um invariante, ou seja, é constante independente do referencial e chamado intervalo espaço-temporal.

Geometria não-Euclidiana

- Invariância da distância por rotação



Geometria não-Euclidiana



$$dS^2 = (a \cdot \text{sen}\theta \cdot d\phi)^2 + (a \cdot d\theta)^2 = a^2 \left((d\theta)^2 + \text{sen}^2\theta \cdot (d\phi)^2 \right)$$

$$C = \oint dS = \int_0^{2\pi} a \cdot \text{sen}\theta \cdot d\phi = 2\pi a \cdot \text{sen}\theta$$

$$r = \int dS = \int_0^{\Theta} a \cdot d\phi = a \cdot \Theta \Rightarrow \Theta = \frac{r}{a}$$

$$C = 2\pi a \cdot \text{sen}\left(\frac{r}{a}\right)$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} C = 2\pi a \cdot \frac{r}{a} = 2\pi r$$

@edwardfisica Prof Edward Fisica profedwardfisica

37

Coordenadas espaço-temporais

- Elemento de linha: é o infinitésimo do intervalo espaço-temporal, em 4 dimensões pode ser escrito em coordenadas:

- Cartesianas: $ds^2 = -(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$

- Esféricas: $ds^2 = -(cdt)^2 + dr^2 + r^2 \cdot d\theta^2 + r^2 \cdot \text{sen}^2\theta \cdot d\phi$

- A mudança da coordenada temporal já foi observada no *desvio para o vermelho* com alteração do tempo pelo potencial gravitacional ϕ

- Podemos reescrever as coordenadas cartesianas como:

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

@edwardfisica Prof Edward Fisica profedwardfisica

38

Coordenadas do espaço-tempo

- A teoria clássica previa um desvio da luz provocado pela ação gravitacional. No entanto, o valor encontrado pelos astrônomos foi o dobro do previsto pela teoria Newtoniana.
- Em uma exposição simplificada de suas ideias, publicada em 1920, Einstein atribui metade dessa deflexão ao efeito do campo newtoniano de atração do Sol e a outra metade à curvatura do espaço causada pela presença do Sol.
- Essa curvatura pode ser expressa como uma alteração na métrica (Schwarzschild) do espaço pela seguinte equação:

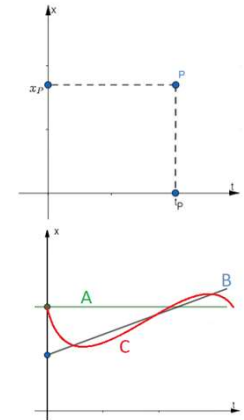
$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2) - \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)(c \cdot dt)^2$$

@edwardfisica Prof Edward Fisica profedwardfisica

39

Diagramas de espaço-tempo

- Para conseguirmos expressar os eventos usando a geometria, vamos descrever um sistema quadridimensional (t, x, y, z) , que será representado por um **diagrama de espaço-tempo**
- Os eventos serão representados por um ponto P dizendo onde x_p e quando t_p ele ocorreu.
- Uma partícula descreverá sua trajetória espaço-temporal por uma linha de mundo.
- Assim como na cinemática tradicional, a inclinação da reta nos fornecerá o valor da velocidade

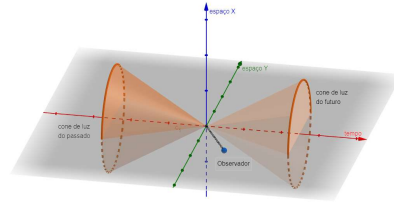


@edwardfisica Prof Edward Fisica profedwardfisica

40

Cones de luz

- Representam a trajetória de um raio de luz em um diagrama espaço-tempo
- A luz é uma velocidade limite para o movimento dos corpos, portanto, nada pode se mover mais rápido que a luz
- Esse limite define no espaço uma região de passado e futuro denominada cone de luz.
- Qualquer linha de mundo deve estar contida no cone de luz
- Cada geratriz do cone está inclinada 45° em relação ao eixo espaço-tempo

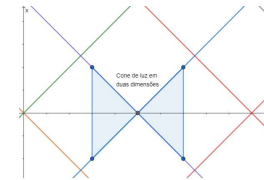


@edwardfisica
 Prof Edward Física
 profedwardfisica

41

Cones de luz

- Vamos trabalhar de maneira simplificada em apenas duas dimensões: uma espacial e outra temporal.
- Os cones de luz serão uma malha de retas inclinadas de 45° indicando de onde partem os raios de luz e o sentido do seu movimento

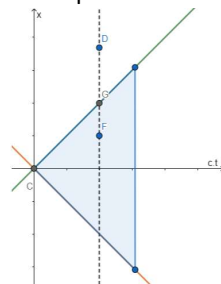


@edwardfisica
 Prof Edward Física
 profedwardfisica

42

Cones de luz

- O elemento de linha, ds^2 , pode assumir três tipos de valores:
 - $ds^2 > 0$: tipo tempo (F),
 - $ds^2 = 0$: tipo nulo (G),
 - $ds^2 < 0$: tipo espaço (D).



@edwardfisica
 Prof Edward Física
 profedwardfisica

43

Aula 04: Fenômenos gravitacionais

@edwardfisica
 Prof Edward Física
 profedwardfisica

44

Geodésica

- "A curvatura do espaço-tempo explorada pela teoria da relatividade geral é estudada através da trajetória de uma partícula de teste e um raio de luz. Apenas partículas livres ou em queda livre serão consideradas"
- A trajetória seguida por uma partícula livre entre dois pontos do tipo tempo extremiza o tempo próprio entre eles, matematicamente pode ser representado por:

$$\int (-\eta_{ab} dx^a dx^b)^{1/2} = 0$$

- Isso é análogo ao princípio de Fermat na óptica geométrica

 @edwardfisica  Prof Edward Física  profedwardfisica

45

Equação de Einstein

- A equação de Einstein governa a geometria do espaço-tempo curvo, equação básica da relatividade geral [...] Ela é o equivalente das equações de Maxwell para o eletromagnetismo.
- Dessa forma, qualquer fonte pode provocar uma deformação na métrica espacial representada por uma função $f(\phi)$, originando um elemento de linha com a forma

$$ds^2 = f(\phi)(dx^2 + dy^2 + dz^2) - (1 + 2\phi)dt^2$$

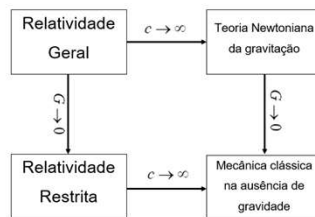
- Qual é a origem dessa deformação?

 @edwardfisica  Prof Edward Física  profedwardfisica

46

Princípio da Correspondência

- "Qualquer nova teoria tem que ser consistente com as teorias anteriores dentro do seu limite de validade. Assim a relatividade geral deve levar à relatividade restrita na ausência de gravidade, quando G tende a 0 e à gravitação newtoniana em campos gravitacionais fracos e com velocidades pequenas quando comparadas a da luz, ou seja, quando c tende para infinito. Para ambas as condições satisfeitas, a mecânica clássica deve prevalecer."



 @edwardfisica  Prof Edward Física  profedwardfisica

47

Equação de Einstein

- A equação de Einstein relaciona a curvatura do espaço-tempo com sua fonte (massa-energia da matéria) em um conjunto de dez equações diferenciais de segunda ordem não lineares e não independentes, o que torna sua solução muito complicada
 - G é o tensor de curvatura, associada com a estrutura geométrica do espaço-tempo. Essa grandeza que diz qual será a métrica do espaço.
 - T é o tensor de energia-momento, que depende da distribuição de matéria e energia do universo.

$$G = \frac{8\pi G}{c^4} T$$

- A gravitação newtoniana surge da relatividade geral quando uma deformação na parte espacial da métrica é considerada cujo valor depende do potencial gravitacional, diretamente proporcional à massa.
- No limite newtoniano, ou seja, para pequenas massas e velocidades muito menores que a da luz, as equações da relatividade geral devem reproduzir a lei do inverso do quadrado das distâncias

$$F(r) = \frac{GMm}{r^2}$$

 @edwardfisica  Prof Edward Física  profedwardfisica

48

Desvio para o vermelho gravitacional

- Agora vamos usar a métrica de Schwarzschild para mostrar que ela também deriva o mesmo resultado.
- Consideremos sinais a propagarem-se no eixo x emitidos a partir de um ponto A em x_A e recebidos em por um ponto B em x_B .
- Note que, como em um espaço-tempo curvo, a linha de mundo do raio de luz não será mais uma reta com 45° de inclinação.
- As linhas de mundo dos sinais emitidos terão a mesma forma pois a geometria não depende do tempo.
- A distância temporal entre dois sinais consecutivos será Δt , porém o tempo próprio medido em x_A e x_B serão diferentes entre si, pois

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2$$

@edwardfisica Prof Edward Fisica profedwardfisica

49

Desvio para o vermelho gravitacional

- Para A e B , temos que $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$ de modo que o tempo próprio para a emissão usando a métrica de Schwarzschild será:

$$\Delta \tau = (1 + 2\Phi(x))^{1/2} \Delta t \approx (1 + \Phi(x)) \Delta t$$

$$\Delta \tau_B \approx (1 + \Phi(x_B) - \Phi(x_A)) \Delta \tau_A$$

$$\frac{\Delta \tau_B}{\Delta \tau_A} \approx \frac{(1 + \Phi(x_B)) \Delta t}{(1 + \Phi(x_A)) \Delta t} \approx (1 + \Phi(x_B) - \Phi(x_A))$$

$$\Delta \tau_B \approx (1 + \Phi(x_B) - \Phi(x_A)) \Delta \tau_A$$

@edwardfisica Prof Edward Fisica profedwardfisica

50

Buraco negro

- Como surgem?
- O que aconteceria com a órbita da Terra e demais planetas do sistema solar se o Sol se transformasse subitamente em um buraco negro.
- Métrica de Schwarzschild em unidades geometrizadas
 - $c=1$ e $G=1$

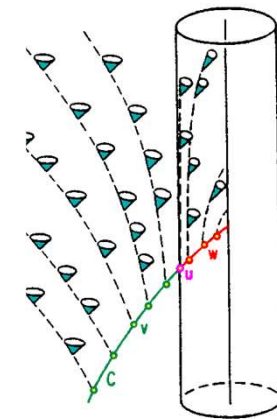
$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

@edwardfisica Prof Edward Fisica profedwardfisica

51

Buraco negro

- Não temos acesso a todo o espaço-tempo!
- Surge um horizonte de eventos.
- Nada consegue atravessar o horizonte de dentro para fora.
- No centro do buraco negro há uma divergência na curvatura.



@edwardfisica Prof Edward Fisica profedwardfisica

52

Buraco negro

- Cálculo do raio do horizonte de eventos de um buraco negro.
- Curiosamente este é mesmo raio calculado por Michell e Laplace como sendo o raio de uma estrela de massa M de modo que nem a luz consiga escapar da atração do seu campo gravitacional.
- Vamos usar a equação da velocidade de escape e determinar esse raio:

$$E_{\text{cinética}} + E_{\text{potencial}} = 0 \Rightarrow \frac{mv_{\text{escape}}^2}{2} - \frac{GMm}{r_s} = 0$$

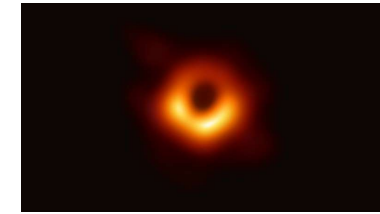
$$v_{\text{escape}} = c = \sqrt{\frac{2GM}{r_s}} \Rightarrow r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

 @edwardfisica  Prof Edward Fisica  profedwardfisica

53

Buraco negro: bônus

- Tiramos a primeira foto de um buraco negro em Abril de 2019
- Assista ao vídeo para entender melhor o processo que levou a essa fotografia
- Canal Veritasium
 - Como Entender a Imagem de um Buraco Negro
 - <https://youtu.be/zUyH3XhpLTo>

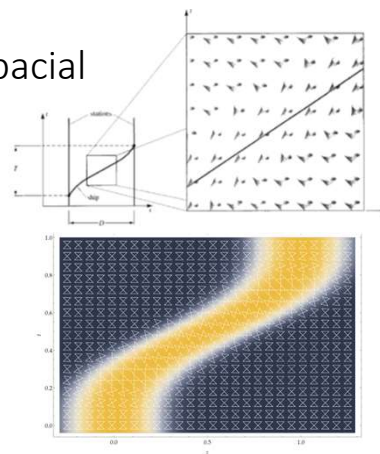


 @edwardfisica  Prof Edward Fisica  profedwardfisica

54

Velocidade de Dobra Espacial

- Observe na figura onde o espaço é curvo,
- Os cones de luz estão inclinados em relação ao usual 45° .
- Outra característica surge se considerarmos duas estações espaciais estacionárias A e B e uma nave se deslocando entre esses pontos num tempo $T < D$.
- Para os observadores nas estações, onde o espaço-tempo é plano, a nave se deslocou com velocidade maior que a da luz.
- No entanto, o espaço-tempo é curvo, e a linha de mundo da nave é sempre interior aos cones de luz, que estão desviados.
- Ou seja, a nave está sempre com velocidade menor que a da luz



 @edwardfisica  Prof Edward Fisica  profedwardfisica

55

Então podemos viajar com velocidade maior que a da luz?

- "O fato de que esta expressão (a densidade de energia) é negativa em todos os pontos implica que condições de energia fraca e dominante, assim como a forte são violadas [...] Dessa forma, assim como ocorre em buracos de minhoca, é necessário matéria exótica para viajar mais rápido que a luz. Contudo, mesmo que essa energia seja proibida classicamente, sabe-se que campos quânticos permitem a existência de regiões com densidade negativa de energia, como no efeito Casimir. A necessidade da matéria exótica não elimina a possibilidade de usar a distorção do espaço-tempo como a descrita acima para viagens interestelares hiper-rápidas"

 @edwardfisica  Prof Edward Fisica  profedwardfisica

56