UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Física
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física
Mestrado Profissional em Ensino de Física

Roteiro das aulas

(Material de apoio para professores)

Edward Cespedes Carageorge

Carlos Augusto Domingues Zarro

Material instrucional associado à dissertação de mestrado de Edward Cespedes Carageorge, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro

Março de 2020

Este material foi escrito para os professores que desejarem usar a nossa sequência didática para ensinar TRG no ensino médio e nos primeiros anos de graduação. Recomenda-se que o professor leia antes o Apêndice C: Textos de apoio para professores e alunos.

Como já usamos este material em três turmas em aulas extras aos sábados, apresentamos o esquema abaixo com os tópicos abordados, as atividades desenvolvidas em cada aula e os pré-requisitos necessários para o seu desenvolvimento.

Aula	Tópicos abordados	Atividades	Pré-requisitos	Tempo
01	Geometria esférica. Geodésica. Modelos de setores. Buracos negros.	Atividade 1. Atividade 2. Atividade 3. Atividade 4.	Noções básicas de geometria Euclidiana.	150 min
02	Princípio de equivalência. Desvio para o vermelho gravitacional. Deflexão da luz.	Atividade 5. Atividade 6. Atividade 7.	Forças inerciais. Equações do MUV. Efeito Doppler.	150 min
03	Relatividade restrita. Sistema de coordenadas. Elemento de linha: invariante espaço-temporal. Diagramas espaço-temporais. Cones de luz.	Atividade 8. Atividade 9. Atividade 10. Atividade 11. Atividade 12.	Noções básicas de cinemática escalar. Noções básicas de cálculo diferencial.	150 min
04	Tópicos relevantes. Desvio para o vermelho gravitacional. Buraco negro. Imagem de um buraco negro. Velocidade de dobra espacial.	Atividade 13. Atividade 14. Atividade 15. Atividade 16. Atividade 17.	Noções básicas de cálculo diferencial.	150 min

Figura 1: Sugestão para a divisão das aulas da sequência didática.

1 Aula 01

Essa aula será dividida em 4 atividades, cada uma com um objetivo específico de aprendizagem: reconhecer algumas propriedades da geometria não-Euclidiana (esférica, no nosso caso); entender a geodésica como o menor caminho entre dois pontos; representar a geodésica na geometria esférica usando os modelos de setores; descrever a trajetória da luz nas proximidades de um buraco negro usando os modelos de setores.

Atividade 01

Para motivar os alunos com uma geometria *não convencional*, usaremos um experimento para diferenciar dois tipos de curvaturas: Euclidiana (plana) e Riemanniana (esférica). A última será muito importante na descrição da relatividade geral.
Tempo previsto para a atividade: 35 min

Materiais

- Lápis
- Papel A4
- Tiras de papel
- Fita crepe
- Régua
- Transferidor
- Bexiga ou bola

Procedimento

Peça aos alunos que desenhem triângulos quaisquer em uma folha de papel usando lápis e régua, como na Fig. 2. Em seguida, usando um transferidor, peça que eles meçam os ângulos internos de cada triângulo, some-os e anote o resultado ao lado d cada figura.

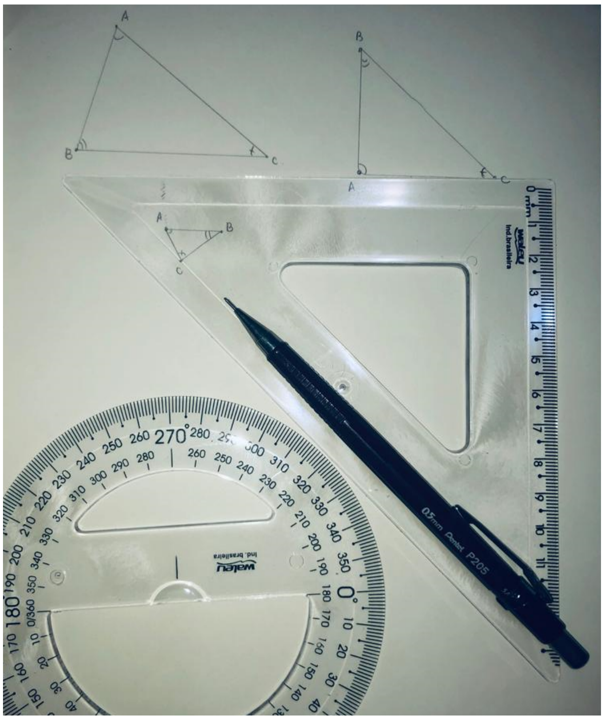


Figura 2: Triângulos desenhados em um pedaço de papel representando um universo plano.

Repita o experimento na superfície esférica. Para isso, os alunos usarão três tiras de papel e as fixarão com fita crepe na superfície de uma bola, como exemplificado Fig. 3. Em seguida, removerão cuidadosamente o triângulo da esfera, mantendo a fita crepe unindo os lados das tiras de papel. Agora, eles esticarão cada vértice sobre a superfície de uma mesa, medirão cada ângulo interno e realizarão a sua soma.

Perguntas

1. No primeiro experimento, quanto deu a soma dos ângulos internos do triângulo?

2. Esse valor coincidiu com o esperado?

Figura 3: Um triângulo feito com três tiras de papel presos com durex na superfície de um balão esférico. Removendo cuidadosamente o triângulo e medindo seus ângulos internos confirmará que a soma será maior que 180°.

3. No segundo experimento, quanto deu a soma dos ângulos internos do triângulo? É maior, menor ou igual ao primeiro?
4. Esse valor coincidiu com o esperado?
5. Como esse experimento poderia ser usado para demonstrar que a Terra é curva e não plana??
6. Existe alguma relação dos triângulos com a gravidade?

Respostas e Discussões

Os alunos devem ser capazes de reconhecer o resultado do primeiro experimento como esperado, pois a soma dos ângulos internos de um triângulo vale 180°. Durante a realização da medida no segundo experimento, deve-se ter uma expectativa de um valor maior que 180°, pois os lados precisam ser esticados para fazer-se a medida. Aqui já pode ser introduzida a ideia de planificação de mapas e suas imperfeições, pois é impossível fazer uma projeção perfeita de uma curva sobre um plano. A curvatura da Terra poderia ser determinada reproduzindo-se um experimento feito por Gauss em fazer um triângulo bem grande sobre a superfície da Terra e medindo seus ângulos. Se a soma for diferente de 180°, então a Terra é curva. E a princípio não há uma relação com a gravidade, mas trata-se de uma observação geométrica.

Enigma

Para complementar essas ideias sobre curvatura, apresente o seguinte enigma aos alunos: *Um urso anda 1 km para o Sul, em seguida 1 km para o Leste e então 1 km para o Norte, retornando ao ponto em que começou a se mover. Qual é a cor do urso?*

A resposta pode ser dada na aula seguinte, a fim de que eles pensem na curvatura. E pode-se traçar o caminho em um globo de borracha, ou na própria bola que foi usada no experimento anterior. Do polo norte, desenhamos um caminho para o sul. De lá, iremos para o leste, nos movendo ao longo de uma linha de latitude. Finalmente viajamos para o norte, e acabamos exatamente no polo norte, mesmo ponto de partida. A rota percorrida parecerá um triângulo, como visto na Fig. 4 e podemos dizer que o urso é branco, visto que é um urso polar.

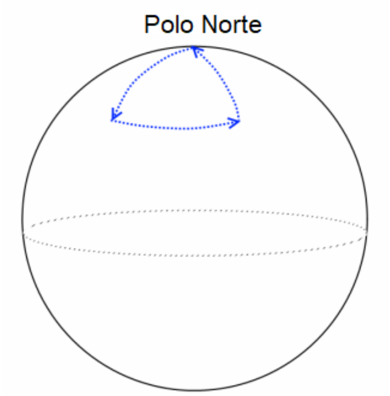


Figura 4: Trajetória completa do urso até retornar ao ponto inicial. O urso parte do polo norte e segue a trajetória representada pelas setas azuis.

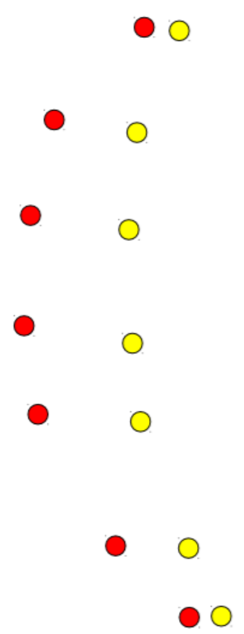
Atividade 02

A atividade 2 servirá para definirmos geometricamente a geodésica, uma dos principais conceitos da relatividade geral.

Tempo previsto para a atividade: 35 min

Duas partículas se movendo

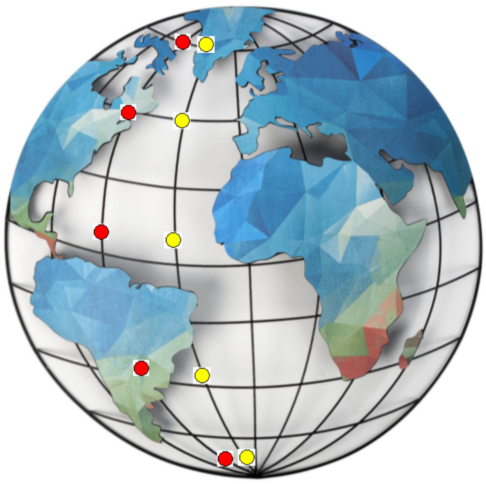
Comece apresentando duas partículas se movendo como a trajetória da figura abaixo. Observe que as partículas se afastam e depois se aproximam.



Em seguida, promova o debate sobre "Qual a interação que você acha existir entre elas? Uma força de atração? Repulsão? Existe alguma força com essa propriedade?" Não há nenhuma força que aproxime os corpos e depois afaste, então essa possibilidade pode ser descartada por enquanto.

Mudança de geometria

Apresente novamente o movimento das partículas, mas agora com o globo terrestre representado como na figura abaixo e pergunte se há uma maneira mais fácil de descrever a trajetória dessas partículas sem usar força. Após algumas ideias, encaminhe os alunos para a mudança da geometria. Pois essas partículas se movem em *linhas retas paralelas entre si* sobre a superfície da esfera. Assim, o faremos com a gravidade. No lugar de usar uma força para descrever o movimento, usaremos uma mudança da geometria que seja equivalente aos efeitos gravitacionais.



Geodésica

Agora defina a geodésica. Ela é o menor caminho possível entre dois pontos em uma superfície, que na geometria Euclidiana é simplesmente uma linha reta. Esse será o percurso de partículas livres e dos raios de luz. Lembrando da óptica geométrica, é chamado de princípio de Fermat. Volte no mapa e veja quais são os menores percursos do polo norte ao sul: qualquer linha de meridiano.

Mapas

Em muitas situações é necessário estudar a geometria de outras superfícies. Para planejar uma grande viagem de avião ou barco, por exemplo, é preciso compreender a geometria de uma superfície esférica. Olhe para o mapa e localize dois lugares em uma mesma latitude. Pergunte aos alunos para onde um avião deveria seguir viagem para percorrer o menor caminho entre as duas cidades? Talvez eles ainda insistam na linha reta, o que não é uma resposta ruim. Mas quando desenha-se essa *reta* no globo, verificamos que o avião não voa diretamente para oeste, ele deve voar para noroeste, virando para oeste e finalmente para sudeste como pode ser visto na imagem abaixo. Essas linhas são chamadas de *grandes círculos*, pois se prolongadas, elas fecham uma circunferência cujo centro coincide com o da esfera. Esses grandes círculos são as *linhas retas* da geometria esférica.

Atividade 03

A atividade 3 será usada para construirmos as geodésicas usando os modelos de setores.

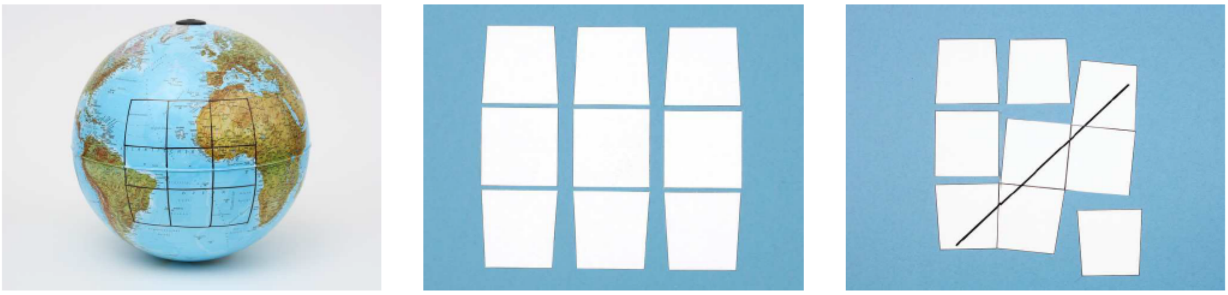
Tempo previsto para a atividade: 40 min

Flatland - Um romance em muitos dimensões

Comece com uma citação do livro: *"Eu chamo o nosso mundo de Flatland[...]. Imagine uma vasta folha de papel sobre a qual [...] figuras [...] se movem livremente, mas sem o poder de elevar-se ou afundar-se abaixo dela, muito parecido com sombras."*. Veja se os alunos conseguem entender que as figuras são personagens que habitam um folha bidimensional. Os *flatlanders* se movem em duas dimensões (frente-trás ou direita-esquerda), a terceira dimensão (cima-baixo) não é apenas inacessível para eles, mas está além de sua imaginação. Quando estendemos o *Flatland* de Abbott para superfícies curvas, os *flatlanders* ainda se movem apenas sobre a superfície: para a frente ou para trás e para a direita ou para a esquerda. Na falta do conceito de cima e para baixo, eles não podem conceber uma superfície curvada a um espaço tridimensional. No entanto, eles são capazes de estudar a curvatura do seu mundo. Nós somos *spacelanders*, familiarizados com três dimensões, mas incapazes de conceber um espaço dimensional superior, podemos examinar a curvatura do nosso espaço tridimensional da mesma maneira que os *flatlanders* examinam as superfícies curvas no plano.

Material

Para começar, acesse o site `https://www.spacetimetravel.org/list_of_sectormodels/list_of_sectormodels.html` e baixe o modelo chamado *Spherical Cap*, que representará a superfície de uma esfera. Corte o papel seguindo as instruções para destacar os setores. Veja a figura abaixo para verificar a origem dos setores como cortes de pequenos pedaços de uma esfera.

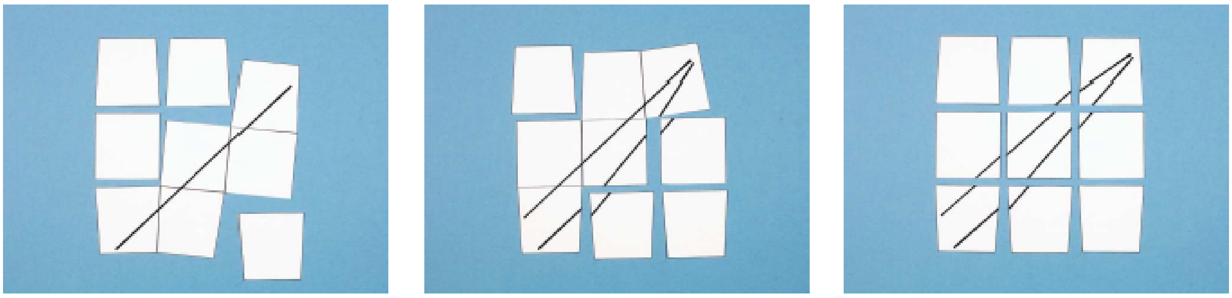


(a) (b) (c)

Construção da geodésica

Peça aos alunos para traçarem uma reta no setor inferior esquerdo. Como cada setor é considerado pequeno em relação ao tamanho da esfera que o deu origem, a geodésica é essa linha reta. Chamamos isso de localidade: localmente a geodésica é uma reta, como ocorre no espaço Euclidiano. Basta unir os vértices dos setores adjacentes para continuar o traçado dessa reta. Agora peça aos alunos para fazerem outra geodésica, que se inicia paralela à primeira. Antes deles terminarem o traçado, pergunte o que deve acontecer na parte superior direita. A prova, qualquer que seja a intuição do aluno, será mostrada pelo seu desenho, como o da imagem abaixo: as paralelas convergem. A ideia central mais a frente será usar a geometria para descrever as interações gravitacionais.

Assim, conseguimos reproduzir a geodésica com uma figura fácil de ser construída. Vamos usar esse método para descrever a trajetória da luz próxima a um buraco negro.



(a) (b) (c)

Atividade 04

A atividade 4 será usada para construirmos geodésicas próximas a um buraco negro e discutirmos os conceitos básicos sobre esse objeto astronômico.

Tempo previsto para a atividade: 40 min

Guia

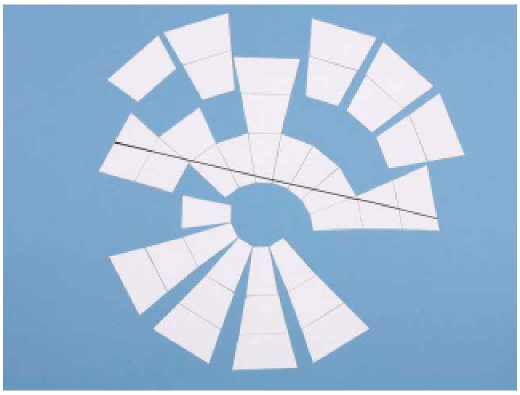
Comece perguntando aos alunos o que é um buraco negro. Várias ideias equivocadas devem surgir das respostas como eles *sugarem* objetos para seu interior sem chance de escape e nem mesmo a luz resiste à sua atração gravitacional. Na verdade, um buraco negro de massa M causa a mesma interação que uma estrela de mesma massa[1], porém sem emitir a luz que antes a estrela irradiava. Se o Sol de alguma forma se tornasse um buraco negro, as órbitas dos planetas do sistema solar se manteriam inalteradas, ou seja, o buraco negro não passa de uma estrela apagada com enorme densidade. Devido à sua massa, o espaço-tempo próximo a esse objeto astronômico não é Euclidiano, portanto vamos usar os modelos de setores para escrever a trajetória da luz.

Material e Utilização

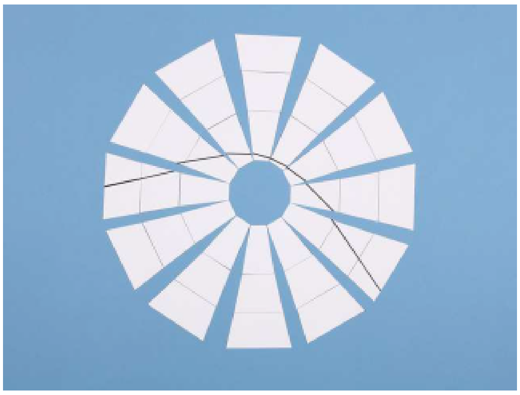
Para começar, acesse o site `https://www.spacetimetravel.org/list_of_sectormodels/list_of_sectormodels.html` e baixe o modelo chamado *Equatorial Plane of a Black*

[1] Aqui estamos usando a aproximação para um buraco negro e uma estrela esféricos e sem rotação

Hole, que representará um plano equatorial de um buraco negro. Corte o papel seguindo as instruções para destacar os setores. Veja a figura a seguir para verificar como os setores devem ser dispostos para desenhar a geodésica. Localmente as linhas são retas e são desenhadas pela união dos vértices dos setores adjacentes. Quando eles são colocados de volta na posição original, ilustram a trajetória que viríamos da luz.



(a)



(b)

Debate final

Para encerrar a aula 01, promova uma breve discussão com os alunos sobre o que causa essa deformação no espaço. Seria a matéria? Pode ser energia? O que é deformado no espaço, se não há um objeto físico ali para sofrer essa alteração. Além disso, não é apenas o espaço alterado, mas o tempo. Esse conjunto é chamado de *espaço-tempo* e aparece tanto na relatividade especial quanto na geral. Nele, o tempo é uma dimensão como o espaço e descrito em coordenadas cartesianas, por exemplo, ficaria (x, y, z, t). A TRG estudará os efeitos gravitacionais como geometria e predirá como as partículas e a luz se movimentarão nesse espaço-tempo alterado. Nas palavras de John Archibald Wheller, o conteúdo físico das equações de Einstein para descrever a gravidade é *"O espaço-tempo diz para a matéria como se mover; a matéria diz para o espaço-tempo como se curvar."*.

2 Aula 02

Nessa aula, iremos abordas os conceitos físicos que juntos da geometria não-Euclidiana darão origem à TRG.

Atividade 05 - Princípio da Equivalência

Tempo previsto para a atividade: 35 min

Definindo as massas

- Massa inercial (m_i): é a medida do coeficiente de inércia do corpo, ou seja, da sua resistência em ter seu estado de movimento alterado e corresponde ao termo que aparece na 2ª lei de Newton. A priori m_i não possui nenhuma relação com gravitação.

$$\vec{F} = m_i \vec{a}$$

- Massa gravitacional ativa ($m_g(a)$): é capaz de provocar forças em outros corpos, ou em termos modernos, ser fonte de campo gravitacional

$$g = \tfrac{G}{d^2} m_g(a)$$

- Massa gravitacional passiva ($m_g(pa)$): é a propriedade do corpo que o faz sofrer ação da força peso, também chamada de uma carga gravitacional

$$\vec{P} = m_g(p)\vec{g}$$

Debate com os alunos

Pegue uma folha de papel e um livro (ou qualquer outro objeto pesado) e os abandone de uma mesma altura. O livro chegará primeiro ao solo. Pergunte aos alunos o porquê do papel chegar depois no chão. Alguns podem dizer que é a resistência do ar, mas a resposta mais imediata é dizer que o mais pesado cai antes do mais leve. Se esse for o caso, amasse a folha de papel e repita o experimento. Dessa vez, ambos chegarão ao solo ao mesmo tempo. Por quê? A massa do papel não mudou, mas a sua resistência ao ar sim. Então pergunte aos alunos o que deve acontecer se você pudesse retirar todo ar da sala e refazer o experimento com a folha aberta. Nesse momento, eles devem perceber que ambos os corpos devem cair juntos. Assim, a aceleração devido à ação gravitacional, nas vizinhanças da superfície da Terra, é a mesma para todos os corpos, independente de suas massas, formas ou composição e pode ser ilustrado por um vídeo da BBC disponível no YouTube `https://youtu.be/E43-CfukEgs?t=169` em que uma pena e uma bola de boliche são abandonados de uma mesma altura em uma câmara de vácuo e elas caem juntas no solo.

Em 1907, Einstein teve “a ideia mais feliz de sua vida”: para um observador em queda livre não há gravidade nas suas proximidades. Assim se ele abandonar um corpo qualquer, ele permanecerá em repouso para esse observador. Essa propriedade por ser melhor apresentada acompanhada de um vídeo do professor Brian Greene disponível em `https://www.youtube.com/watch?v=0jjFjC30-4A`, em que ele abandona uma garrafa furada em queda livre. Para a água, é como se não houvesse gravidade e, portanto, ela para de vazar pelos orifícios.

Essa propriedade surpreendente verificada pela mecânica clássica é o fato das forças gravitacionais serem proporcionais à massa inercial, assim como as forças de inércia. Assim, a gravidade não apenas pode ser eliminada por um referencial em queda livre, mas pode ser criada por uma aceleração. A ideia central de Einstein foi tratar a força gravitacional como uma força inercial.

Experimento de pensamento com uma nave espacial

Considere um astronauta confinado em um foguete sem janelas nem meios de contato com outras pessoas. Ele possui uma bola, um cronômetro e uma fita métrica para realizar alguns experimentos simples. Vamos considerar quatro situações descritas abaixo e representadas pelas figuras abaixo:

- **Situação 1**: o foguete é colocado no espaço em um local infinitamente distante de quaisquer outros corpos. Os seus motores são ligados, fazendo-o acelerar para cima com aceleração constante de módulo g. Quando o astronauta abandona a bola, ele percebe que ela cai em direção ao solo como aceleração g.

- **Situação 2**: os motores do foguete são desligados, então ele segue com velocidade constante. Quando o astronauta abandona a bola, ela permanece parada em relação a ele.

- **Situação 3**: o foguete é trazido para superfície da Terra. Desprezando os efeitos de rotação, um corpo abandonado irá cair em direção ao solo da nave com aceleração constante de módulo g.

- **Situação 4**: por último, o foguete é abandonado caindo livremente sob ação do campo gravitacional uniforme, próximo à superfície da Terra, em direção ao centro do planeta. Um corpo abandonado permanece em repouso em relação ao astronauta que também está caindo junto da nave.

Claramente, do ponto de vista do astronauta, as situações **1** e **3** são indistinguíveis. Assim como **2** e **4**. Portanto, a gravidade pode ser criada por aceleração. Vamos usar essa propriedade para traçar argumentos que nos levem aos conceitos do espaço curvo.

Exercício

Dois canhões são posicionados conforme a figura abaixo e seus projéteis são lançados simultaneamente. Determine a velocidade v_2 para que os projéteis se interceptem.

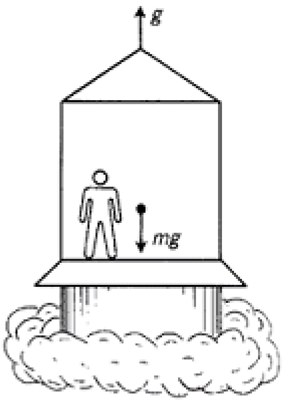


Figura 5: Situação 1

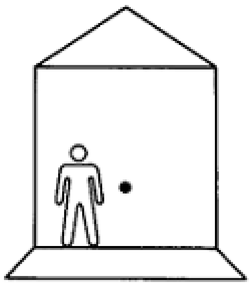


Figura 6: Situação 2

Solução

A ideia aqui é usar o princípio de equivalência, mudando para um referencial em queda livre.

Para ele, o movimento dos projetos será um MRU e o problema pode ser facilmente resolvido usando uma única lei dos senos.

$$\frac{500}{\sin 105°} = \frac{200t}{\sin 45°} = \frac{v_2 t}{\sin 30°},$$

$$v_2 = \frac{200 \cdot 1/2}{\sqrt{2}/2} = 100\sqrt{2} \approx 141 \text{ m/s}, \tag{1}$$

$$t = \frac{500 \cdot \sqrt{2}/2}{200\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}} = 5\frac{\sqrt{3}-1}{2} \approx 1,83 \text{ s}. \tag{2}$$

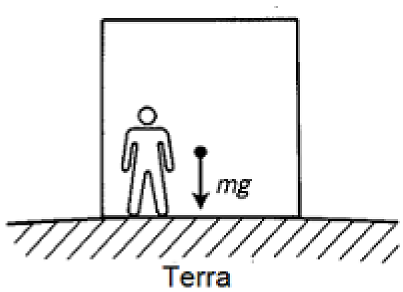


Figura 7: Situação 3

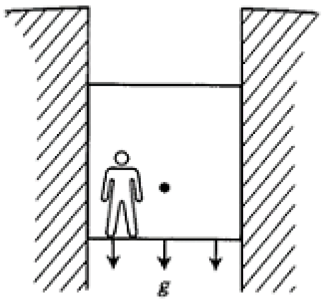


Figura 8: Situação 3

Atividade 6 - Desvio para o vermelho gravitacional

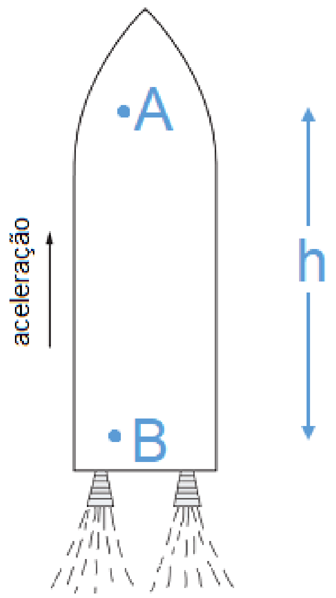
Exercício

Considere a luz viajando de baixo para o topo de um foguete em constante aceleração de módulo a, como na figura abaixo. Seja o referencial $\mathcal{S}$ no ponto A na parte inferior da nave espacial e $\mathcal{S}'$ no ponto B, na parte superior distante h. Qual é a razão entre as frequências da luz emitida por um laser em A e detectada em B?

Solução

Quando a luz sai do ponto A, consideremos o foguete com velocidade nula em relação a outro referencial (a Terra, por exemplo), e vamos chamar Δt de tempo para a luz viajar para o ponto B. Supondo a velocidade da luz muito grande, podemos desprezar a variação da posição do foguete até que ela chegue na parte superior ($\Delta h \ll h$), sendo assim:

$$\Delta t = \frac{h}{c}.$$



Nesse mesmo intervalo de tempo, o foguete acelerado terá uma velocidade igual a:

$$v = g\Delta t = g\frac{h}{c}.$$

Usando a equação do efeito Doppler não relativístico e supondo o módulo da velocidade do foguete $v \ll c$, temos:

$$f' = f\frac{c-v}{c}.$$

Assim, teremos:

$$f' = f\frac{c - g\frac{h}{c}}{c} = f\frac{c^2 - gh}{c^2} \Rightarrow f' = f\left(1 - \frac{gh}{c^2}\right).$$

Identificando o potencial gravitacional $\Phi = gh$ próximo à superfície da Terra, temos que o período T' medido por $\mathcal{S}'$ em relação ao período T de $\mathcal{S}$ vale[2]:

$$T' = \frac{1}{f'} = \frac{1}{f\left(1 - \frac{\Phi}{c^2}\right)} = T\left(1 - \frac{\Phi}{c^2}\right)^{-1} \Rightarrow T' \approx T\left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right).$$

Debate

Assim, $\mathcal{S}'$ medirá um período maior para o sinal, dessa forma teremos uma frequência menor nesse referencial, por isso esse efeito é chamado de desvio para o vermelho gra-

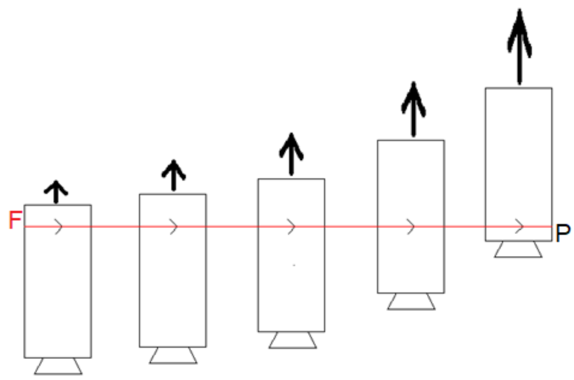
[2]Usando a aproximação de Bernoulli $(1+x)^n \approx 1 + nx$, $x \ll 1$.

vitacional (*gravitational redshift*). De outra maneira, podemos imaginar que esse sinal emitido possa ser usado para quantificar o tempo, por exemplo, dois sinais consecutivos são emitidos em um segundo. Assim quando um receptor está num potencial gravitacional maior que o emissor, os sinais são recebidos mais devagar do que são emitidos. Já quando um receptor está num potencial gravitacional menor que o emissor, os sinais são recebidos mais rapidamente do que são emitidos. Concluímos assim que os relógios **passam mais devagar** quando afetados pelo campo gravitacional mais intenso. Cabe ressaltar que isso já foi testado na década de 1960 com o experimento de Pound-Rebka.

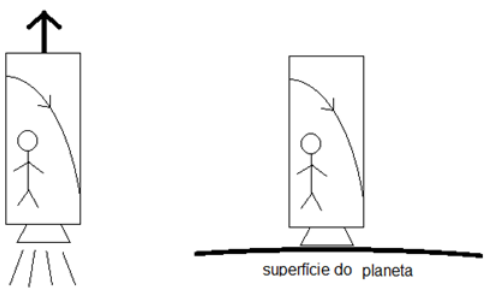
Atividade 7 - Deflexão da luz

Experimento de pensamento com o foguete

Considere um foguete em acelerado para cima, isolado de outras interações gravitacionais, com uma fonte de luz F, emitindo um raio de luz na direção horizontal. Pergunte aos alunos qual será a trajetória para um observador dentro e outro fora do foguete? Para o observador $\mathcal{S}'$, dentro do foguete, a luz viaja em linha reta e sai pelo orifício P.



Entretanto para um observador externo $\mathcal{S}$, a luz viaja com velocidade horizontal constante e está *acelerada* na vertical, descrevendo portanto um lançamento horizontal (parábola). Pelo princípio de equivalência, o que podemos afirmar? Se o foguete estiver na superfície da Terra, por exemplo, sob ação de um campo gravitacional uniforme $\vec{g}$, os efeitos observados pelos observadores serão os mesmos. Portanto, há deflexão dos raios luminosos num campo gravitacional.



A existência da deflexão da luz exigida pela teoria foi comprovada fotograficamente durante o eclipse solar em maio de 1919 por duas expedições organizadas pela *Royal As-*

tronomical Society, uma delas à África e outra ao Brasil, sob a direção dos astrônomos Eddington e Crommelin.

Exercício 1

Considere o trajeto de um raio luminoso sob ação do campo gravitacional terrestre na superfície $g = 10$ m/s^2 . Após percorrer 1 km, qual será o seu desvio vertical devido à ação gravitacional? Considere a velocidade da luz como $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

Solução 1

Nesse método para calcular a deflexão da luz, assumimos, baseado na óptica Newtoniana, que a luz é um corpúsculo que sofre ação gravitacional como qualquer outro corpo, independente da sua massa. Apesar de sabermos que essa abordagem está **incorreta**, ela servirá para ilustrarmos as ideias iniciais sobre a deflexão da luz e depois ficará clara como ela se relacionará com a TRG. Essa aceleração gravitacional fará com que a luz adquira velocidade vertical devido à atração gravitacional. Portanto há uma deflexão no percurso desse raio luminoso, que pode ser calculado pela usando as equações cinemáticas do MRU e MRUV.

Cálculo do tempo de viagem da luz pelo percurso horizontal:

$$\Delta t = \frac{d}{c} = \frac{1 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^8} \approx 0,3 \cdot 10^{-5} \text{ s.}$$

Cálculo da altura percorrida no lançamento oblíquo sob ação do campo gravitacional:

$$h = \frac{gt^2}{2} = \frac{10 \cdot \left(0,3 \cdot 10^{-5}\right)^2}{2} \approx 0,3 \cdot 10^{-11} \text{ m.}$$

Observe que o desvio é muito pequeno, menor que um átomo de hidrogênio, portanto muito difícil de ser detectado para um percurso pequeno da luz.

Exercício 2

Aplicando um raciocínio análogo ao da questão anterior, calcule o ângulo de deflexão gravitacional de um raio luminoso que, propagando-se no vácuo, tangencia um corpo esfericamente simétrico de raio R e massa M, percorrendo uma distância muito maior que que R. Estime o resultado para o desvio próximo ao Sol.

Dados do Sol: massa: $2 \cdot 10^{30}$ kg e raio: $7 \cdot 10^{5}$ km

Solução 2

A deflexão ϕ no percurso desse raio luminoso, pode ser calculada pela razão entre a velocidade vertical *adquirida* pela interação gravitacional e a velocidade da luz na horizontal assim:

$$\tan \phi = \frac{v_y}{c}.$$

Usando a aceleração gravitacional, temos:

$$a = \frac{GM}{r^2}.$$

onde r é a distância do corpúsculo luz até o centro do Sol.

Somente a componente vertical será levada em consideração, pois na horizontal o ganho de velocidade será desprezado e a luz continuará com velocidade constante c

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} \Rightarrow v_y = \int_0^{\infty} \frac{GM}{cr^2} \cos(\theta) dy = \int_0^{\infty} \frac{GMR}{c\left(R^2 + y^2\right)^{3/2}} dy = \frac{2GM}{cR}.$$

Substituindo os dados no SI para um raio que tangencia o Sol $G = 6,7 \cdot 10^{-11}$, $M = 2,0 \cdot 10^{30}$, $R = 7,0 \cdot 10^{8}$ e $c = 3,0 \cdot 10^{8}$, temos:

$$\tan \frac{v_y}{c} = \tan \frac{2GM}{c^2 R} \Rightarrow \tan \phi = 0,87".$$

Debate final

Esse resultado é metade do valor previsto pela TRG, comprovada pelo Eclipse de 1919. Você saberia dizer onde está o erro na abordagem Newtoniana? A curvatura do espaço deve ser trazida à tona, pois usamos a geometria Euclidiana. Aqui começamos a conectar os efeitos geométricos aos gravitacionais.

3 Aula 03

Nessa aula, vamos fornecer as ferramentas matemáticas para uma melhor compreensão da TRG. .

Atividade 9 - Teoria da Relatividade Restrita

Recomenda-se ao professor a leitura do Apêndice **??** deste trabalho.

Vamos novamente usar um experimento de pensamento e a constância da velocidade da luz para demonstrar um dos resultados mais surpreendentes da física moderna: *a dilatação temporal*. Caso os alunos já tenham estudado esse tópico, pode-se passar para a Atividade 10.

Tempo previsto para a atividade: 35 min

Postulados da Relatividade Restrita

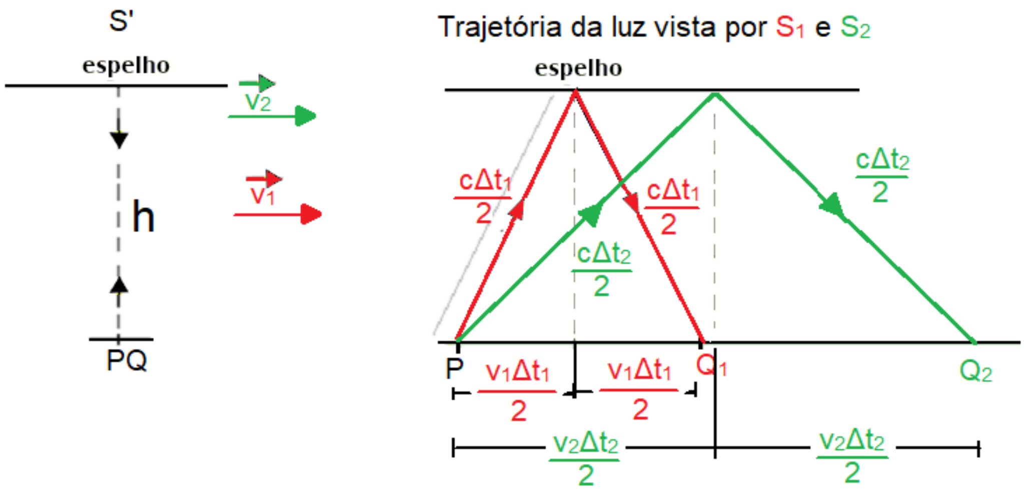
Postulado 1: Todas as leis da física são as mesmas em todos os sistemas de referência inercial, ou seja, não existe referencial preferencial. Esse postulado é uma extensão dos princípios da mecânica Newtoniana: não existe um experimento que consiga distinguir um referencial *parado* de outro *andando* com velocidade constante.

Postulado 2: A velocidade da luz no vácuo é a mesma todos os referenciais. Esse princípio pode ser entendido como uma extensão do **Postulado 1**, pois a velocidade da luz (c) pode ser derivada das equações do eletromagnetismo de Maxwell, que é uma lei da física.

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Relógio de luz

Imagine um trem que viaja com velocidade horizontal constante de módulo v. Dentro dele, existe um relógio de luz, composto por uma fonte no chão do trem e um espelho plano no teto a uma distância h. O nosso *segundo* será o tempo que o raio de luz leva para sair da fonte, ser refletido pelo espelho e retornar para um detector no chão.



Para um observador solidário ao trem, a luz apenas sobe desce fazendo um percurso igual a $2h$ na velocidade da luz c, portanto o *segundo* para ele será:

$$\Delta t' = \frac{2h}{c}$$

Para o observador em repouso fora do trem, a luz fará um percurso inclinado, mas ainda com velocidade c. Dessa forma, o *segundo* deve ser calculado usando o teorema de Pitágoras:

$$\left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 - \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 = h^2 \Rightarrow \Delta t = \frac{2h}{\sqrt{c^2 - v^2}} == \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \left(\frac{c}{v}\right)^2}}$$

Observe que $\Delta t \geq \Delta t'$, então os referenciais medem intervalos de tempo diferentes entre os dois eventos.

Intervalo espaço-temporal

Se calcularmos o tempo para dois referencias que veem o trem se deslocar com velocidades de módulo v_1 e v_2, podemos expressar através do Teorema de Pitágoras a medida da altura h do vagão para os referenciais $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$

$$\left(\frac{c\Delta t_1}{2}\right)^2 - \left(\frac{v_1\Delta t_1}{2}\right)^2 = \left(\frac{c\Delta t_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{v_2\Delta t_2}{2}\right)^2 = h^2 \Rightarrow$$

$$(c\Delta t_1)^2 - (v_1\Delta t_1)^2 = (c\Delta t_2)^2 - (v_2\Delta t_2)^2 = 4h^2.$$

Finalmente, podemos escrever que $\Delta x = v\Delta t$ e expressar o invariante espaçotemporal como:

$$(c\Delta t_1)^2 - (\Delta x_1)^2 = (c\Delta t_2)^2 - (\Delta x_2)^2$$

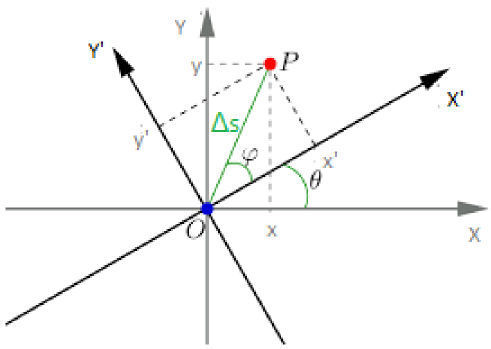
Observe que esse valor é constante, também chamado de **elemento de linha** e independente do referencial. Ele será utilizado para calcularmos as geodésicas nas diferentes geometrias.

Atividade 10 - Geometria não Euclidiana

Recomenda-se ao professor a leitura do Apêndice ?? deste trabalho.

Tempo previsto para a atividade: 25 min

Vamos agora descrever como rotular os pontos em duas diferentes coordenadas e como calcular a distância entre dois pontos usando o teorema de Pitágoras. Pergunte aos alunos o que acontece com a distância caso os eixos sejam rotacionados. Eles devem perceber que a distância permanece invariada por essa transformação.



O mesmo princípio vale se estivermos sobre uma superfície esférica, em vez de plana. Considere uma esfera em coordenadas (θ, ϕ) conforme. O seu elemento de linha espacial dS^2, com $r = R$ constante, será dado por:

$$dS^2 = R^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2).$$

Vamos agora calcular a razão entre o perímetro da circunferência de raio r pelo seu raio nessa geometria esférica. Colocando o centro da circunferência no polo norte da esfera, O perímetro C será a integral de dS em torno do círculo de θ constante, ou seja, $\theta = \Theta$.

$$C = \oint dS = \int_0^{2\pi} R\text{sen}\Theta d\phi = 2\pi R\text{sen}\Theta.$$

Já o raio r é a integral ao longo de qualquer curva onde ϕ é constante, portanto vale:

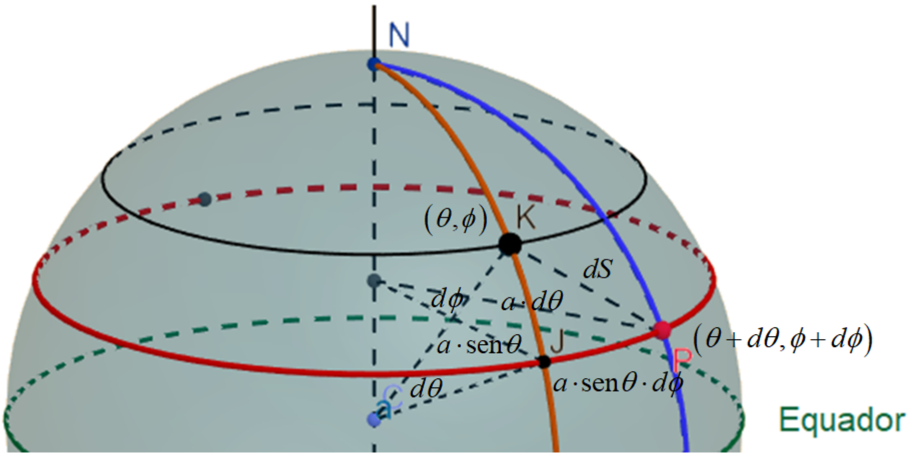
$$r = \int dS = \int_0^{\Theta} R d\phi = R\Theta \Rightarrow \Theta = \frac{r}{R}.$$

Logo,

$$C = 2\pi R \mathrm{sen}\left(\frac{r}{R}\right)$$

Quando $r \ll R$, recuperamos a relação clássica da geometria

$$C = \lim_{\frac{r}{R} \to 0} 2\pi R \mathrm{sen}\left(\frac{r}{R}\right) = 2\pi R\left(\frac{r}{R}\right) = 2\pi r$$



Atividade 11 - Coordenadas espaço-temporais

Tempo previsto para a atividade: 25 min

Observe o invariante espaço-temporal obtido pela TRR: $ds^2 = -(cdt)^2 + dx^2$. Com uma mudança de referencial, esse valor permanece o mesmo. Portanto ele será nossa *distância* invariada pela *rotação* da geometria. Porém, observe que o tempo faz parte da rotulação dos pontos.

Se generalizarmos o termo para três dimensões espaciais e uma temporal, teremos:

Cartesianas: $ds^2 = -(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$

Esféricas: $ds^2 = -(cdt)^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2\theta d\phi^2$

A mudança da componente temporal já foi observada no desvio para o vermelho gravitacional com alteração do tempo pelo potencial gravitacional. Aplicando esse resultado na componente temporal, temos a mudança dessa geometria por ação da gravidade:

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

onde $\Phi = -\frac{GM}{r^2}$ é o potencial gravitacional. Nota-se que no resultado da deflexão da luz utilizando o modelo Newtoniano não há nenhuma previsão na alteração na componente espacial, mas há na temporal.

Contudo na TRG, existe uma alteração também na componente espacial provocada pelas massas. Um exemplo é o campo gravitacional produzido por uma distribuição esférica de matéria, chamada métrica de Schwarzschild, com a seguinte forma:

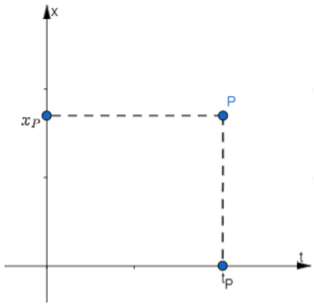
$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right)\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right).$$

Observe que a componente espacial também é modificada pelo potencial gravitacional. Por enquanto apenas demos o resultado sem nenhuma justificativa.

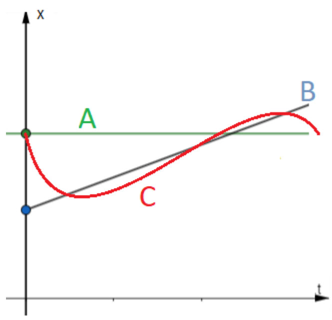
Atividade 12 - Diagramas espaço-temporais

Tempo previsto para a atividade: 15 min

Para conseguirmos expressar os eventos usando a geometria, vamos descrever um sistema quadridimensional (t, x, y, z), que será representado por um diagrama de espaço-tempo. Os eventos serão representados por um ponto P dizendo onde x_P e quando t_P ele ocorreu.



Uma partícula descreverá sua trajetória espaço-temporal por uma linha de mundo. Pergunte aos alunos o que significa a inclinação da reta tangente à cada linha de mundo. Assim como na cinemática tradicional, a inclinação da reta nos fornecerá o valor da velocidade.



A linha de mundo A representa uma partícula em repouso.
A linha de mundo B representa uma partícula em movimento uniforme.
A linha de mundo C representa uma partícula em movimento oscilatório.

Atividade 13 - Cones de Luz

Tempo previsto para a atividade: 35 min

O elemento de linha, (ds^2), pode assumir três tipos de valores: positivo, negativo ou nulo, representados por:

$$ds^2 > 0 \qquad \text{tipo tempo,}$$
$$ds^2 = 0 \qquad \text{tipo nulo,}$$
$$ds^2 < 0 \qquad \text{tipo espaço.}$$

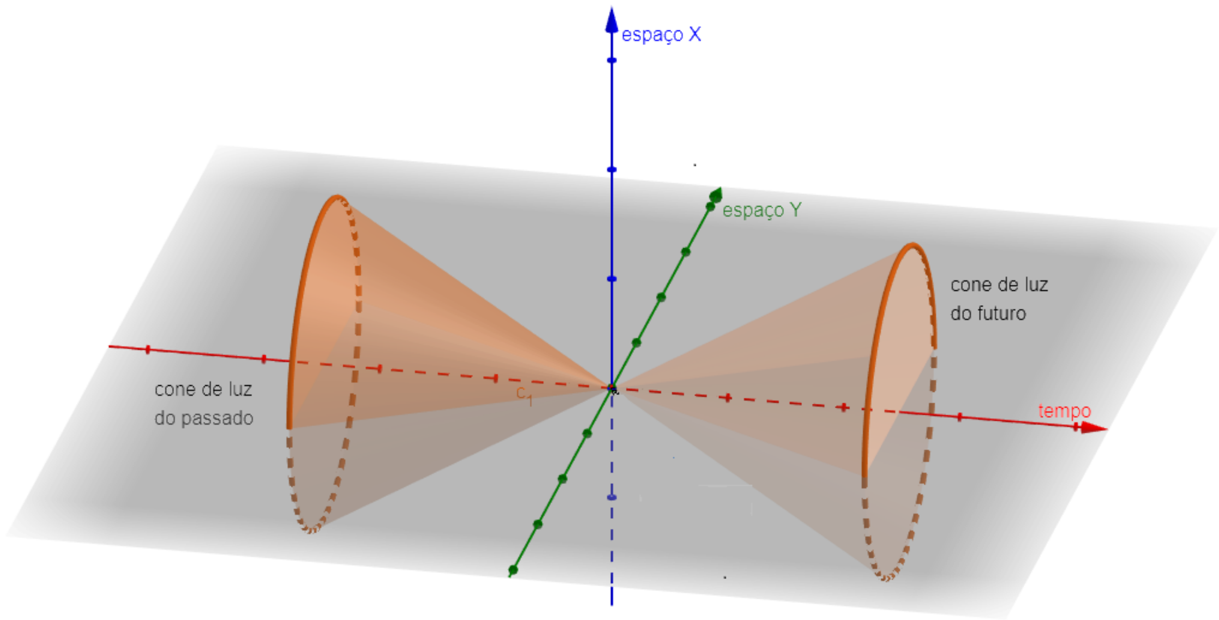
A constância da velocidade da luz é o fator mais importante sobre o espaço-tempo na teoria da relatividade restrita. Observe que o valor de ds^2 é nulo quando o *objeto* se move com velocidade $v = c$:

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 = -c^2dt^2 + (vdt^2)^2 = -c^2dt^2 + (cdt)^2 \Rightarrow ds^2 = 0.$$

Esta propriedade pode ser expressa geometricamente nos diagramas espaço tempo com linhas inclinadas de 45°. Já se colocarmos com duas dimensões espaciais xy, teremos os *cones de luz.*

Se você estiver no ponto **presente**, os eventos no interior do cone **futuro** representam todos os eventos que você consegue alcançar com um sinal físico, ou seja, viajando até eles em linhas do *tipo tempo* ou *tipo nulo*. Para esse mesmo ponto inicial, o cone do **passado** contém todos os eventos que podem chegar ao presente, ou seja, ele contém todos os eventos que podem afetar o presente. A região fora do cone não tem uma relação de causalidade com o presente, pois não pode fisicamente alcançá-lo.

Para termos o cone de luz, não precisamos que a luz esteja presente. Os cones mapeiam as trajetórias que a luz teria se partisse do **presente**. Para linhas do *tipo tempo*, o objeto



se move com velocidade menor que a da luz, ou seja, possuem linhas de mundo com inclinação menor que 45° e sempre interior ao cone. Essas linhas representam trajetória de um objeto real, pois sua velocidade é sempre menor que a da luz. Para linhas do *tipo espaço*, o objeto teria que viajar com velocidade superior à da luz, o que é impossível frente à relatividade restrita.

4 Aula 04

Atividade 13 - Tópicos Relevantes

Cabe aqui formalizarmos alguns conceitos dos quais já comentamos brevemente nas aulas anteriores e apresentar novas formulações para fecharmos nessa última aula acerca de TRG.

Tempo previsto para a atividade: 30 min

Geodésica: O princípio para determinarmos o movimento de uma partícula livre num espaço-tempo curvo é o *Princípio Variacional*, cujo enunciado pode ser descrito como "a trajetória seguida por uma partícula livre entre dois pontos do tipo tempo extremiza o tempo próprio entre eles". Essa extremização dará origem ao *menor caminho* entre dois pontos, denominado geodésica. Pergunte aos alunos qual é o menor caminho entre dois pontos no espaço Euclidiano. Claramente é uma linha reta. E na geometria esférica, um arco de grande círculo como já apresentamos na Aula 01.

Princípio da Correspondência: Qualquer nova teoria tem que ser consistente com as teorias anteriores dentro do seu limite de validade. Assim a relatividade geral deve levar à relatividade restrita na ausência de gravidade, quando G tende a 0 e à gravitação newtoniana em campos gravitacionais fracos e com velocidades pequenas quando comparadas a da luz, ou seja, quando c tende para infinito. Para ambas as condições satisfeitas, a mecânica clássica deve prevalecer.

Quando levamos essa métrica $ds^2 = -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ para o limite da mecânica clássica, não derivamos a lei da gravitação Newtoniana. No entanto, quando aplicamos um termo modificando a componente espacial, a lei do inverso do quadrado da distância é obtida. Assim, mesmo que não apresentemos os resultados matemáticos, vemos que tem que existir uma deformação também no espaço causada pelo potencial gravitacional Φ, cuja origem é na *massa*.

Equação de Einstein: A equação de Einstein governa a geometria do espaço-tempo curvo, sendo a equação básica da relatividade geral [...] Ela é o equivalente das equações de Maxwell para o eletromagnetismo. Ela relaciona a curvatura do espaço-tempo com sua fonte (só falamos de massa nesse trabalho, mas também pode ser a energia) em um conjunto de dez equações diferenciais de segunda ordem não lineares e não independentes, o que torna sua solução muito complicada.

$$\mathbf{G} = \frac{8\pi G}{c^4}\mathbf{T},$$

onde $\mathbf{G}$ é o tensor de curvatura, associado com a estrutura geométrica do espaço-tempo. Essa grandeza diz qual será a métrica do espaço. $\mathbf{T}$ é o tensor de energia-momento, que depende da distribuição de matéria do universo.

Atividade 14 - Desvio para o vermelho gravitacional

Nós já apresentamos a conta do desvio para o vermelho usando o efeito Doppler na Aula 02. Agora vamos usar a métrica de Schwarzschild para mostrar que ela também deriva o mesmo resultado.

Tempo previsto para a atividade: 30 min

Consideremos sinais a propagarem-se no eixo x emitidos a partir de um ponto A em x_A e recebidos em por um ponto B em x_B. Note que, como em um espaço-tempo curvo, a linha de mundo do raio de luz não será mais uma reta com 45° de inclinação. As linhas de mundo dos sinais emitidos terão a mesma forma pois a geometria não depende do tempo. A distância temporal entre dois sinais consecutivos será Δt, porém o tempo próprio medido em x_A e x_B serão diferentes entre si, pois $ds^2 = -c^2 d\tau^2$, onde $d\tau$ é o intervalo infinitesimal de tempo próprio. Para A e B, temos que $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$ de modo que o tempo próprio para a emissão usando a métrica de Schwarzschild será:

$$\Delta\tau = \left(1 + \frac{2\Phi(x)}{c^2}\right)^{1/2} \Delta t \approx \left(1 + \frac{\Phi(x)}{c^2}\right) \Delta t.$$

Relacionando as emissões nos pontos x_A e x_B, teremos:

$$\frac{\Delta\tau_B}{\Delta\tau_A} \approx \frac{\left(1 + \frac{\Phi(x_B)}{c^2}\right)\Delta t}{\left(1 + \frac{\Phi(x_A)}{c^2}\right)\Delta t} \approx \left(1 + \frac{\Phi(x_B)}{c^2} - \frac{\Phi(x_A)}{c^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Delta\tau_B \approx \left(1 + \frac{\Phi(x_B)}{c^2} - \frac{\Phi(x_A)}{c^2}\right)\Delta\tau_A.$$

Observe que recuperamos a equação derivada pelo efeito Doppler.

Atividade 15 - Buraco Negro

Tempo previsto para a atividade: 40 min

Aqui vamos debater com os alunos sobre como surgem os buracos negros. Eles surgem pela *morte* de uma estrela (morte aqui significa o fim do ciclo de fusão nuclear no interior de uma estrela). Se a estrela tiver massa suficiente, haverá um momento de desequilíbrio entre a força gravitacional e as forças de pressão da matéria dentro da estrela. Há, portanto, um colapso gravitacional com a criação de um buraco negro. Com isso, queremos acabar com a ideia equivocada divulgada de que os buracos negros são objetos que sugam tudo para o seu interior. Para verificar se eles entenderam essa ideia, pergunte o que aconteceria com a órbita da Terra e demais planetas do sistema solar se o Sol se transformasse subitamente em um buraco negro. A resposta esperada é que nada aconteceria. A órbita é idêntica. Ou seja, o buraco negro não passa de uma estrela apagada de grande densidade.

É comum nos livros de relatividade o uso de unidades onde $G = 1$ e $c = 1$. Estas são chamadas de unidades geometrizadas. Nelas as equações da TRG tornam-se mais simples. A métrica de Schwarzschild pode ser simplificada como:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2\right).$$

Note que nessas unidades M tem dimensão de comprimento.

Observe que a métrica possui dois pontos de singularidade, pontos no sistema de coordenadas em que a métrica não é definida e diverge indo para infinito: $r = 0$ e $r = 2M$. No caso de $r = 2M$ é possível eliminar a singularidade por meio de uma transformação adequada de coordenadas. Essa região é chamada de *horizonte de eventos* e a distância r é chamada de raio de Schwarzschild r_s. A estrutura de cones de luz nas proximidades de um horizonte de eventos é mostrada na figura abaixo:

Note que o cone de luz tangencia a superfície $r_s = 2M$ e o interior do cone de luz futuro não permite mais que um observador saia desta superfície daí o nome horizonte de eventos. De outro modo, tudo aquilo que cai dentro do horizonte de eventos é *sugado* e nem a luz pode escapar desta interação gravitacional. Em um paralelo com a gravitação Newtoniana, o horizonte de eventos seria a região do espaço cuja velocidade de espace é igual a da luz, cerca de 300.000 km/s. Já para $r = 0$ não é possível eliminar a singularidade e ainda não conhecemos a física no interior dos buracos negros, mas devido ao horizonte de eventos, estamos isolados do que ocorre no interior.

Cálculo do raio do horizonte de eventos de um buraco negro: Curiosamente este é mesmo raio ($r_s = 2M$) calculado por Michell e Laplace como sendo o raio de uma estrela de massa M de modo que nem a luz consiga escapar da atração do seu campo gravitacional. Vamos usar a equação da velocidade de escape e determinar esse raio:

$$v_{\text{escape}} = c = \sqrt{\frac{2GM}{r_s}} \Rightarrow r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

Atividade 16 - Imagem do Buraco Negro

Nessa atividade, vamos mostrar as ideias que levaram à primeira imagem de um buraco negro. Para isso, passe o vídeo do Canal Veritasium: Como Entender a Imagem de um Buraco Negro `https://youtu.be/zUyH3XhpLTo`. O vídeo tem uma explicação excelente sobre a imagem e não necessita muito da interrupção do professor. Ele também pode ser passado como atividade para casa.

Tempo previsto para a atividade: 20 min

Atividade 17 - Velocidade de Dobra Espacial

Viajar com velocidade superior a da luz é um tema muito difundido em ficção científica. O artigo do físico mexicano Miguel Alcubierre de 1994 traz a abordagem matemática que poderia tornar esse sonho realidade. Vamos analisar qual deveria ser a métrica espaçotemporal para obtermos a chamada velocidade de dobra espacial.
Tempo previsto para a atividade: 30 min

A figura mostra o diagrama espaço-tempo para essa métrica.

Observe que dentro da região da bolha onde o espaço é curvo, os cones de luz estão inclinados em relação aos usuais 45°. Outra característica surge se considerarmos duas estações espaciais estacionárias A e B e uma nave se deslocando entre esses pontos num tempo $T < D$. Para os observadores nas estações, onde o espaço-tempo é plano, a nave se deslocou com velocidade aparentemente maior que a da luz. No entanto, o espaço-tempo é curvo, e a linha de mundo da nave é sempre interior aos cones de luz, que estão desviados. Ou seja, a nave está sempre com velocidade menor que a da luz no seu referencial.

"Poderia então uma civilização avançada construir uma espaçonave que criaria um espaço-tempo curvo como o da figura? [...] ele [espaço-tempo de Alcubierre] requer matéria ou campos com densidade de energia negativa. Todos os campos clássicos [...] possuem densidade de energia positiva. A mecânica quântica permite densidade de energia negativa, mas a física está longe de entender se ela pode ser aproveitada dessa forma."

Atividade Final - Questionário

Na tentativa de avaliar se os objetivos das aulas foi atingido, use um questionário online feito pela plataforma do GoogleForms, acesse pelo link `https://forms.gle/aRxHYY9LRSSDnhqr5`. Ele deve ser passado para casa e deve levar de 15 a 25 min para os alunos responderem todas as questões.