UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Física
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física
Mestrado Profissional em Ensino de Física
Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física

MNPEF

Velocidade instantânea: uma proposta de ensino inspirada em Galileu Galilei

Glaucemar Vieira Silva

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Orientadores:
Penha Maria Cardozo Dias
Carlos Eduardo Aguiar

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2020

Velocidade instantânea: uma proposta de ensino inspirada em Galileu Galilei

Glaucemar Vieira Silva

Penha Maria Cardozo Dias
Carlos Eduardo Aguiar

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Aprovada por:

Profa. Penha Maria Cardozo Dias (Presidente)

Profa. Mariana Faria Brito Francisquini

Profa. Elika Takimoto

Profa. Daniela Szilard Le Cocq D'Oliveira

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2020

FICHA CATALOGRÁFICA

S586v Silva, Glaucemar Vieira

Velocidade instantânea: uma proposta de ensino inspirada em Galileu Galilei / Glaucemar Vieira Silva. – Rio de Janeiro: UFRJ/IF, 2020.

ix, 104 f. : il. ; 30 cm.

Orientadores: Penha Maria Cardozo Dias; Carlos Eduardo Aguiar.

Dissertação (mestrado) – UFRJ / Instituto de Física / Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, 2020.

Referências Bibliográficas: f. 102-104.

1. Ensino de Física. 2. Velocidade instantânea. 3. Galileu Galilei. I. Cardozo Dias, Penha Maria. II. Aguiar, Carlos Eduardo. III. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Física, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física. IV. Velocidade instantânea: uma proposta de ensino inspirada em Galileu Galilei.

Aos meus pais, Maria da Graça e Pedro, *in memoriam*, com todo amor e gratidão.

Agradecimentos

Aos meus orientadores, Penha e Carlos Eduardo, pela orientação, compreensão e dedicação. Obrigada por acreditarem em mim, pelas palavras (até as veementes) de apoio, pelo incentivo e pela presença nos momentos difíceis. Tenho certeza que não conseguiria chegar neste ponto sem apoio de vocês. Para mim, serão eternamente meus mestres e amigos.

A minha querida Melissa Schmidt, pelo incentivo e ajuda. Já teria desistido sem você. Muito obrigada!

Aos meus familiares, amigos e namorado por sempre acreditarem em mim.

A Teresa Galhardo pelo apoio durante a realização deste trabalho.

Aos colegas do mestrado pelo companheirismo. Principalmente às minhas queridas amigas, Bruna Araújo e Gabrielle Aragão, por tornarem mais fácil essa fase do mestrado.

Aos meus queridos alunos que participaram desse trabalho. Vocês são os melhores alunos. Amo vocês.

Aos professores que contribuíram para minha formação. Em especial, aos professores Marcos Gaspar, Hugo de Luna, Deise Vianna e Marta Barroso.

Ao amigo Rodrigo Machado pela ajuda na aplicação desta dissertação

Ao Ercilio Vargas pela ajuda na construção do experimento.

Aos secretários do curso, Dilma Santos e Gustavo Rubini, por toda a ajuda e orientação.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

Velocidade instantânea: uma proposta de ensino inspirada em Galileu Galilei

Glaucemar Vieira Silva

Orientadores:
Penha Maria Cardozo Dias
Carlos Eduardo Aguiar

Resumo da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

A velocidade instantânea é definida pelo limite de uma sucessão de velocidades médias, na qual o tempo de percurso e a distância se tornam cada vez menores. Estudantes do ensino médio, contudo, mostram dificuldade em entender esse processo de limite e associá-lo a um único ponto, o que para eles significaria dividir zero por zero. Entretanto, os filósofos mertonianos, medievais, foram capazes de definir velocidade instantânea sem utilizar o conceito matemático de limite. Nesta dissertação é proposto um velocímetro inspirado em figuras no fólio 163v de Galileu Galilei, em que ele aplica a definição mertoniana à queda dos corpos. O velocímetro consiste de um plano inclinado continuado por um plano horizontal. Com ele é possível obter a velocidade (instantânea) com que um corpo chega ao pé do plano inclinado; pela definição mertoniana, a velocidade nesse ponto é igual à velocidade com que o corpo se move uniformemente sobre o plano horizontal. Uma proposta de ensino do conceito de velocidade instantânea é apresentada baseada na definição mertoniana e no velocímetro "galileano". Aplicações da proposta em duas escolas do ensino médio são relatadas.

Palavras chave: Ensino de Física, Velocidade instantânea, Galileu Galilei.

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2020

ABSTRACT

Instantaneous speed: a teaching proposal inspired in Galileo Galilei

Glaucemar Vieira Silva

Supervisors:
Penha Maria Cardozo Dias
Carlos Eduardo Aguiar

Abstract of master's thesis submitted to Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, in partial fulfillment of the requirements for the degree Mestre em Ensino de Física.

Instantaneous speed is defined as the limit of a succession of mean speeds, in which both distance and time become smaller and smaller. High school students have difficulties to understand this limit proccess and to associate its result to a single point in space and time; for them, this would mean a division of zero by zero. The medieval mertonian philosophers, however, managed to find a definition of instantaneous speed which did not involve the mathematical concept of limit. In this dissertation it is proposed a speedometer inspired by figures in Galileo Galilei's folio 163*v*, where he applies the mertonian definition to the fall of bodies. The speedometer consists of an incline followed by a horizontal plane. Using it one can obtain the (instantaneous) speed at the bottom of the incline; according to the mertonian definition, the speed at this point is the same as in the uniform motion along the horizontal plane. A proposal for teaching the concept of instantaneous speed, based on the mertonian definition and the "galilean" speedometer, is presented. Applications of this proposal in two high schools are reported.

Keywords: Physics education, Instantaneous speed, Galileo Galilei.

Rio de Janeiro
February, 2020

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Esta dissertação consiste em uma proposta para ensinar o conceito de velocidade instantânea a alunos do ensino médio.

O conceito de velocidade instantânea é difícil até mesmo para estudantes em estágio de instrução mais avançado. Dificuldades de aprendizagem encontradas e descritas na literatura estão no capítulo 2. A maior dificuldade é que o conceito de velocidade instantânea envolve um processo de limite de uma sucessão de velocidades médias; é comum ouvir dos estudantes que uma velocidade instantânea não pode existir, pois velocidade é dada pela razão de uma distância finita por um intervalo de tempo, também finito.

No século XIV, os filósofos medievais, do Colégio de Merton, em Oxford, foram capazes de dar ao conceito de velocidade instantânea uma definição precisa; no entanto, não tinham um conceito matemático de limite. Cerca de duzentos anos depois, Galileu Galilei usa essa definição, junto com outros fundamentos:

1. Proporções arquimedianas para o movimento uniforme. Essas proporções relacionam distância e tempo, no caso em que a velocidade é fixa, e distância e velocidade, no caso em que o intervalo de tempo é fixo;

2. Regra da dupla distância (RDD). Introduzida pelos mertonianos, relaciona distâncias percorridas em um movimento uniforme com distâncias percorridas em um movimento uniformemente variado, é uma forma simplificada do teorema da velocidade média.

3. Os gráficos mertonianos que representam o movimento uniforme e o movimento uniformemente variado.

Com essas ferramentas, ele demonstra as leis do movimento uniformemente acelerado, $v \propto t$, $v^2 \propto D$ (equivocadamente chamada, nos livros didáticos de ensino médio, de "equação de Torricelli") e $D \propto t^2$. A concepção medieval do movimento e seu uso por Galileu estão no capítulo 3.

Como esses pensadores conseguiram contornar o processo formal de limite, seus métodos podem sugerir uma forma alternativa de ensino do conceito de velocidade instantânea. Em particular, Galileu explora essa definição, aplicando-a à queda dos corpos, o que os medievais não fizeram. Uma figura no fólio 163*v*, de Galileu, basicamente um plano inclinado com uma extensão horizontal, pode ser interpretada — pelo leitor moderno — como uma concretização da definição medieval: de acordo com Galileu, o movimento no plano horizontal é feito com velocidade uniforme, de módulo igual à velocidade que o corpo adquire ao atingir o pé do plano inclinado. Isso associa um movimento uniforme à velocidade instantânea, o que o processo de limite faz ao associar a velocidade à linha tangente nos gráficos distância versus tempo. Além disso, a figura de Galileu inspira a construção de um "velocímetro" para medir a velocidade no pé do plano, o que permite atribuir um significado operacional ao conceito de velocidade instantânea. Para um estudante que teria dificuldade em interpretar a definição matemática dessa velocidade por não ter aprendido noções de cálculo diferencial, a definição operacional é uma alternativa.

A proposta didática desta dissertação está apresentada no capítulo 4. Foi construído o "velocímetro" acima descrito, o qual é o fundamento da proposta. Embora Galileu não tivesse pensado em velocímetro (provavelmente não tinha o conceito e nem necessidade de um velocímetro), a peça será carinhosamente chamada "velocímetro galileano", ao longo desta dissertação.

A sequência didática consiste em cinco etapas ou unidades. Nas duas primeiras etapas é testada a noção de velocidade que os alunos possuem. Na terceira, os movimentos uniforme e não uniforme são definidos e representados graficamente; o material é apresentado de modo a instigar o aluno a considerar se pode existir ou não velocidade em um instante. Na quarta unidade, o conceito de velocidade instantânea é definido como os mertonianos o fizeram; então, é proposta uma atividade experimental utilizando o "velocímetro galileano". Na atividade é obtida a dependência da velocidade no pé do plano com a distância percorrida no plano inclinado ($v^2 = 2aD$); nesse ponto, os alunos devem entender que é possível falar de velocidade em um instante do movimento e não em uma extensão, como no caso da velocidade média. Para obter a dependência da velocidade com o tempo de descida é preciso usar a RDD, como Galileu fez. Na última etapa, então, os alunos fazem novos experimentos com o "velocímetro galileano" para verificar a RDD e, então, evocá-la para obter a dependência temporal da velocidade sobre o plano ($v = at$) e da distância ao longo do plano ($D = at^2/2$); assim, todas as descrições do movimento uniformemente acelerado estudadas no ensino médio são obtidas com o velocímetro galileano.

A proposta foi aplicada em duas escolas do município do Rio de Janeiro. Ambas estão descritas no capítulo 5. O material instrucional utilizado nas aplicações está no apêndice A. Uma exposição realizada durante essas aplicações está no apêndice B. O apêndice C mostra o resultado de uma proposta alternativa para medir a velocidade instantânea.

Capítulo 2

Ensino e aprendizagem da velocidade instantânea

2.1 Ensino tradicional de cinemática

O ensino da cinemática geralmente é desenvolvido discutindo inicialmente o conceito de velocidade média. Em seguida a velocidade instantânea é definida como o limite da velocidade média quando o intervalo de tempo tende a zero. A maneira como essa abordagem é realizada em alguns livros didáticos utilizados no ensino superior e médio é apresentada a seguir. Uma tentativa de expor de forma mais concreta o conceito de limite, sugerida por M. L. Rosenquist e L. C. McDermortt, também é apresentada.

2.1.1 Livros didáticos

O livro *Curso de Física Básica I—Mecânica*, de H. M. Nussenzveig (p. 23-37) apresenta o movimento uniforme como uma reta no gráfico posição versus tempo e observa que percursos iguais são descritos em intervalos de tempo iguais. Com isso, ele define a velocidade do movimento pela razão de qualquer deslocamento pelo correspondente intervalo de tempo. Em seguida, define movimento não uniforme e velocidade média em diferentes etapas do percurso. Finalmente, define a velocidade instantânea como o limite da velocidade média quando o intervalo de tempo tende a zero. O livro de Nussenzveig é dirigido ao aluno do ensino superior que simultaneamente cursa cálculo diferencial.

No ensino médio, o livro *Física—Volume I*, de A. Máximo e B. Alvarenga (p. 35-48) apresenta o movimento uniforme como sendo um movimento no qual a distância percorrida por um corpo é diretamente proporcional ao tempo gasto para percorrê-la. A constante de proporcionalidade é a velocidade desse movimento. Em seguida, introduz a representação gráfica do movimento uniforme e mostra que é uma reta, cuja inclinação representa a velocidade. Mais à frente, introduz o movimento variado e caracteriza a velocidade instantânea como aquela mostrada por um velocímetro. A velocidade instantânea é mais formalmente apresentada como $v = \Delta d/\Delta t$, sendo o intervalo de tempo Δt "o menor possível". Com muita originalidade, a velocidade média é apresentada apenas depois da velocidade instantânea.

Outro livro do ensino médio é o *Física—Ensino Médio*, de A. Gaspar (p. 36-39),que inicia definindo velocidade média. A velocidade instantânea é introduzida considerando que o intervalo de tempo durante o qual ocorre o deslocamento é "infinitamente pequeno, ou seja, quando o intervalo de tempo é um *instante*".

Finalmente, *Física—Ensino Médio—Mecânica*, de L. A. Guimarães e M. Fonte Boa (p. 5-12), inicia a discussão de velocidade apresentando-a como o deslocamento dividido pelo intervalo de tempo. Mais à frente, essa velocidade é mais precisamente caracterizada como a velocidade média do percurso. O conceito de limite necessário à definição de velocidade instantânea é discutido a partir de um exemplo concreto: a queda de um objeto do alto de um prédio. A velocidade média em diferentes trechos, cada vez menores, dessa queda — a passagem por uma janela, por exemplo — é utilizada para introduzir a velocidade instantânea. Ao final a velocidade instantânea é definida como a velocidade média "em um intervalo infinitamente pequeno". É enfatizado que o cálculo da velocidade é sempre feito pelo deslocamento *entre dois instantes* e que no caso da velocidade instantânea "esses dois instantes são tão próximos que podemos falar de velocidade *em um instante*".

2.1.2 Uma concretização do conceito de limite

Uma maneira de apresentar o conceito de limite associado à velocidade instantânea foi sugerida por Rosenquist e McDermott. A proposta do trabalho é realizar um experimento que leve os alunos a perceber que um movimento não uniforme parece cada vez mais uniforme à medida que o intervalo de tempo se torna menor e define a velocidade instantânea como a velocidade desse movimento uniforme.

O experimento consiste em um carrinho gotejador, em movimento acelerado, que marca sua posição pelas gotas que caem em intervalos de tempo iguais sobre uma fita de papel. Os alunos examinam a distância entre pontos sucessivos. Eles devem observar que ao final da fita os pontos estão mais espaçados que no início, indicando o aumento da velocidade. Entretanto, examinando trechos cada vez menores da fita, os alunos devem perceber que o espaçamento entre as gotas fica mais uniforme, ou seja, nesses trechos a velocidade é praticamente constante.

Esse precedimento está ilustrado na figura 2.1, que apresenta gráficos da posição em função do tempo para um mesmo movimento. A curva apresentada no gráfico (a) representa um movimento não uniforme. Nos gráficos seguintes o intervalo de tempo, indicado pela detalhe da figura anterior, fica cada vez menor. Em particular, no intervalo do gráfico (c) o movimento torna-se praticamente uniforme.

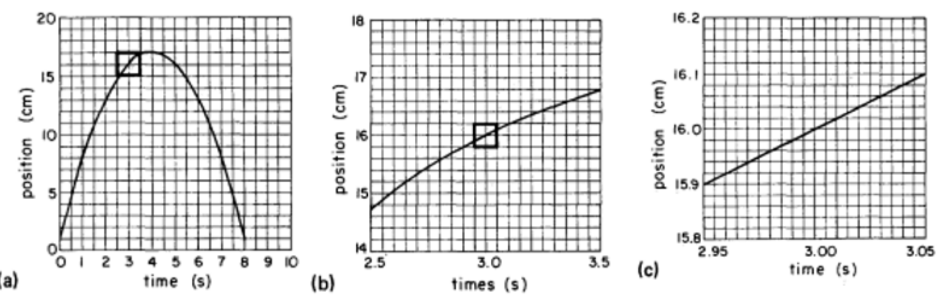


Figura 2.1: Ampliações sucessivas do gráfico de um movimento acelerado. Pode-se notar que o movimento torna-se cada vez mais uniforme à medida que o intervalo de tempo mostrado diminui. Adaptado de Rosenquist e McDermott.

O processo de aproximação de limite não é matematicamente rigoroso, porém o experimento é uma oportunidade para os alunos desenvolverem uma intuição sobre o conceito de limite. É importante perceber que nesse processo de aproximações sucessivas a velocidade instantânea emerge como a velocidade média em um intervalo finito, ainda que muito pequeno.

2.2 Dificuldades na aprendizagem de velocidade instantânea

Como descrito na seção 2.1, os livros de física do ensino médio costumam abordar o conceito de velocidade instantânea através da ideia de limite, ou seja, associam a velocidade a um percurso, ainda que "infinitamente pequeno". Entretanto, pesquisas em ensino de física mostram que essa associação cria dificuldades à aprendizagem do conceito de velocidade instantânea. Por exemplo, D. Trowbridge e L. McDermott (p. 1024) afirmam que "a interpretação da velocidade instantânea como um número referente a um único instante é um obstáculo real para muitos estudantes" e ilustram a dificuldade com o comentário de um aluno:

> Objetos não podem realmente ter velocidade por um instante; para que a velocidade seja calculada deve haver um intervalo de tempo. Por um instante, os objetos não têm velocidade, apenas posição. (p. 1024)

Trowbridge e McDermott observam que esse aluno está "ciente da necessidade de considerar uma distância finita e intervalo de tempo finito para calcular a velocidade de um objeto" e concluem:

> Os estudantes têm um problema com a extensão do conceito de velocidade em um intervalo de tempo finito ao caso de um intervalo de tempo infinitesimal. A interpretação da velocidade instantânea como um número referente a um único instante é um verdadeiro obstáculo conceitual para muitos alunos. (p. 1024)

As dificuldades na aprendizagem da velocidade instantânea criadas pelo senso comum dos alunos também são discutidas por I. A. Halloun e D. Hestenes. Por exemplo, eles observam que para os alunos:

> Os conceitos de "intervalo de tempo" e "instante de tempo" não são diferenciados. Um "instante" é considerado como um intervalo de tempo muito curto. (p. 1063)

> Velocidade é definida como uma distância dividida pelo tempo. Assim, a velocidade média não é diferenciada da velocidade instantânea. (p. 1063)

Esses artigos sugerem que as abordagens usuais do conceito de velocidade instantânea pouco contribuem para superar o senso comum (talvez até o reforcem) e acabam dificultando o entendimento dos alunos. A. B. Arons discute essa dificuldade em seu livro *Teaching Introductory Physics*:

> Eu gostaria de conhecer alguma maneira mágica para inculcar o conceito de velocidade instantânea em um aluno passivo sem exigir dele nenhum esforço intelectual. Que tal maneira provavelmente não exista é indicado pela longa história da evolução dos conceitos de movimento. Não é de forma alguma necessário desenvolver o cálculo e o conceito de "derivada", mas os estudantes devem ter a chance de encontrar a ideia de velocidade instantânea lentamente e com vários episódios de idas e vindas para reencontrá-la e reafirmá-la à medida que se prossegue no estudo da cinemática e da dinâmica. (Parte I-p. 30)

A história da física sugere uma nova "chance de encontrar a ideia de velocidade instantânea", como desejado por Arons. Aristóteles possuía um conceito de velocidade que se aplica apenas a um percurso finito. Esse conceito prevaleceu durante muito tempo, até que no século XIV filósofos medievais introduziram a ideia de velocidade instantânea, antes do cálculo diferencial ser desenvolvido. Guardada a devida distância, os alunos tendem a pensar no movimento na forma aristotélica. É concebível que a maneira como os medievais formularam o conceito de velocidade instantânea — por apresentarem uma solução, quando ferramentas do cálculo ainda não existiam, — ajude a resolver as dificuldades encontradas no ensino introdutório de cinemática. Essa formulação, apresentada nos dois próximos capítulos, é a base da proposta didática desta dissertação.

Capítulo 3

O conceito de velocidade instantânea: Galileu Galilei e os mertonianos

A pergunta “o que é movimento?” foi colocada por pensadores na Antiguidade Helênica. A palavra ‘movimento’ significava qualquer tipo de transformação, por exemplo, a transformação de uma semente em árvore e, em particular, o deslocamento, posteriormente chamado “movimento local”. Durante alguns séculos, um problema central da filosofia natural foi explicar o ‘movimento local’, classificando-o e apresentando suas causas. Por volta dos séculos IV e III a.C., Aristóteles formulou um sistema filosófico, que veio a dominar o pensamento, na Europa, a partir do século X d.C., quando os textos aristotélicos foram redescobertos, após um período político conturbado que durou cerca de 500 anos (Edward Grant).

Durante a Idade Média, a filosofia natural consistiu em interpretar os textos de Aristóteles (Grant), o que levou a reinterpretações e modificações do pensamento aristotélico. No século XIV, um grupo de filósofos do Colégio de Merton, em Oxford, hoje conhecidos como mertonianos, propôs uma nova maneira de entender o movimento e criou os conceitos de velocidade instantânea, aceleração, movimento uniforme, movimento uniformemente diforme (uniformemente acelerado), movimento diformemente diforme (Marshall Clagett, p.199-219), entre 1328 e 1350.

Aristóteles não possuía esses conceitos, mas discutiu o significado de "mais rápido". Ele fez duas afirmativas (Peter Damerow et al., p.15):

1. O mais rápido de dois corpos percorre mais espaço no mesmo tempo.

2. O mais rápido de dois corpos atravessa o mesmo espaço em menos tempo

Assim, a celeridade do corpo era entendida como uma propriedade de um percurso. No século III a.C., em *Da Espiral*, Arquimedes expressou a definição aristotélica em forma de proporções (Damerow et al.):

$$\text{se} \quad t_1 = t_2, \qquad \text{então} \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{s_1}{s_2} \tag{3.1}$$

$$\text{se} \quad s_1 = s_2, \qquad \text{então} \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{t_2}{t_1} \tag{3.2}$$

onde t, s e v representam tempo, espaço e velocidade. Arquimedes acrescentou outra proporção:

$$\text{se} \quad v_1 = v_2 \qquad \text{então} \quad \frac{s_1}{s_2} = \frac{t_1}{t_2} \tag{3.3}$$

Tanto em seus fólios, quanto em sua obra final, *Duas Novas Ciências*, Galileu usa as proporções acima. Ele acrescenta uma nova proporção para o movimento uniforme:

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{v_1}{v_2} \times \frac{t_1}{t_2} \tag{3.4}$$

Somente grandezas homogêneas podem ser comparadas, de modo que Galileu jamais poderia escrever algo como v_1/t_1; além disso, não poderia escrever algo como $s = vt$, pois usa a linguagem das proporções. Da tradição mertoniana, Galileu herda as definições cinemáticas, listadas acima, e a representação do movimento por gráficos. Segundo Carla Rita Palmerino (p.424), foi na tentativa de traçar gráficos contendo as três quantidades cinemáticas (distância, velocidade e tempo) que Galileu chegou às leis da queda dos corpos.

3.1 A concepção mertoniana do movimento (a Cinemática)

No século XIV, William of Ockham, um teólogo franciscano que também desenvolveu a lógica clássica, definiu o movimento com conceitos bem diferentes dos aristotélicos. Ele enunciou um princípio epistemológico, que ficou conhecido como Navalha de Ockham, o qual significa algo como "[...] é fútil usar mais entidades [para explicar alguma coisa], se for possível usar menos [...]" (*apud* Allan Franklin, p.44); segundo esse princípio, é suficiente entender que, no movimento local, o corpo está aqui, depois ali e nunca em dois lugares diferentes ao mesmo tempo, isto é, o movimento local consiste no mero deslocamento do corpo. Essa definição influenciou os medievais mertonianos, sendo os principais Thomas Bradwardine, William Heytesbury, Richard Swineshead e John Dumbleton.

Os mertonianos partiram da discussão do problema da intensificação e remissão das qualidades, que consiste em descobrir como qualidades se somam ou se subtraem. Para tratar o problema, introduziram dois conceitos, o de intensidade e o de extensão da qualidade. A intensidade é medida em graus; a variação da qualidade é definida pela variação do grau de intensidade ao longo da extensão da qualidade. Um exemplo desses conceitos é dado pelo caso em que a intensidade é a temperatura de um corpo e a extensão é uma linha arbitrária e imaginária sobre o corpo, ao longo da qual a temperatura pode ou não variar.

No caso do movimento local, algumas definições foram estabelecidas pelos mertonianos, como na tabela 3.1. A intensidade ou o grau de velocidade é a velocidade instantânea. Mas a extensão não teve um entendimento unívoco; alguns autores a interpretaram como a duração do movimento e outros, como a distância.

Conceito mertoniano	Conceito moderno, aproximado
Movimento	Movimento. Às vezes, celeridade.
Velocidade	Velocidade ou a celeridade. Não é a razão de duas grandezas não homogêneas.
Qualidade do movimento ou intensidade da velocidade	Velocidade sem considerar duração no tempo, No caso de movimentos não uniformes, é a velocidade instantânea.
Quantidade do movimento ou velocidade total	Velocidade em um período de tempo, medida pela distância percorrida no tempo
Velocidade instantânea	Dada pela distância que seria percorrida, em um tempo, se o ponto movesse uniformemente com o grau de velocidade com que se move, no instante considerado
Movimento uniforme	Velocidade uniforme. Definido pelo percurso de uma distância igual, em quaisquer períodos de tempos iguais.
Movimento uniformemente diforme	Aceleração uniforme. Definido pela aquisição de igual incremento de velocidade, em períodos iguais de tempo.

Tabela 3.1: Alguma nomenclatura mertoniana para o movimento local (adaptada de Clagett, p.211-212).

Essas definições tornam-se mais claras com o tratamento dado por Nicolas Oresme em *Representação Gráfica de Qualidade* (Clagett, p.347-67). Evidências textuais mostram que Oresme representou a extensão pelo tempo e associou a área à distância. Ele representou graficamente a intensidade e a extensão; a extensão da qualidade é uma linha horizontal e os graus de intensidade são linhas verticais, logo perpendiculares à linha da extensão. Uma qualidade uniforme corresponde a um gráfico retangular e uma qualidade que varia uniformemente, a um gráfico triangular, como na figura 3.1.

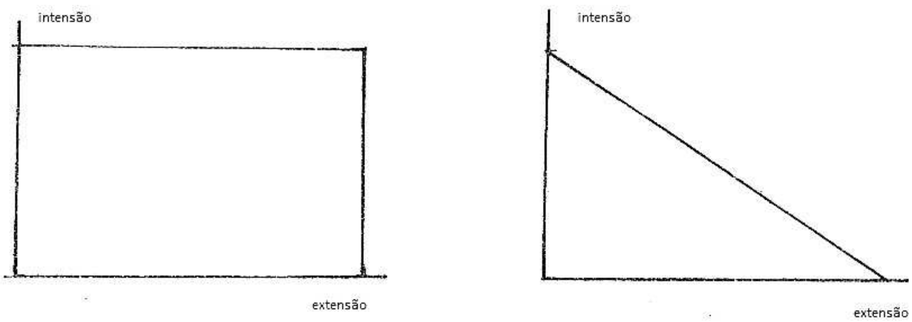


Figura 3.1: A qualidade retangular (esquerda) descreve uma qualidade uniforme. A qualidade triangular (direita) descreve uma qualidade que varia uniformemente.

Se a extensão for o tempo, o movimento uniforme sendo representado por um gráfico retangular ($t \times v$), não é surpresa que a distância fosse entendida como sendo igual à área; afinal, a razão das áreas de dois retângulos está como o produto da razão dos lados correspondentes: $\frac{\text{área}_1}{\text{área}_2} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right) \times \left(\frac{t_1}{t_2}\right)$. No caso do movimento uniformemente variado, a distância é dada pelo Teorema da Velocidade Média. Em linguagem moderna, o teorema diz que a distância percorrida em um movimento uniformemente variado é igual à distância percorrida em um movimento uniforme feito com a velocidade média; se x for a distância total, v_1 for a velocidade inicial e v_2 for a velocidade final, o teorema diz que:

$$x = \bar{v}t; \quad \text{velocidade média:} \quad \bar{v} = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

Graficamente:

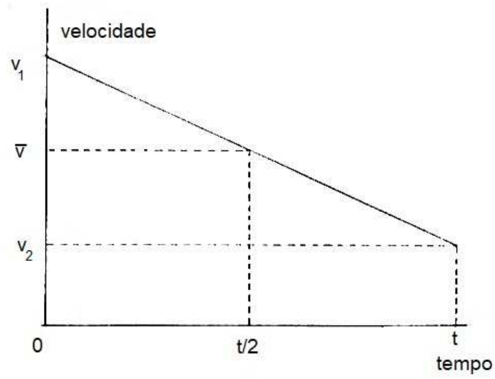


Figura 3.2: Teorema da Velocidade Média. Um corpo varia a velocidade, uniformemente, de v_1 a v_2 no tempo t. A velocidade média é a velocidade em $t/2$.

A formulação mais antiga desse teorema que se conhece é de Heytesbury, de 1335, em *Regras para Resolver Sofismas* (Clagett, p.262-263). Há várias demonstrações do teorema (Clagett, p.262-263; P. Cardozo Dias, 1992). Porém, em *Duas Novas Ciências*, Galileu usa a demonstração de Oresme; no movimento uniformemente variado, representado na figura 3.3, abaixo, a área do triângulo AFE é igual à área do triângulo ECG, de modo que a área do triângulo ABC é igual à área do retângulo $ABGF$.

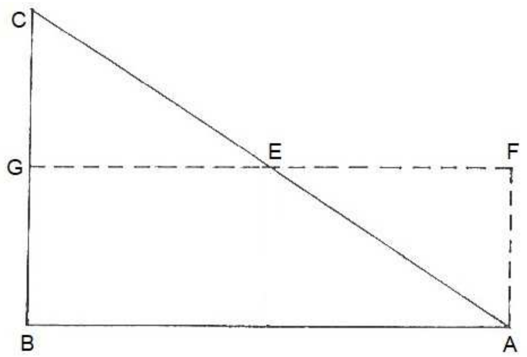


Figura 3.3: Demonstração de Oresme. O triângulo ABC representa um movimento uniformemente variado e o retângulo $ABGF$ representa um movimento uniforme feito com a velocidade média.

Uma versão simplificada do teorema foi enunciada, também por Heytesbury (*apud* Clagett, p.271):

> [...] quando um corpo que se move for uniformemente acelerado a partir do repouso até algum grau [de velocidade], ele terá percorrido, no mesmo tempo, metade da distância que ele teria percorrido, se, no mesmo tempo, tivesse movido com o grau que termina a latitude [a velocidade máxima].

Esse enunciado é a Regra da Dupla Distância (RDD).

Os medievais não aplicaram essas idéias ao estudo da queda dos corpos, mas a uma descrição genérica, não aplicada, filosófica do movimento, entendido como uma qualidade, como cor, temperatura, bondade. A aplicação dessas idéias à queda dos corpos foi feita por Galileu, cerca de 200 anos depois, em seus estudos sobre o movimento de queda.

Galileu, inicialmente, descobriu a "lei dos números ímpares" em um movimento uniformemente acelerado; muito provavelmente, fazendo experimentos com plano inclinado, não se sabe ao certo. Então, ele colocou o problema de justificar a lei, a partir de um "princípio mais natural". A tentativa de encontrar esse princípio está em seus fólios, folhas com rascunhos e cálculos, que pertencem ao conjunto de manuscritos de Galileu, coletados por Antonio Favaro *Le Opere di Galileo Galilei*, os quais estão sob a curadoria da Biblioteca Nacional de Florença. Esses fólios não estão catalogados na ordem temporal em que foram escritos e um dos problemas da historiografia é datá-los. Em particular, três fólios, 163v, 152r e 91v, mostram, respectivamente, a definição da RDD e como usá-la, a demonstração da lei $v^2 \propto x$ e a demonstração da lei $v \propto t$; eles foram esritos, o primeiro, em 1602 ou 1603, o segundo talvez em 1604 e o último certamente não após 1610. As demonstrações das leis da queda, apresentadas por Galileu em *Duas Novas Ciências*, não diferem, em sua essência, das demonstrações nos fólios, exceto que Galileu usa o Teorema de Velocidade Média, em vez da RDD.

Galileu, inicialmente, interpretou a extensão como distância e assumiu como o "princípio mais natural" — erroneamente — que a velocidade durante a queda fosse proporcional à distância percorrida; a justificativa é que corpos que caem de maiores alturas afundam mais em um solo macio. Essa hipótese, a RDD e a lei dos números ímpares são, contudo, incompatíveis, o que Galileu parece ter descoberto no fólio 152r. O processo de descoberta de seu erro e como chegou às leis do movimento de queda foge do objetivo desta dissertação, mas e é analisado por Cardozo Dias *et al.*

3.2 Operacionalização da velocidade instantânea por Galileu

O fólio 163v contém duas figuras. Na primeira (fig. 3.4), Galileu representa graficamente a RDD e, na segunda (fig. 3.5), a exemplifica.

Na figura 3.4, a extensão é representada sobre a vertical e a intensidade (velocidade), sobre a horizontal. Considerando que a extensão seja o tempo e que a área represente a distância — o que foi feito por Oresme e outros medievais, como mencionado, e por Galileu em *Duas Novas Ciências* — a RDD pode ser enunciada: a distância percorrida no movimento uniforme (área $abcd$), feito com a velocidade terminal no movimento uniformemente acelerado (bc) é o dobro da distância percorrida no movimento uniformemente acelerado (área abc) de igual duração (ab). Embora a discussão não pertença aos objetivos desta dissertação, é importante registrar que, no fólio 163v, a extensão representada na figura 3.4 ainda é a distância, mas isso não invalida a demonstração da RDD, feita por Galileu.

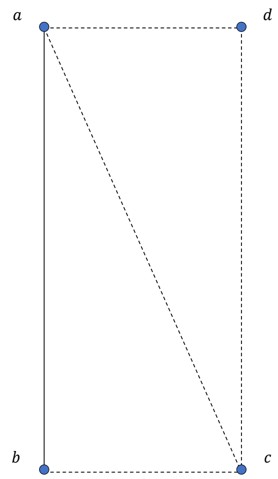


Figura 3.4: Regra da Dupla Distância. A área do triângulo *abc* é metade da área do retângulo *abcd*.

A figura 3.5 mostra como a RDD foi usada por Galileu. Se o corpo desce uma distância *ab* sobre o plano inclinado, o que é feito com um movimento uniformemente acelerado e, depois, move sobre um plano horizontal, o que é feito com um movimento uniforme, então a distância *bc*, percorrida no plano horizontal em um tempo igual ao do movimento sobre o plano inclinado é o dobro desta, $bc = 2ab$.

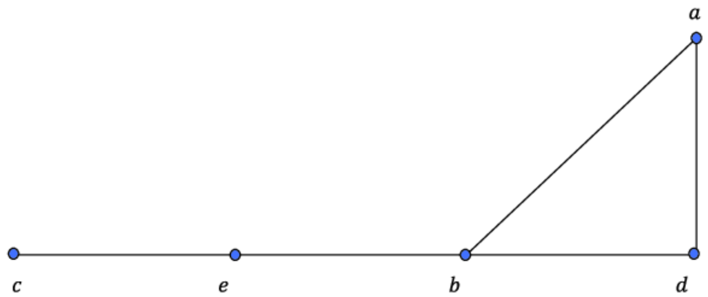


Figura 3.5: Aplicação da RDD. O plano horizontal "desliga" a aceleração do movimento sobre o plano inclinado.

O significado da velocidade instantânea, já implícito na figura 3.5, é apresentado de modo mais contundente no fólio 91v, no qual Galileu usa a RDD para obter relações entre distância, velocidade e tempo, em um movimento uniformemente acelerado, de queda, a partir de movimentos uniformes, figura 3.6 (*apud* Damerow et al.).

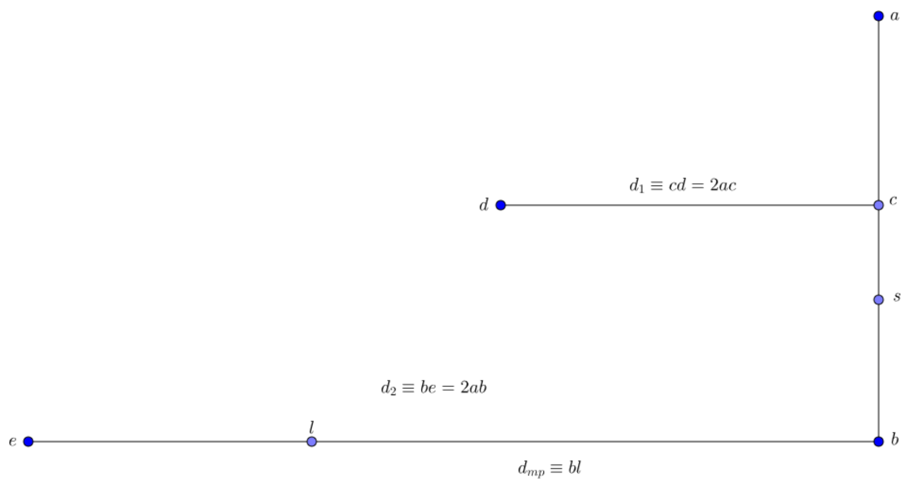


Figura 3.6: Movimentos uniformes correspondentes a velocidades instantâneas na queda. A queda é representada pela linha vertical; as linhas horizontais são percorridas com movimentos uniformes, feitos com as velocidades instantâneas em c e b, em tempos iguais aos tempos para percorrer ac e ab, respectivamente.

No movimento de queda, acb, o corpo atinge as posições c e b, respectivamente, nos tempos t_1 e t_2; as distâncias percorridas são $x_1 \equiv ac$ e $x_2 \equiv ab$. Pela RDD, se, com a velocidade em c ($v_c \equiv v_1$), o corpo percorre, com velocidade uniforme, a distância $D_1 \equiv cd$, no tempo t_1, então $D_1 = 2x_1$. Analogamente, se, com a velocidade em b ($v_b \equiv v_2$), o corpo percorre, com velocidade uniforme, a distância $D_2 \equiv be$, no tempo t_2, então $d_2 = 2x_2$.

A aplicação da RDD feita por Galileu não somente associa distância, tempo e (módulo da) velocidade em um movimento uniforme com as mesmas variáveis em um movimento uniformemente acelerado, mas permite concretizar a definição de velocidade instantânea medieval, dada na tabela 3.1: a velocidade em um instante é aquela com que um movimento uniforme seria percorrido se, naquele instante, a aceleração fosse “desligada”.

Capítulo 4

Proposta de ensino do conceito de velocidade instantânea

Como discutido nos capítulos 2 e 3, as dificuldades encontradas pelos alunos com o conceito de velocidade em um instante foram enfrentadas pelos filósofos mertonianos no século XIV. Mesmo sem ter um conceito matemático de limite, os mertonianos deram ao conceito de velocidade instantânea (Ernest Moody, p.20) "uma definição precisa, que foi aplicada a uma análise exata e substancialmente correta do movimento uniformemente acelerado". Essa definição, apresentada na tabela 3.1, é essencialmente: *se um corpo tem um movimento não uniforme, sua velocidade em um dado instante (a velocidade instantânea) é determinada pelo caminho que esse corpo percorreria se, a partir desse instante, o movimento fosse uniforme.* Graficamente, essa definição pode ser representada pela figura 4.1.

Neste capítulo, é apresentada uma proposta para o ensino de velocidade instantânea, fundamentada na interpretação que Galileu deu à definição mertoniana. Essa interpretação está concretizada no "velocímetro galileano", descrito na próxima seção. Nas seções subsequentes, vai ser apresentada uma sequência didática, que tem esse velocímetro como elemento fundamental.

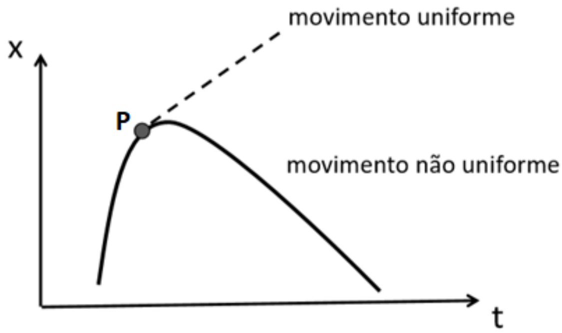


Figura 4.1: Definição mertoniana da velocidade instantânea. A curva representa um movimento acelerado. A reta tracejada descreve o movimento uniforme a partir de P, que ocorreria, caso a aceleração fosse "desligada" em P.

4.1 Um "velocímetro galileano"

A figura 3.5, copiada do fólio 163v, inspira um aparato e um experimento para medir a velocidade instantânea. De acordo com o fólio, um corpo desce o plano inclinado com um movimento uniformemente acelerado; em seguida, ele se move, no trecho horizontal, com velocidade constante. Desse modo, Galileu concretiza a definição medieval, pois o plano horizontal "desliga" a aceleração de queda e a velocidade com que o corpo percorre o trecho horizontal é a velocidade (instantânea) com que chega ao pé do plano. Um modelo desse aparato está mostrado na foto da figura 4.2.

Figura 4.2: O "velocímetro galileano". O aparelho reproduz a figura 3.5, presente no fólio de Galileu.

Para medir a velocidade instantânea com a qual uma bolinha chega ao pé do plano inclinado, mede-se o tempo T que ela leva para percorrer uma extensão D do plano horizontal. Usando a definição mertoniana, a velocidade instantânea no pé do plano é, então, obtida, dividindo-se D por T. A figura 4.3 descreve a medida dessa velocidade.

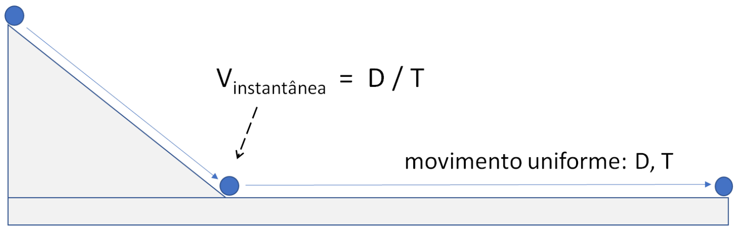


Figura 4.3: Medida de velocidade com o "velocímetro galileano".

O valor de D é determinado, marcando-se dois pontos no plano horizontal e medindo a distância entre eles com uma régua. O valor de T é mais difícil de medir, pois a bolinha move-se com uma velocidade relativamente alta no plano horizontal. Uma possibilidade é filmar o movimento da bolinha no aparato e analisar o vídeo com um programa de vídeo-análise como o *Tracker*. Esse método foi utilizado com sucesso em Aguiar *et al.* e algumas medidas assim obtidas estão mostradas no apêndice C. Entretanto, em muitas escolas, a filmagem e vídeo-análise podem exigir mais tempo que o disponível. Nesta dissertação, é proposta uma alternativa mais simples e rápida: medir o tempo T utilizando uma gravação de som. Para isso, dois sinos são colocados sobre os pontos no plano horizontal que estão separados pela distância D, de forma que os sinos ressoem, quando a bolinha passar pelos pontos. Os sons dos sinos são captados por dois microfones, um para cada sino, e enviados para um computador, onde são gravados. A foto na figura 4.4 mostra a montagem do experimento.

A gravação e análise do som podem ser realizadas com um único programa de áudio-análise, como o *Audacity*. A figura 4.5 mostra um exemplo da forma de onda gravada e analisada pelo programa. Os dois picos representam os sons emitidos pelos sinos. O programa fornece o tempo entre esses dois sons, o que corresponde ao intervalo T que se deseja medir. O valor determinado pelo programa tem alta precisão, pois gravações de áudio têm resolução melhor que 1 μs.

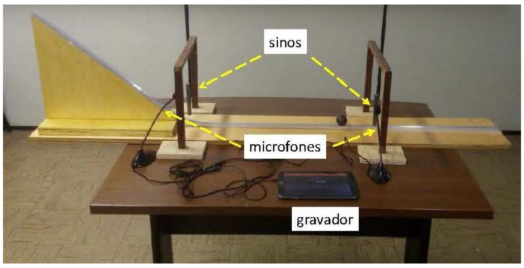


Figura 4.4: Montagem do experimento. Estão indicados os sinos, que ressoam ao serem tocados pela bola, os microfones que captam os sons dos sinos e o gravador do som.

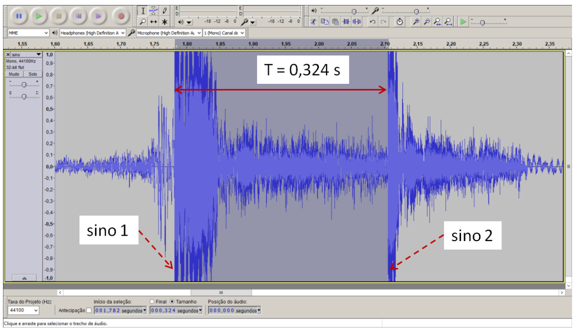


Figura 4.5: Intervalo de tempo entre os sons dos sinos, como apresentado pelo *Audacity*.

A figura 4.6 mostra, em detalhe, como o *Audacity* apresenta o intervalo de tempo entre os dois sons: o usuário marca com o *mouse* os dois pontos correspondentes ao início do som de cada sino ("sino 1" e "sino 2", na figura 4.5) e o tempo entre eles é dado na parte inferior da janela do programa.

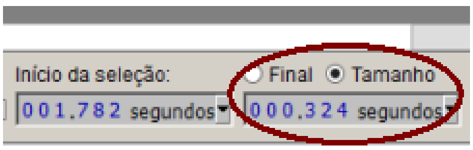


Figura 4.6: Determinação do intervalo de tempo entre os sons dos sinos.

4.1.1 Velocidade instantânea no pé do plano inclinado

O "velocímetro galileano" permite estudar como a velocidade instantânea de um corpo varia, à medida que ele desce um plano inclinado. Para isso, uma bolinha é solta de diferentes pontos sobre o plano, a partir do repouso; a velocidade instantânea no pé do plano é, então, medida. As medidas da velocidade instantânea foram feitas, após a bolinha percorrer as distâncias x = 20, 30, 40 e 50 cm no plano inclinado. A média de três medidas para cada distância está mostrada na tabela 4.1.

x (m)	v (m/s)
0,5	1,90
0,4	1,69
0,3	1,45
0,2	1,20

Tabela 4.1: Medidas da velocidade instantânea, v, e da distância, x, no plano inclinado.

Representando os dados da tabela 4.1 por um gráfico, obtém-se a figura 4.7.

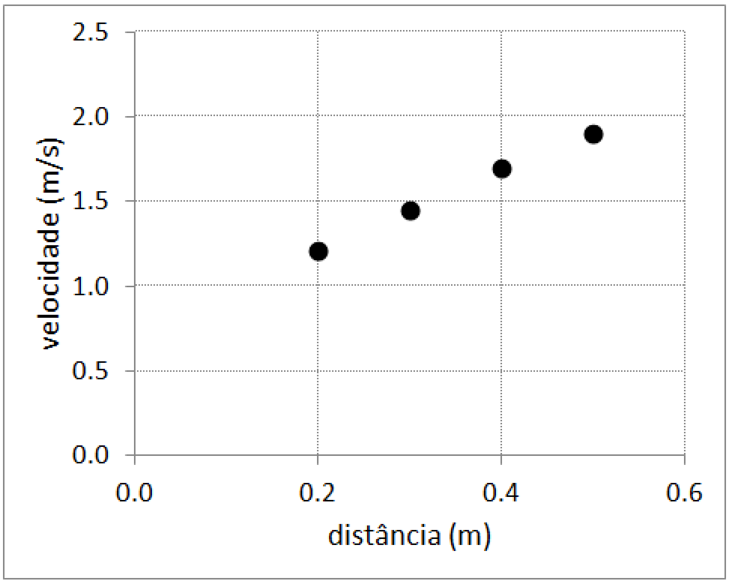


Figura 4.7: Gráfico de v em função de x com os dados da tabela 4.1.

Os resultados apresentados na figura 4.7 mostram que é possível atribuir um significado operacional ao conceito de velocidade instantânea. Para um estudante que teria dificuldade em interpretar a definição matemática dessa velocidade por não ter aprendido noções de cálculo diferencial, a definição operacional pode representar uma alternativa mais viável para a compreensão do conceito.

A figura 4.8 mostra o gráfico v^2 em função de x, obtido com os valores na tabela 4.1. O gráfico mostra que os pontos medidos estão sobre uma reta que passa pela origem. O resultado corresponde a uma das maneiras como o movimento uniformemente variado é representado no ensino médio: $v^2 = 2ax$.

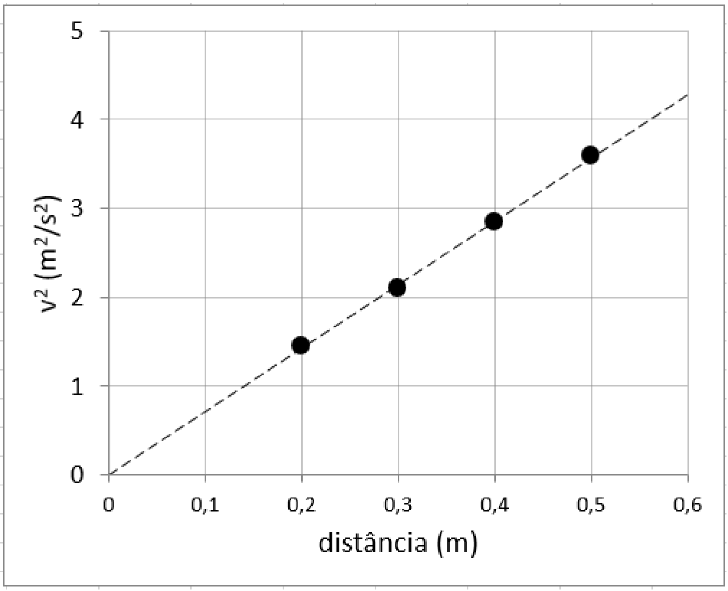


Figura 4.8: Os valores de v^2 em função de x, usando os dados da tabela 4.1, estão sobre uma reta que passa pela origem, ilustrando a lei $v^2 = 2ax$.

No ensino médio, o movimento uniformemente variado é mais comumente representado pela proporcionalidade entre velocidade e tempo, $v = at$. Para verificar esse resultado, é necessário medir o tempo t que a bolinha leva para percorrer a distância x sobre o plano inclinado. Porém, não é fácil fazer com que a bolinha produza um ruído no ponto de partida, pois sua velocidade nesse instante é nula (por exemplo, ela não possui energia para fazer um sino soar). Uma opção para contornar essa dificuldade é soltar a bolinha, no mesmo instante em que um ruído externo, palmas, por exemplo, é produzido. Porém, isso obrigaria medir dois tempos: t, para descer o plano inclinado, e T, para percorrer o plano horizontal. A regra da dupla distância (RDD), que foi discutida no capítulo 3, evita esse trabalho extra. Se a validade da RDD for verificada por um experimento inicial, pode-se tomar o tempo t, para descer a distância x, igual ao tempo T, para percorrer a distância $D = 2x$ no plano horizontal. A figura 4.9 ilustra a montagem experimental baseada na RDD.

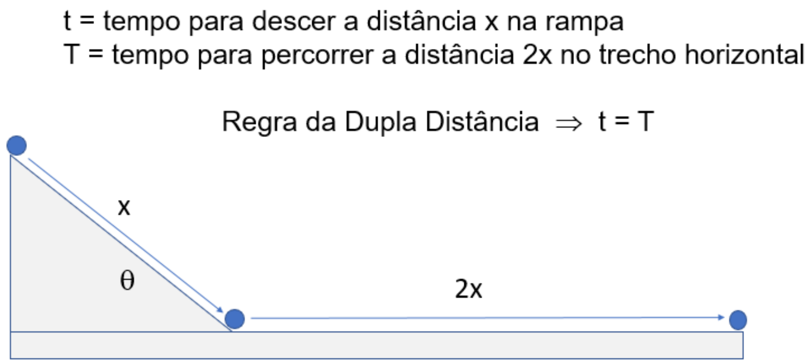


Figura 4.9: Representação da Regra da Dupla Distância no "velocímetro galileano".

4.2 Verificação da RDD

Nesta seção, é proposto um procedimento para verificar a Regra da Dupla Distância: a bolinha é solta, no mesmo instante em que um ruído externo é feito. Uma batida de palmas é uma maneira simples de marcar esse início de movimento.[1] A gravação com o *Audacity* mostra, então, três sons: a batida de palmas que dá partida ao movimento, o som do primeiro sino colocado ao pé do plano, a uma distância x do ponto inicial, e o som do segundo sino, colocado a uma distância $D = 2x$ do primeiro. A figura 4.10 mostra uma

[1]Tentamos reduzir o tempo de reação batendo as palmas em sequência ritmada (1-2-3, por exemplo) e liberando a bolinha apenas na última batida.

forma de onda gravada com esse procedimento. Observa-se que os intervalos t e T são muito parecidos, como esperado pela RDD.

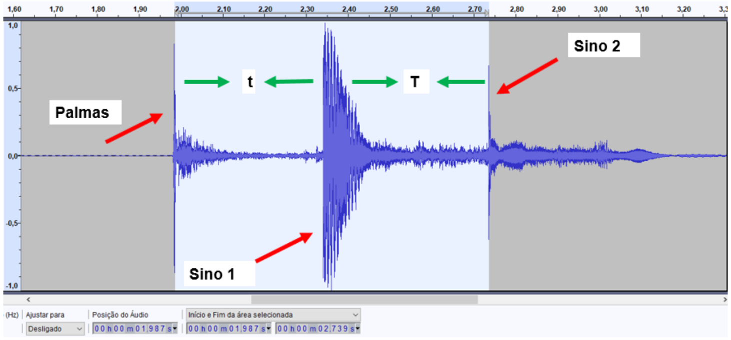


Figura 4.10: Gravação, no Audacity, dos três sons: batida de palmas, o som do primeiro sino e o som do segundo sino. Os intervalos t e T são muito parecidos.

A figura 4.10 foi obtida em uma única tentativa. Um teste mais rigoroso da RDD pode ser realizado, medindo-se t para três distâncias de descida, $x = 20$, 30 e 40 cm e os correspondentes valores de T para as distâncias $D = 2x$, no plano horizontal. Para cada uma das distâncias x, de descida, foram realizadas diversas medidas de t e T. Os valores médios dessas medidas com os correspondentes erros padrão estão dados na tabela 4.2.

x (m)	t (s)	erro padrão	T(s)	erro padrão
0,20	0,340	0,005	0,345	0,002
0,30	0,380	0,010	0,390	0,001
0,40	0,470	0,010	0,468	0,002

Tabela 4.2: Verificação da RDD. A distância de descida é x, o tempo médio de descida é t e o tempo médio para percorrer a distância $2x$ na horizontal é T. Os erros padrão são os desvios padrão das médias t e T.

A figura 4.11 mostra os valores de t e T dados na tabela 4.2, com suas respectivas barras de erro. Dentro das limitações do procedimento, os resultados são compatíveis com a previsão da RDD, $t = T$. Tanto na tabela 4.2 quanto na figura 4.11, nota-se que os erros experimentais em t são muito maiores que os erros em T, refletindo a dificuldade em sincronizar o ruído das palmas com o lançamento da bolinha.

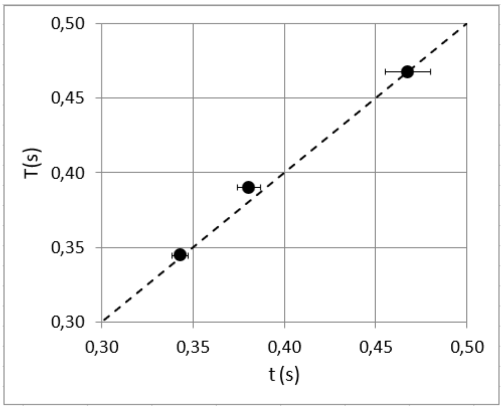


Figura 4.11: Gráfico com os valores de t e T na tabela 4.2. As barras de erro em T não aparecem, por serem menores que os pontos.

4.3 Velocidade em função do tempo

Tendo verificado experimentalmente a validade da RDD, artifícios para medir o tempo de descida, como as palmas, não são mais necessários. Basta fazer $D = 2x$ e o tempo t é automaticamente dado por T. Isso corresponde à montagem mostrada na figura 4.9, em que o segundo sino é colocado a uma distância $2x$ do primeiro. A tabela 4.1 pode, então, ser completada com uma coluna extra, contendo o tempo correspondente à distância x. Os dados completos, com o valor de t incluído, estão na tabela 4.3.

T (s)	x (m)	v (m/s)
0,527	0,5	1,90
0,474	0,4	1,69
0,414	0,3	1,45
0,333	0,2	1,20

Tabela 4.3: Medidas do tempo (pela RDD, $T = t$), distância e velocidade instantânea de descida. O erro padrão das medidas de tempo é da ordem de 1%.

O gráfico da velocidade em função do tempo está na figura 4.12. Nota-se que todos os pontos estão sobre uma linha reta que passa pela origem, ou seja, $v = at$. Esse resultado mostra que o movimento de descida é uniformemente variado, com aceleração a; como mencionado anteriormente, para um aluno de ensino médio essa proporcionalidade é a maneira usual de representar o movimento uniformemente acelerado.

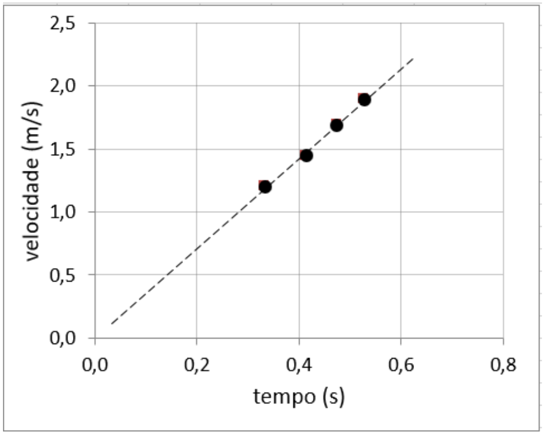


Figura 4.12: A velocidade em função do tempo com os dados da tabela 4.3.

4.4 Posição em função do tempo

A tabela 4.3 permite construir o gráfico da posição em função do tempo; o resultado está mostrado na figura 4.13. Nesse gráfico, a linha representa uma parábola $x \propto t^2$ ajustada aos pontos medidos. Essa parábola é outra representação do movimento uniformemente acelerado, familiar aos estudantes.

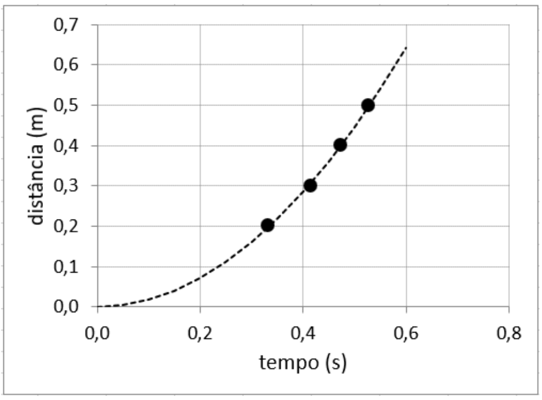


Figura 4.13: Gráfico da posição em função do tempo correspondente às medidas da tabela 4.3. Os pontos estão sobre uma parábola $x \propto t^2$.

Com este resultado, é mostrado que todas as descrições do movimento uniformemente acelerado usualmente discutidas no ensino médio — $v \propto t$, $v^2 \propto x$ e $x \propto t^2$ — são obtidas com o "velocímetro galileano".

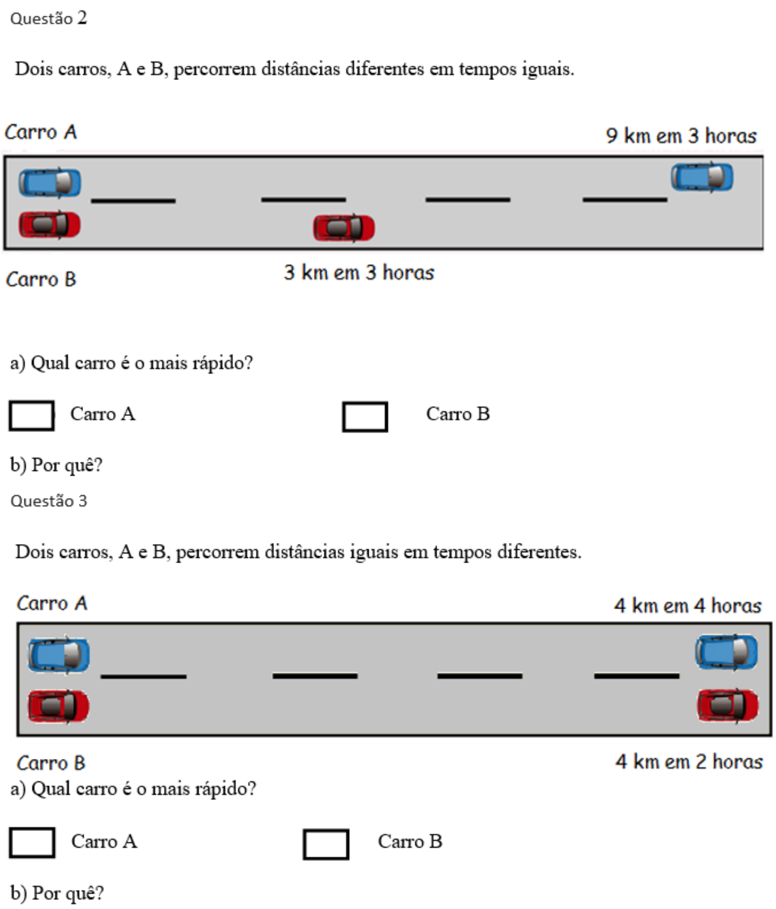
4.5 Velocidade instantânea: uma sequência didática

Nesta seção, é apresentada uma sequência didática para o ensino do conceito de velocidade instantânea a ser aplicada em sala de aula. Essa sequência possui cinco unidades. As unidades 1 e 2 testam a noção de velocidade que os alunos possuem; a unidade 1 testa a noção qualitativa de rapidez e a unidade 2, a noção quantitativa do conceito. Na unidade 3, o movimento uniforme e o movimento não uniforme são definidos e representados graficamente; o material é apresentado de modo a conduzir o aluno a considerar se pode existir ou não velocidade em um instante. Na unidade 4, o conceito de velocidade instantânea é definido como os mertonianos o fizeram, o que foi visto no capítulo 3; nessa unidade, é proposta a atividade experimental utilizando o "velocímetro galileano", descrita na seção 4.1. Na atividade, é obtida a dependência da velocidade com a distância. Para obter a dependência da velocidade com o tempo, é preciso usar a RDD, como discutido na seção 4.2 e na seção 4.3. Na unidade 5, os alunos fazem experimentos com o "velocímetro galileano", como descrito nas seções 4.1, 4.3 e 4.4, e obtêm as leis do movimento de queda.

A seguir, é apresentada uma descrição mais detalhada de cada uma dessas unidades. O material didático constituído por essas unidades está no apêndice A

4.5.1 Unidade 1

O objetivo da primeira unidade é descobrir quais noções de velocidade os alunos possuem. Isso é realizado através de um teste diagnóstico com 7 questões, cujo propósito é avaliar até que ponto as noções dos estudantes correspondem ao conceito aristotélico de "mais rápido", discutido no capítulo 3. Por exemplo, as questões 2 e 3, mostradas na figura 4.14, apresentam duas situações — carros percorrem distâncias diferentes em tempo iguais e distâncias iguais em tempos diferentes — e pedem que o aluno identifique o carro mais rápido. Uma expressão quantitativa da noção de "mais rápido" é avaliada nas questões 4 e 5 do teste. A noção de quantas vezes um carro é mais veloz que o outro foi expressa por Arquimedes, na forma de proporções, como visto no capítulo 3.


Questão 2

Dois carros, A e B, percorrem distâncias diferentes em tempos iguais.

a) Qual carro é o mais rápido?

☐ Carro A ☐ Carro B

b) Por quê?

Questão 3

Dois carros, A e B, percorrem distâncias iguais em tempos diferentes.

a) Qual carro é o mais rápido?

☐ Carro A ☐ Carro B

b) Por quê?

Figura 4.14: Questões 2 e 3 da unidade 1. O objetivo das questões é identificar o carro mais rápido.

4.5.2 Unidade 2

A unidade 2 tem início com a introdução da definição de velocidade, dada por

$$\text{velocidade} = \frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo para percorrê-la}}. \tag{4.1}$$

Nesse momento, não é feito nenhum esforço para caracterizar essa definição como velocidade média. Em seguida, a partir de exemplos concretos, é apresentada a questão da unidade a ser utilizada para representar a velocidade. É discutida a relação entre padrões de velocidade utilizados no dia-a-dia, como km/h e m/s.

Com a definição (4.1), é proposto que os alunos calculem a velocidade dos carros nas situações apresentadas na unidade 1 e comparem seus resultados com as respostas dadas anteriormente.

Na última questão dessa unidade, mostrada na figura 4.15, é introduzido um movimento em que trechos diferentes são percorridos com velocidades diferentes. A questão tem por objetivo mostrar que a velocidade definida na equação (4.1) é uma propriedade do percurso — diferentes percursos podem ter diferentes velocidades — e preparar a discussão sobre o movimento uniforme e não uniforme a ser realizado na próxima unidade.

Questão 6

A Linha Vermelha no RJ possui 22 km de extensão e a velocidade máxima permita é de 80 km/h. Considere que um carro percorre o primeiro trecho nessa via, de 12 km, em 15 minutos. O segundo trecho, de 10 km, é percorrido em 5 minutos.

a) Qual a velocidade, em km/h, do carro em cada trecho?

b) E qual a velocidade, em km/h, do carro em toda a extensão da linha vermelha?

c) O motorista recebeu multa por um radar no segundo trecho. O motorista recorreu alegando que a sua velocidade na Linha Vermelha estava abaixo do valor permitido na via. O motorista tem razão ou não? Por quê?

Figura 4.15: Questão 6. O objetivo da questão é calcular a velocidade média e analisar o tipo de movimento.

4.5.3 Unidade 3

Na unidade 3, o termo "velocidade" utilizado até o momento é substituído pela expressão usual, "velocidade média", definida da mesma maneira:

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo para percorrê-la}}. \tag{4.2}$$

Em seguida, o movimento uniforme é definido como aquele em que a velocidade média é a mesma em qualquer parte do percurso total. Por isso, o trecho específico do percurso não precisa ser especificado, ou seja, o movimento uniforme é caracterizado por uma única velocidade. Para consolidar o aprendizado dessas definições, na primeira questão da unidade 3, mostrada na figura 4.16, é pedida uma nova análise da última questão da unidade 2 (figura 4.15). Em particular, é discutido se as velocidades calculadas anteriormente são velocidades médias e se o movimento é uniforme. A construção de um gráfico com valores da distância em função do tempo também é solicitada.

Questão 1

Na aula anterior, discutimos, em uma das questões, sobre o movimento de um carro na Linha Vermelha, em que ele percorre dois trechos de comprimentos diferentes em intervalos de tempos diferentes. E você calculou a velocidade em cada trecho e em toda a extensão da via.

a) As velocidades que você calculou são velocidades médias?

b) O movimento do carro foi uniforme?

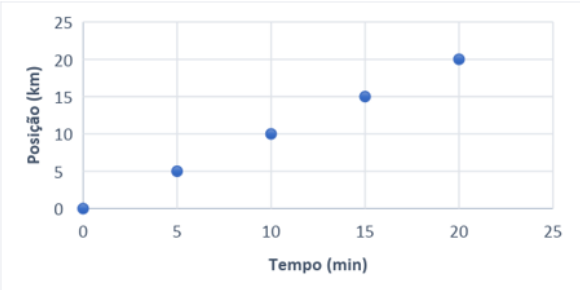
c) Marque no papel milimetrado a posição do carro nos instantes considerados. Os dados estão na questão 6 da Unidade 2. Indique em cada eixo a grandeza física e sua respectiva unidade de medida.

Figura 4.16: Questão 1. O objetivo da questão é analisar se a velocidade é a velocidade média e se o movimento é uniforme.

Na segunda questão da unidade 3, mostrada na figura 4.17, é apresentado um gráfico da distância em função do tempo, no qual os pontos estão sobre uma linha reta e se pede a velocidade média entre pontos consecutivos. O objetivo da questão é mostrar aos alunos a relação entre um gráfico linear e o movimento uniforme. Além disso, esse gráfico deve ser comparado com o gráfico da questão anterior, que corresponde a um movimento não uniforme.

Questão 2

Suponha que o gráfico do movimento de outro carro na linha vermelha fosse como o da imagem abaixo.



a) Qual a velocidade média do carro entre 0-5 min, 5-10 min, 10-15 min, 15-20 min, 0-20 min? Especifique em que unidade está sua resposta.

b) Esse movimento foi uniforme?

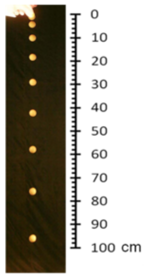
Figura 4.17: Questão 2. O objetivo da questão é analisar o movimento uniforme através de um gráfico.

A questão mostrada na figura 4.18 apresenta aos alunos uma foto estroboscópica da queda de uma bolinha. O objetivo da questão é que os alunos identifiquem o movimento de queda como um movimento não uniforme e vejam como ele é representado graficamente. Pede-se que os alunos completem uma tabela da posição da bolinha em cada instante e construam um gráfico com os dados da tabela. Em seguida, pede-se que completem outra tabela com os valores da velocidade média para cada intervalo de tempo e deslocamento.

A última questão desta unidade está na figura 4.19. Seu objetivo é motivar os alunos a pensarem se a ideia da velocidade em um instante faz algum sentido. Essa discussão será retomada na unidade 4.

Questão 3

A imagem mostra o movimento de queda de uma bolinha. A foto registra a posição da bolinha a cada 0,05 s. Chamamos esse tipo de foto de imagem estroboscópica.



a) Preencha a tabela com os dados (posição e tempo) extraídos da foto. Suponha que a primeira posição na queda considerada por você corresponda a t = 0 s.

Tempo (s)	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,4
Posição (cm)									

b) Construa no papel milimetrado o gráfico da posição em função do tempo. Indique em cada eixo a grandeza física e sua respectiva unidade de medida.

c) Complete a tabela abaixo.

Intervalo de tempo (s)	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
Deslocamento no intervalo (cm)								
Velocidade média no intervalo (cm/s)								

d) O movimento é uniforme?

____

____

Figura 4.18: Questão 3. O objetivo da questão é analisar o movimento de queda de uma bolinha.

Questão 6

Faz sentido falar de velocidade em um único instante, por exemplo, no instante marcado na figura?

____

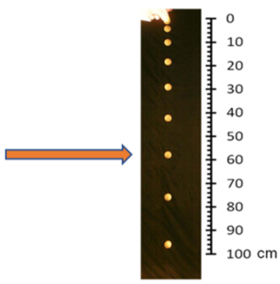


Figura 4.19: Questão 6. O objetivo da questão é levar aos alunos o questionamento sobre velocidade em um instante.

4.5.4 Unidade 4

Nesta unidade, é introduzido o conceito de velocidade instantânea. Ao invés de seguir o procedimento usual, baseado na ideia de limite, será adotada uma abordagem inspirada no desenvolvimento histórico desse conceito. Pela discussão nos capítulos 2 e 3, parece natural conduzir os alunos ao conceito de velocidade instantânea de maneira semelhante à utilizada pelos filósofos mertonianos e por Galileu, discutida no capítulo 3. Assim, a unidade 4 começa apresentando aos alunos a definição medieval de velocidade instantânea, discutida no início deste capítulo e, em mais detalhe, no capítulo 3. Essa definição é transformada em um aparato para a medida da velocidade instantânea, sugerido pelas considerações de Galileu sobre o movimento de queda, como na figura 3.5, que consistem, essencialmente, no entendimento de que o movimento horizontal é uniforme e na utilização da Regra da Dupla Distância.

Em seguida, esse aparato, o "velocímetro galileano", discutido na seção 4.1, é apresentado. O método de medida baseado em gravações do som é explicado aos alunos, nos moldes descritos na seção 4.1. Finalmente, os alunos realizam as medidas e preenchem a tabela 4.4.

Medidas	1	2	3	4	5	6
Posição inicial da bolinha no plano inclinado (cm)						
Tempo para percorrer a distância entre os dois sinos (s)						
Distância entre os dois sinos (cm)						
Velocidade Instantânea (cm/s)						
Quadrado da velocidade instantânea $(cm/s)^2$						

Tabela 4.4: Tabela para completar com as medidas obtidas com o "velocímetro galileano".

Com os resultados da tabela, os alunos produzem gráficos de v e v^2 em função de x, semelhantes aos mostrados na subseção 4.1.1. Embora não esteja explicíto no roteiro, nesse momento a relação dos gráficos com o movimento uniformemente acelerado deve ser discutida pelo professor. A unidade termina com a repetição da pergunta feita no final da unidade 3: *Faz sentido falar de velocidade em um único instante?*

4.5.5 Unidade 5

Na unidade 4, os experimentos com o "velocímetro galileano" mostram a dependência da velocidade instantânea com a distância de descida. Na unidade 5, esses resultados são estendidos de modo a se obter como a velocidade instantânea e a distância percorrida sobre o plano inclinado variam com o tempo, tal como discutido nas seções 4.3 e 4.4. A importância de estudar a dependência temporal do movimento vem do fato dessa ser a forma usual de se apresentar a cinemática no ensino médio.

As dificuldades para medir o tempo de descida e a maneira de contorná-las, discutida na subseção 4.1.1, são apresentadas aos alunos. A regra da dupla distância (discutida no capítulo 3 e na subseção 4.1.1) é apresentada como uma forma de diminuir o trabalho extra necessário para encontrar o tempo de descida.

Com auxílio da RDD o experimento da medida de tempo torna-se tão simples quanto o anterior. Sua verificação prática pode ser uma etapa inicial da atividade ou, dependendo do tempo disponível, a RDD pode ser apenas enunciada. Dessa maneira os alunos medem o tempo, a distância, a velocidade instantânea e preenchem a tabela 4.5.

Medidas	1	2	3	4	5	6
Posição da bolinha no plano inclinado - x (m)						
Distância para percorrer o plano horizontal - D = 2x (m)						
Tempo para percorrer o plano - T = t (s)						
Velocidade instantânea - v = D/T						

Tabela 4.5: Tabela a ser preenchida pelos alunos em sala.

Com os resultados da tabela, os alunos produzem gráficos de v e x em função de t, semelhantes aos mostrados na seções 4.3 e 4.4. Novamente, neste momento, o professor deve discutir a relação dos gráficos com o movimento uniformemente acelerado.

Capítulo 5

Aplicação em sala de aula

A proposta didática apresentada no capítulo 4 foi realizada com alunos do primeiro ano do ensino médio de duas escolas no município do Rio de Janeiro, aqui chamadas escola 1 e escola 2, ambas de grande prestígio. Como as escolas possuem propostas curriculares diferentes, as atividades desenvolvidas tiveram que se enquadrar ao planejamento de cada uma.

5.1 Aplicação na escola 1

Nesta seção, é feito um relato da aplicação das atividades propostas na escola pública e uma análise diagnóstica do conhecimento dos alunos sobre o conceito de velocidade. As atividades foram feitas em seis turmas de cursos técnicos em um encontro de dois tempos de aula, 1h e 40min para cada turma. Os alunos já haviam tido instrução sobre cinemática, em aula anterior, incluindo a descrição usual de velocidade instantânea, baseada na noção de limite. Tendo em vista a limitação de tempo e o conhecimento anterior dos alunos, foi aplicada uma versão condensada da proposta didática apresentada no capítulo 4, que está no apêndice B.

5.1.1 Respostas ao questionário

Com o objetivo de fazer uma avaliação diagnóstica do conhecimento dos alunos sobre o conceito de velocidade, na primeira etapa da atividade foi enviado a eles um questionário, uma semana antes do primeiro encontro. O questionário foi desenvolvido no "Google Formulário", com 8 perguntas, as mesmas da unidade 1, que foram respondidas por 102 alunos.

Questão 1

A primeira questão do questionário (figura 5.1) analisa a noção subjetiva dos alunos sobre o conceito de velocidade. Nesta questão, duas imagens de um personagem de "videogame", Sonic, são apresentadas em situações distintas e se pergunta em qual delas ele é mais rápido. Pede-se, também, uma justificativa para a resposta.

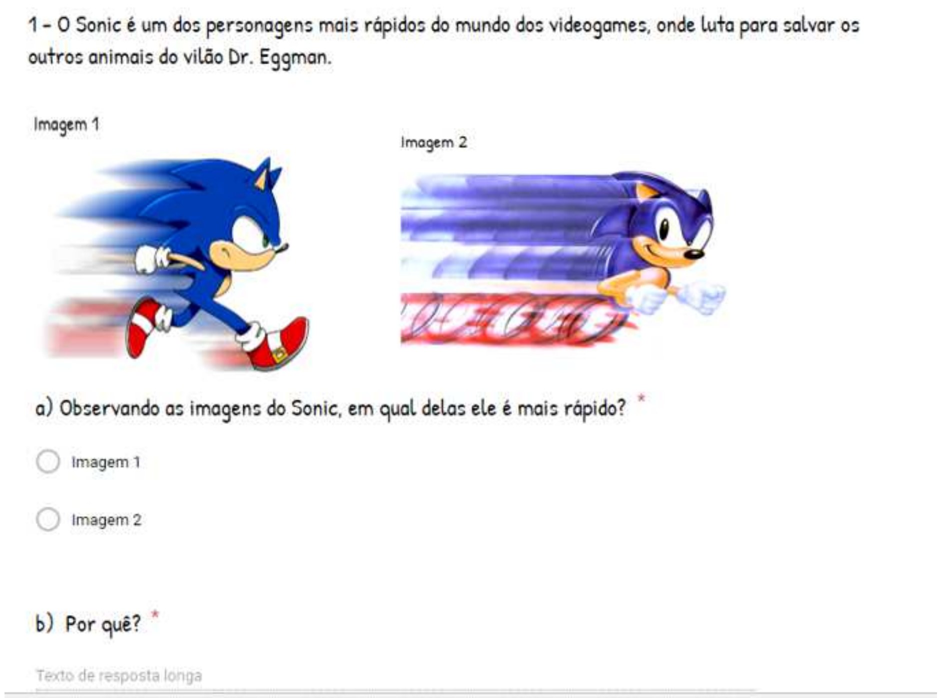


Figura 5.1: Questão 1. Noção subjetiva de velocidade.

As percentagens de acerto e erro das respostas dos alunos à primeira parte da questão estão representadas no gráfico da figura 5.2. A taxa de acerto foi 90,2%. Talvez cause surpresa que 1 em cada 10 alunos tenha errado a resposta.

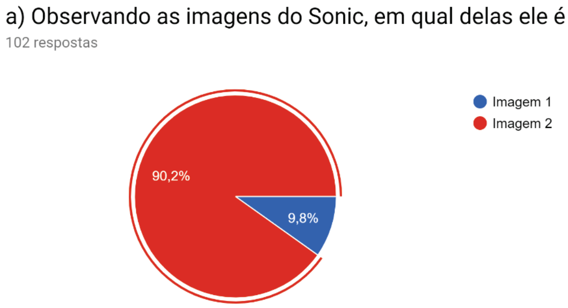


Figura 5.2: Questão 1. Percentagens de acerto e erro.

Algumas justificativas apresentadas para a opção escolhida:

> Na primeira imagem, por estar correndo com menor velocidade, é possível enxergar o formato do seu corpo bem definido. Já na segunda imagem, por estar correndo numa velocidade muito maior, não é possível enxergar o formato definido de todo o seu corpo.
>
> Por sua velocidade ser bem alta, não é possível nem ver os seus pés e braços, assim concluindo que ele está mais rápido.
>
> Pois a imagem 2 apresenta um borrão maior, logo o Sonic está a uma velocidade maior que a apresentada na imagem 1, considerando q a imagem é de um instante de alta velocidade, há uma maior dificuldade de capturar o Sonic, o que não ocorre na imagem 1 pois é mais fácil a captura.
>
> Na imagem 2, pois vemos uma imagem mais distorcida, composta majoritariamente de rastros, vestígios da velocidade de sonic.
>
> Pela quantidade de frames por segundo da imagem.

É interessante notar como os alunos descrevem de maneiras diferentes a mesma característica das figuras: a indefinição da imagem a altas velocidades.

Algumas justificativas das respostas erradas:

> Porque, na imagem 1, o "borrão" demonstra que Sonic está obtendo uma aceleração. Já na imagem 2, os "borrões" contínuos demonstram que Sonic mantém uma velocidade constante.

> Porque ao observar, parece que o 1º Sonic é mais rápido pelo fato de quase não vermos sua trajetória marcada pelo corpo.
>
> Pois os intervalos registrados da velocidade são menores.
>
> Porque se cada foto tirada do pé tiver o mesmo intervalo de tempo, então a distância percorrida do pé do Sonic na imagem 1 é maior, sendo mais rápido.
>
> Pois na imagem 1 não é possível identificar os pontos que ele parou devido sua aceleração.

Questões 2 e 3

Nas questões 2 e 3, são apresentadas duas situações diferentes e se pede uma avaliação qualitativa sobre qual corpo é o mais rápido.

A questão 2 (figura 5.3) apresenta dois carros percorrendo distâncias diferentes em tempos iguais. Pergunta-se qual carro é mais rápido e o porquê da resposta. Todos os alunos marcaram corretamente o carro A.

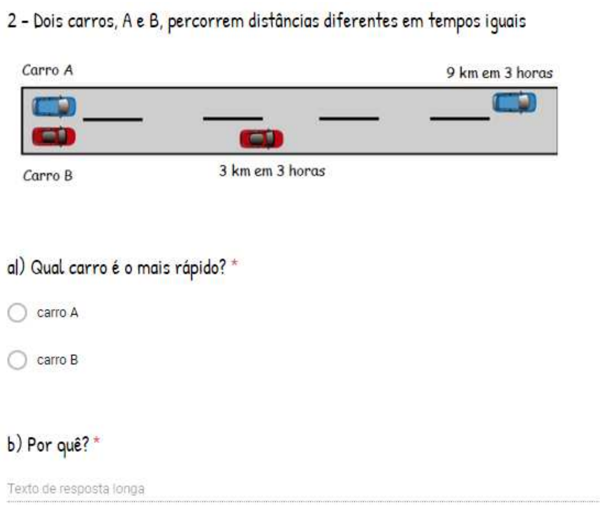


Figura 5.3: Questão 2. Tempos iguais e distâncias diferentes.

Algumas justificativas apresentadas para a opção escolhida:

> Porque ele percorreu uma maior distância do que carro vermelho em menos tempo,
>
> Pois o carro A percorreu uma distância muito maior que o carro B no mesmo período de tempo.

> Porque no mesmo tempo que o A e o B utilizaram para percorrer sua trajetória, o A teve seu deslocamento mais rápido, acelerado (9km) enquanto B foi em (3 km) ou seja, mais lentamente.

Pode-se notar que as justificativas são bastante semelhantes.

A questão 3 (figura 5.4) apresenta dois carros percorrendo distâncias iguais em tempos diferentes. Pergunta-se qual carro é mais rápido e o porquê da resposta. Todos os alunos marcaram corretamente o carro B.

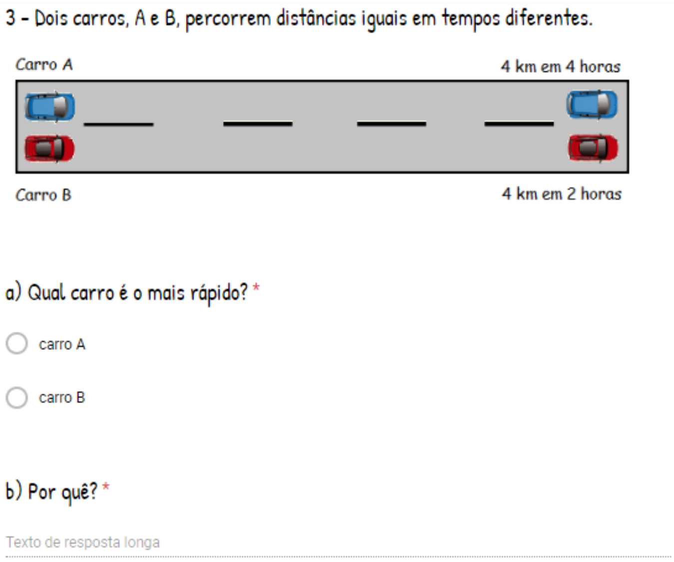


Figura 5.4: Questão 3. Distâncias iguais em tempos diferentes.

Algumas justificativas apresentadas para a opção escolhida:

> Embora tenhamos percorrido a mesma distância, o carro B fez isso em menos tempo, e por isso é mais rápido.
>
> Porque tem velocidade média maior, pois percorreu o percurso em menos tempo.
>
> Porque realizou o mesmo movimento do carro A num tempo menor.

Novamente, as justificativas são semelhantes.

Questões 4 e 5

Nas questões 4 e 5, pede-se uma avaliação quantitativa das mesmas situações das questões 2 e 3, respectivamente.

Na questão 4 (figura 5.5), pergunta-se quantas vezes um carro é mais rápido que o outro e o porquê da resposta.

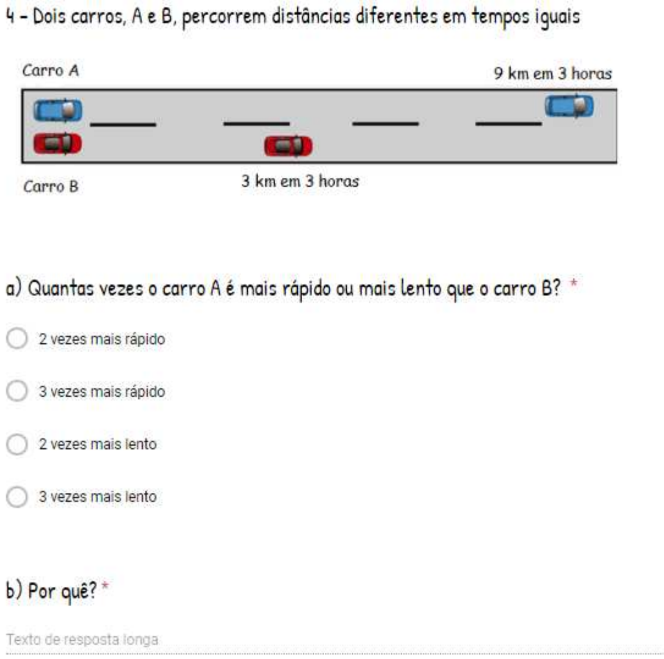


Figura 5.5: Questão 4. Comparação das velocidades, no caso de distâncias iguais e tempos diferentes.

As percentagens de acerto e erro das respostas dos alunos à questão 4 estão representadas na figura 5.6. 95,1% dos alunos responderam corretamente.

Figura 5.6: Questão 4. Percentagens das respostas.

Algumas justificativas apresentadas para a opção escolhida:

> Pois o carro A percorre o triplo da distância que o carro B percorreu no mesmo período de tempo.
>
> Porque a velocidade média do carro B é de 1km/h e a velocidade média do carro A é de 3km/h, ou seja, três vezes a do B.
>
> Pois as velocidades de B e A são respectivamente 1 e 3 km/h e é possivel afirmar corretamente que $V_a = 3V_b$.

Algumas justificativas das respostas erradas:

> Porque o carro A vai até 9 km (até o seu ponto final), e o carro B para no meio causando a impressão óbvia de que ele é, realmente, o mais lento.
>
> Porque ele percorreu no mesmo tempo o dobro da distância do carro vermelho.

Na questão 5 (figura 5.7), pergunta-se quantas vezes um carro é mais rápido que o outro e o porquê da resposta.

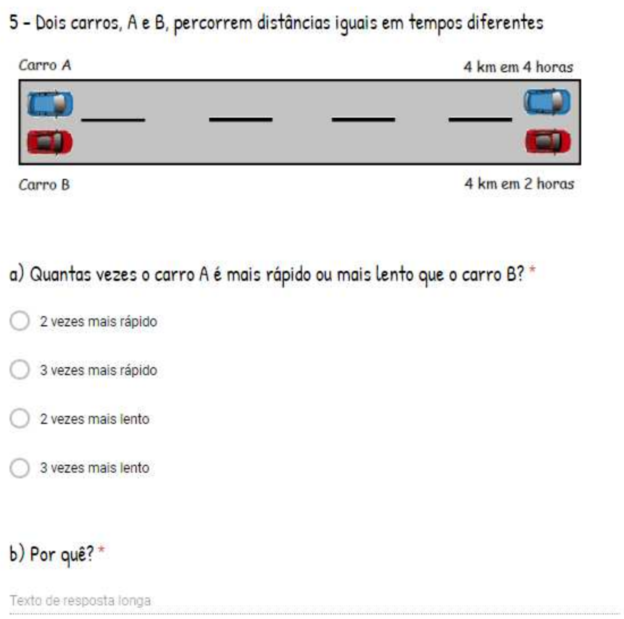


Figura 5.7: Questão 5. Comparação das velocidades, no caso de distâncias diferentes e tempos iguais.

As percentagens de acerto e erro das respostas dos alunos à questão 5 estão representadas na figura 5.8. 91,2% dos alunos responderam corretamente.

Figura 5.8: Questão 5. Percentagens das respostas.

Algumas justificativas apresentadas para a opção escolhida:

> Pois o carro A demorou o dobro do tempo em relação ao carro B para percorrer o mesmo trajeto.
>
> Porque o carro A percorre a mesma distancia no dobro do tempo que o carro B, fazendo assim com que o carro B seja 2 vezes mais rápido que o carro A.
>
> O carro A é 2 vezes mais lento que o carro B, pois embora tenham percorrido a mesma distância, o carro A levou duas horas a mais que o carro B para percorrer os quatros quilômetros.

É interessante observar que alguns alunos conseguem identificar que "B duas vezes mais rápido que A" é equivalente a "A duas vezes mais lento que B".

Questões 6 e 7

As questões 6 e 7 avaliam se os alunos entendem que deslocamento e tempo são ambos necessários para o cálculo da velocidade.

A questão 6 pergunta se a distância é suficiente para o cálculo da velocidade. As percentagens de acerto e erro das respostas dos alunos estão representadas na figura 5.9.

Figura 5.9: Questão 6. Percentagem de acerto e erro.

A questão 7 pergunta se o tempo é suficiente para o cálculo da velocidade. As percentagens de acerto e erro das respostas dos alunos estão representadas na figura 5.10.

Figura 5.10: Questão 7. Percentagem de acerto e erro.

A maioria dos alunos entende que as duas grandezas, deslocamento e tempo, são necessárias para definir a velocidade. É interessante notar que o número de alunos que acreditam não precisar do tempo é bem maior do que os que acreditam não precisar do deslocamento (19% x 12%).

Questão 8

A questão 8 (figura 5.11) encerra o questionário.

Figura 5.11: Questão 8. Cada um interpreta em seu referencial mental.

Algumas respostas dos alunos:

> Sim, por conta da quebra de expectativa, ao achar que Einstein falaria de algum encontro amoroso ou algo do tipo, mas ele incluiu a física, porque a velocidade é a variação da distância sobre a variação do tempo.
>
> Sim, eu entendi a referência com a física e a matéria de velocidade média.
>
> Sim, porque na física para sabermos a velocidade média, calculamos o tempo e o espaço, o deslocamento, causando um humor pois o primeiro homem não se referia a calcular a velocidade e sim falar de sua situação amorosa.
>
> Sim kkkkkk. Afinal, além de ter a imagem de einstein de shortão de praia, demonstra que ele entende bastante de cinemática escalar. Pois ele diz que a partir do espaço e do tempo, é possível calcular a velocidade, através da razão entre as duas primeiras grandezas.
>
> Ri. Bom, foi um trocadilho didático.
>
> Não, pois, embora eu tenha entendido, estou no trem e tudo se torna mais entediante aqui dentro kkkk.
>
> Eu estou p*** da vida , não ri. Desculpe.
>
> Sinceramente ri por ter visto o Einstein de short na praia. Mas o motivo de graça deveria ser a confusão do tempo da garota com a formula da velocidade por parte de Einstein.

5.1.2 Encontro com os alunos

Após aplicação do questionário, houve um encontro de 1h e 40min com cada uma das seis turmas. Os encontros aconteceram no laboratório de física da escola. Cada encontro foi iniciado com uma breve exposição dos fundamentos da abordagem proposta nesta dissertação e do procedimento experimental para medir velocidade instantânea. A figura 5.12 mostra uma foto tirada durante a apresentação.

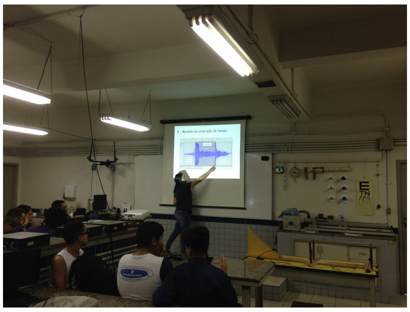


Figura 5.12: A autora da dissertação, durante a exposição inicial.

Em seguida, os alunos realizaram medidas para calcular a velocidade instantânea. Cada turma foi dividida em grupos e cada grupo fez várias medidas da velocidade no pé do plano para uma única distância sobre o plano inclinado (ou 20 cm ou 30 cm ou 40 cm ou 50 cm). As fotos na figura 5.13 foram tiradas durante o experimento.

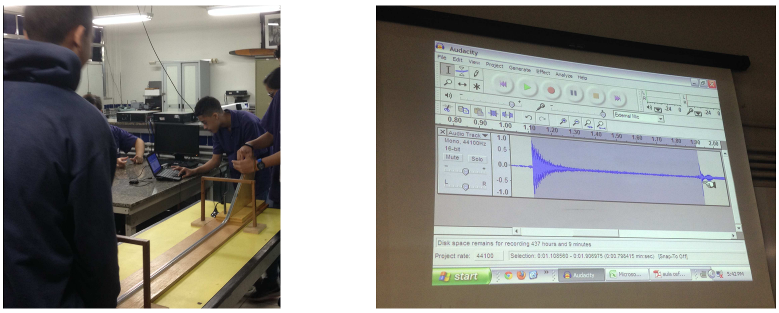


Figura 5.13: Fotos tomadas durante a realização do experimento. À esquerda: alunos fazendo medidas com o "velocímetro" e o computador. À direita: projeção da tela do *Audacity* obtida durante o experimento, mostrando os barulhos dos sinos (nos extremos da faixa escura).

Os valores encontrados pelos alunos de uma turma foram colocados em uma planilha "Excel" (tabela 5.1); a própria planilha executa gráficos da velocidade versus distância e do quadrado da velocidade versus distância. As velocidades instantâneas em função da altura, obtidas em uma das turmas estão apresentadas no gráfico da figura 5.14.

x (m)	tempo (s)	v (m/s)	v^2
0,5	0,531	2,00	4,00
0,5	0,522	2,00	4,00
0,4	0,579	2,50	6,25
0,4	0,582	2,50	6,25
0,3	0,669	3,33	11,11
0,3	0,67	3,33	11,11
0,2	0,837	5,00	25,00
0,2	0,834	5,00	25,00
0,1	1,131	0,88	0,78
0,1	1,263	0,79	0,63

Tabela 5.1: Valores do tempo e da distância sobre o plano, medidas pelos alunos de uma turma, colocados em uma planilha.

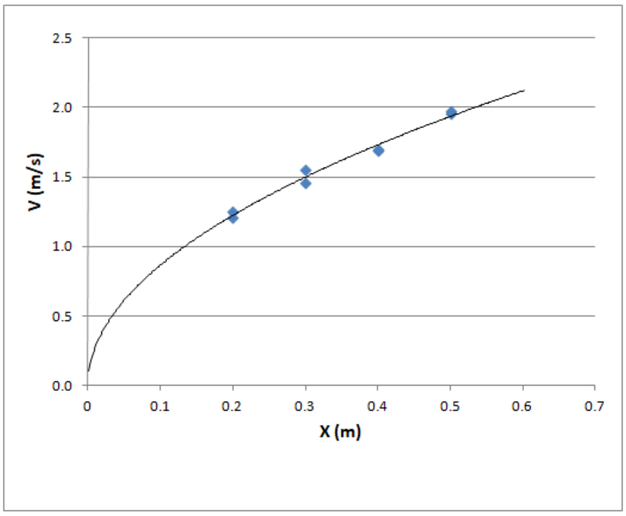


Figura 5.14: Gráfico da velocidade versus distância, obtido por uma das turmas.

Os alunos já estavam familiarizados com a cinemática do movimento uniformemente acelerado e conheciam a lei $v^2 = 2ax$. O gráfico correspondente a essa lei, figura 5.15, foi discutido em sala. Por ser uma linha reta, os resultados mostram que o movimento na rampa é uniformemente acelerado; a aceleração é, também, calculada pelo "Excel" e se discutiu porque o valor encontrado, 3,75 m/s^2, é diferente do valor da aceleração de queda livre na cidade do Rio de Janeiro, 9,79 m/s^2 (a diferença resulta da inclinação do plano e da rotação da bolinha).

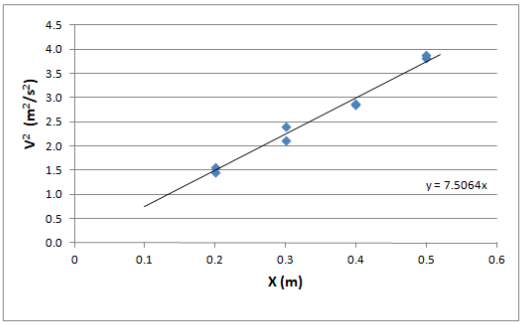


Figura 5.15: Gráfico do quadrado da velocidade versus distância, obtido por uma das turmas. O valor da aceleração no plano inclinado é $a = 3{,}75$ m/s^2.

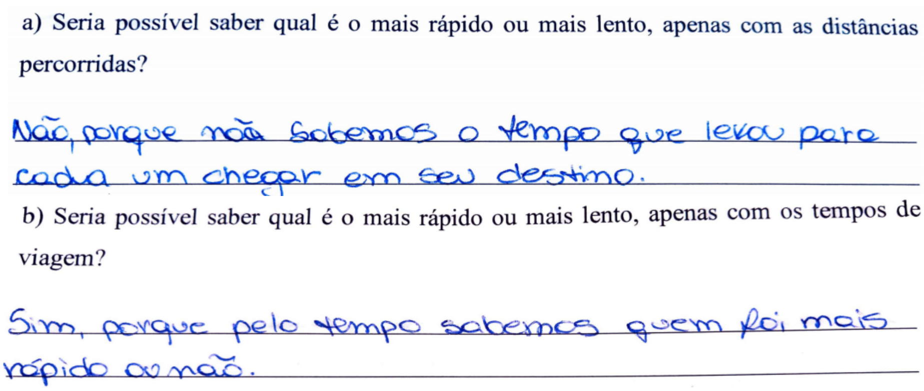
5.2 Aplicação na escola 2

Nesta seção, é feito o relato das atividades aplicadas na escola 2, realizadas com um grupo de 9 alunos. As atividades consistiram das 5 unidades apresentadas no apêndice A. As unidades necessitaram de tempos de aula de diferente duração.

5.2.1 Unidade 1

O primeiro encontro teve duração de 50 minutos, que corresponde a um tempo de aula. Os alunos receberam o teste diagnóstico correspondente à unidade 1, cujo objetivo é analisar o conhecimento que os estudantes possuem sobre a ideia de rapidez. O teste é o mesmo que foi aplicado na escola 1.

Nas questões de 1 a 5 do teste, a taxa de acerto foi 100%, possivelmente pelo fato dos alunos terem anteriormente estudado elementos de cinemática no ensino fundamental. Contudo, as respostas à questão 6 mostram que os alunos não entenderam completamente que as duas variáveis, distância e tempo, são necessárias para comparar velocidades. Sete dentre nove alunos não souberam respondê-la. Um exemplo de resposta errada está na figura 5.16.



a) Seria possível saber qual é o mais rápido ou mais lento, apenas com as distâncias percorridas?

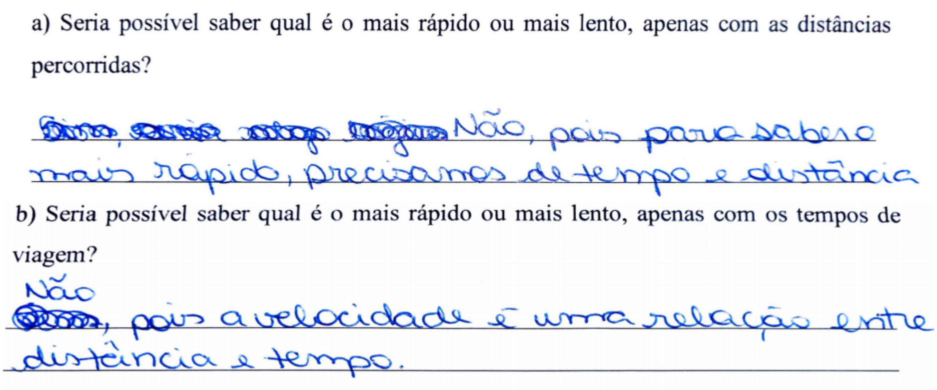
Não, porque não sabemos o tempo que levou para cada um chegar em seu destino.

b) Seria possível saber qual é o mais rápido ou mais lento, apenas com os tempos de viagem?

Sim, porque pelo tempo sabemos quem foi mais rápido ou não.

Figura 5.16: Resposta de uma aluna que errou a questão 6.

Como nesse exemplo, todos que erraram entendem que não podem determinar o mais rápido entre dois corpos sem o tempo percorrido. Porém, todos acreditam que isso pode ser realizado quando o tempo é dado sem a distância percorrida. Uma das duas respostas corretas está na figura 5.17.



a) Seria possível saber qual é o mais rápido ou mais lento, apenas com as distâncias percorridas?

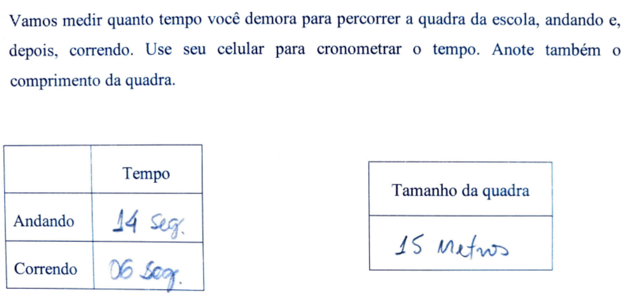
Não, pois para saber o mais rápido, precisamos de tempo e distância

b) Seria possível saber qual é o mais rápido ou mais lento, apenas com os tempos de viagem?

Não, pois a velocidade é uma relação entre distância e tempo.

Figura 5.17: Resposta de uma aluna que acertou a questão 6.

A unidade 1 termina com uma atividade extra, na qual os alunos medem o comprimento da quadra da escola e o tempo necessário para percorrê-la, andando e correndo. A figura 5.18 mostra uma resposta. A medida da quadra foi realizada por um aluno em unidades do tamanho de seu tênis, posteriormente convertida em metros; todos os alunos copiaram esse resultado.


Vamos medir quanto tempo você demora para percorrer a quadra da escola, andando e, depois, correndo. Use seu celular para cronometrar o tempo. Anote também o comprimento da quadra.

	Tempo
Andando	14 seg.
Correndo	06 seg.

Tamanho da quadra
15 Metros

Figura 5.18: Resposta de um aluno à atividade extra da unidade 1.

5.2.2 Unidade 2

A unidade 2 necessitou de 1h e 40min, correspondendo a 2 tempos de aula, para aplicação da atividade. A aula foi iniciada com a discussão de noções quantitativas de velocidade. A questão 6 da unidade anterior foi novamente discutida e, após a definição de velocidade, os alunos conseguiram responder corretamente à pergunta. Depois dessa etapa, as questões dessa unidade foram apresentadas aos alunos.

Na questão 1, os alunos calcularam a velocidade com os dados obtidos na atividade extra da unidade 1 (figura 5.18); um exemplo de resposta está mostrado na figura 5.19. Como o aluno do exemplo, todos encontraram dificuldades em relacionar a unidade da velocidade com as unidades da distância e do tempo.

Nas questões 2 e 3, velocidades foram novamente calculadas. As situações apresentadas foram as mesmas analisadas semi-quantitativamente na unidade anterior. Todos os alunos acertaram o cálculo da velocidade e compararam corretamente esses resultados com os da unidade anterior. A surpresa demonstrada por uma aluna pelos valores terem coincidido está registrada na figura 5.20: “Isso é macumba”.

a) Agora calcule sua velocidade para percorrer a quadra da escola, usando os dados que anotou na unidade 1.

$V = \frac{15}{6}$ $V = 2,5$ | $V = \frac{15}{14}$ $V = 1,07$

b) Em que unidade você mediu a quadra da escola? E em que unidade você mediu o tempo para percorrer a quadra?

Para medir a quadra usamos metro e para medir o tempo usamos segundo.

c) A velocidade que você calculou tem unidade? Se sim, qual é?

Sim, não sei.

Figura 5.19: Cálculo da velocidade feito por uma aluna com as medidas realizadas na quadra da escola.

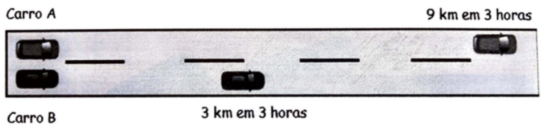
Questão 2

a) Calcule as velocidades dos carros A e B.

A

$V = \frac{9}{3}$

$V = 3$



B

$V = \frac{3}{3}$

$V = 1$

b) Esses valores são compatíveis com sua resposta à questão 4 da unidade 1?

Sim, isso é macumba

1

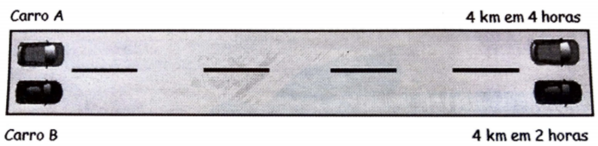
Unidade 2

Questão 3

a) Calcule as velocidades dos carros A e B

A: $V = \frac{4}{4}$ $V = 1$

B: $V = \frac{4}{2}$ $V = 2$

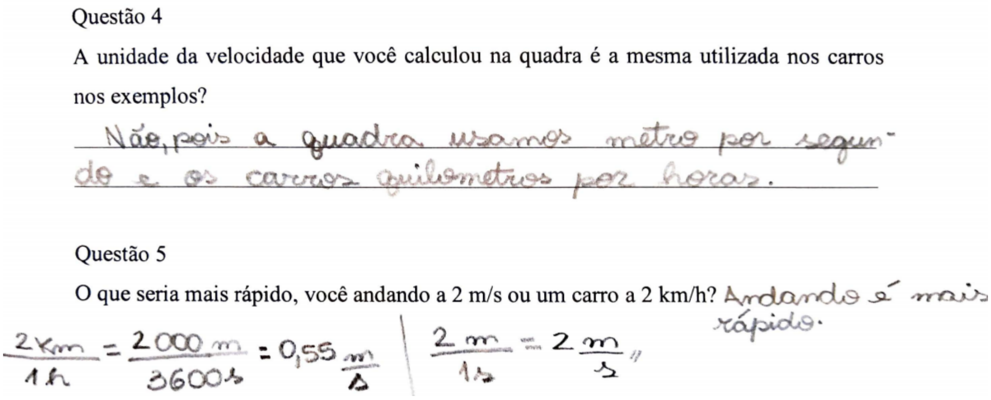


b) Esses valores são compatíveis com sua resposta à questão 5 da Unidade 1?

Sim, isso é macumba

Figura 5.20: Resposta de uma aluna ao cálculo e comparação de velocidades.

As questões 4 e 5 estendem a discussão sobre unidades. Para que os alunos pudessem respondê-las, foi necessário apresentar os múltiplos e submúltiplos do *metro* e do *segundo*. A figura 5.21 mostra as respostas de um aluno às duas questões.



Questão 4

A unidade da velocidade que você calculou na quadra é a mesma utilizada nos carros nos exemplos?

Não, pois a quadra usamos metro por segundo e os carros quilometros por horas.

Questão 5

O que seria mais rápido, você andando a 2 m/s ou um carro a 2 km/h? Andando é mais rápido.

$\frac{2\,km}{1\,h} = \frac{2000\,m}{3600\,s} = 0{,}55\,\frac{m}{s}$ | $\frac{2\,m}{1\,s} = 2\,\frac{m}{s}$

Figura 5.21: Respostas de uma aluna às questões sobre unidades.

Durante a discussão prévia um aluno comentou ao ler a questão 5:

> Lógico que andar de carro 2 km/h é mais rápido que andar a pé 2 m/s. Não tem como o carro ser mais devagar

Enquanto os alunos calculavam, foi obtida a relação entre a unidade da velocidade no Sistema Internacional (metros por segundo) e aquela que aparece normalmente no dia-a-dia (quilômetros por hora).

Na questão 6 é preparado o caminho para a discussão posterior, que a velocidade (média) depende do trecho considerado. Quanto ao item *c* dessa questão, 5 alunos entenderam que o motorista estava correto ao alegar não ter ultrapassado a velocidade máxima permitida na via. A figura 5.22 mostra a resposta de uma aluna.

Porém, 4 alunos entenderam que o motorista estava errado, pois no segundo trecho sua velocidade estava maior que a máxima permitida. A figura 5.23 mostra a resposta de uma aluna.

Questão 6

A Linha Vermelha no RJ possui 22 km de extensão e a velocidade máxima permita é de 80 km/h. Considere que um carro percorre o primeiro trecho nessa via, de 12 km, em 15 minutos. O segundo trecho, de 10 km, é percorrido em 5 minutos.

a) Qual a velocidade, em km/h, do carro em cada trecho?

$V = \frac{12}{15m} = \frac{12}{0{,}25} = 48 \frac{km}{h}$

$V = \frac{10}{5m} = \frac{10}{0{,}09} = 111{,}1 \frac{km}{h}$

b) E qual a velocidade, em km/h, do carro em toda a extensão da linha vermelha?

$V = \frac{22}{20m} = \frac{22}{0{,}3h} = 73{,}3 \frac{km}{h}$

c) O motorista recebeu multa por um radar no segundo trecho. O motorista recorreu alegando que a sua velocidade na Linha Vermelha estava abaixo do valor permitido na via. O motorista tem razão ou não? Por que?

O motorista tem razão. Na linha Vermelha é permitido 80 km/h e ele estava à 73,3 km/h. A questão está falando da linha toda e não sobre o trecho que ele estava acima da velocidade.

Figura 5.22: Resposta de uma aluna à questão sobre o limite de velocidade.

Questão 6

A Linha Vermelha no RJ possui 22 km de extensão e a velocidade máxima permita é de 80 km/h. Considere que um carro percorre o primeiro trecho nessa via, de 12 km, em 15 minutos. O segundo trecho, de 10 km, é percorrido em 5 minutos.

a) Qual a velocidade, em km/h, do carro em cada trecho?

Velocidade 1 = $\frac{12}{\cancel{15}\ 0{,}25}$ Velocidade 2 = $\frac{10}{\cancel{0{,}83}\ 0{,}083}$

Velocidade 1 = ~~0,8 km~~ 48 km/h Velocidade 2 = 120,4 Km/h

b) E qual a velocidade, em km/h, do carro em toda a extensão da linha vermelha?

Velocidade total = $\frac{22}{0{,}33}$

Velocidade total = 66,6 Km/h

c) O motorista recebeu multa por um radar no segundo trecho. O motorista recorreu alegando que a sua velocidade na Linha Vermelha estava abaixo do valor permitido na via. O motorista tem razão ou não? Por que?

Não, pois no Segundo trecho ele estava com a velocidade maior que o valor permitido

Figura 5.23: Resposta de uma aluna à questão sobre o limite de velocidade.

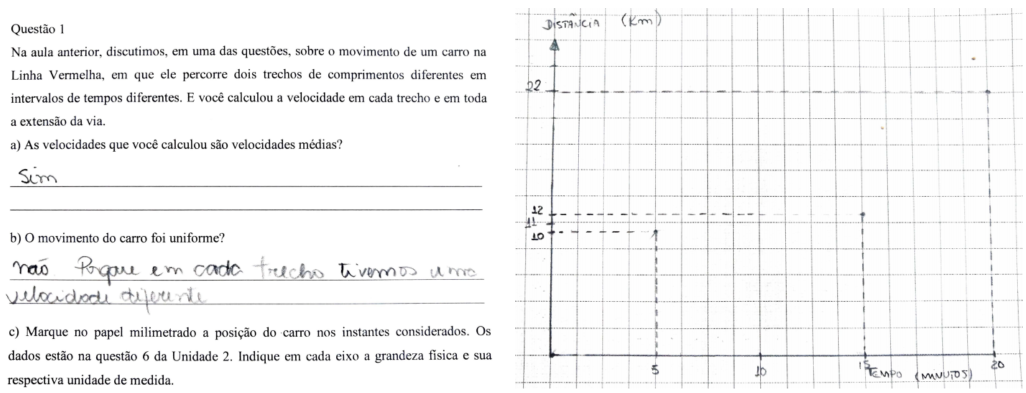
5.2.3 Unidade 3

A aplicação da terceira unidade precisou de 3 tempos de aula (2h e 30min), pois os alunos não estavam familiarizados com a construção de gráficos. A aula iniciou-se discutindo que a velocidade tratada nas aulas anteriores é a velocidade média, depois foi enfatizado que a velocidade média depende do percurso considerado e que diferentes trechos podem ter diferentes velocidades médias. Com isso, os alunos conseguiram perceber que, na questão da unidade anterior, o motorista deveria ser multado, porque foi levado em consideração o segundo trecho. Houve os seguintes comentários:

> Ah! Professora, então é só no segundo trecho né?
>
> Então, ele precisa ser multado porque tava muito mais rápido do que podia.

Assim, essa questão foi novamente discutida com os alunos. Depois, a fórmula que é comumente utilizada nos livros didáticos foi apresentada ($v = \Delta S/\Delta t$). O último conceito estudado nessa unidade foi o de movimento uniforme, definido como aquele em que a velocidade média é igual em qualquer trecho.

A figura 5.24 mostra a resposta de um dos alunos à questão 1, que retomava e estendia a questão da unidade anterior, incluindo a construção de um gráfico. Como os alunos não sabiam construir gráficos e nem como utilizar o papel milimetrado, uma parte da aula foi destinada a isso.



Questão 1

Na aula anterior, discutimos, em uma das questões, sobre o movimento de um carro na Linha Vermelha, em que ele percorre dois trechos de comprimentos diferentes em intervalos de tempos diferentes. E você calculou a velocidade em cada trecho e em toda a extensão da via.

a) As velocidades que você calculou são velocidades médias?

Sim

b) O movimento do carro foi uniforme?

não Porque em cada trecho tivemos uma velocidade diferente

c) Marque no papel milimetrado a posição do carro nos instantes considerados. Os dados estão na questão 6 da Unidade 2. Indique em cada eixo a grandeza física e sua respectiva unidade de medida.

Figura 5.24: Resposta de um aluno à questão sobre velocidade média e movimento uniforme.

Na questão 2, foi discutido o gráfico da posição em função do tempo em um movimento uniforme. A figura 5.25 apresenta uma das respostas dos alunos. Todos eles reconheceram que o movimento era uniforme. Embora não tivesse sido perguntado, os alunos comentaram que também perceberam que o gráfico feito na questão 1 correspondia a um movimento não uniforme.

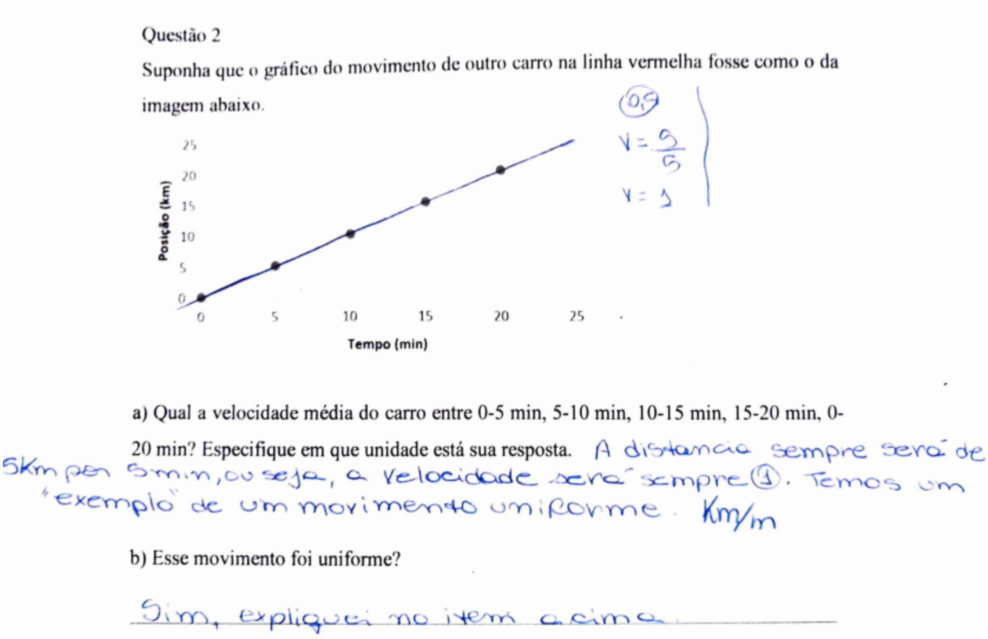
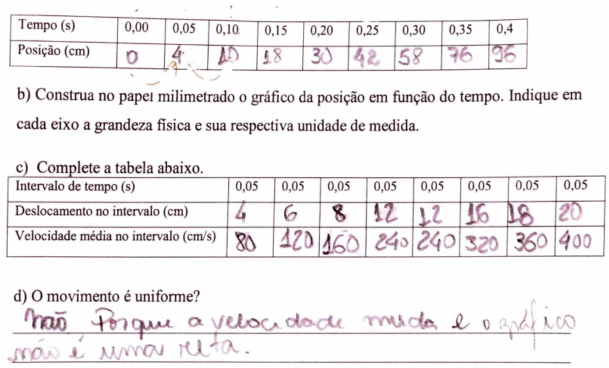


Figura 5.25: Resposta de uma aluna à questão 2 sobre análise do gráfico para o movimento uniforme.

Na questão 3, os alunos calcularam a velocidade média e construíram um gráfico da posição em função do tempo para um movimento não uniforme, mais especificamente para a queda de uma bolinha. Todos os alunos compreenderam através da análise gráfica e das medidas da velocidade média que o movimento de queda da bolinha não é uniforme, como mostra o exemplo na figura 5.26.



Tempo (s)	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,4
Posição (cm)	0	4	10	18	30	42	58	76	96

b) Construa no papel milimetrado o gráfico da posição em função do tempo. Indique em cada eixo a grandeza física e sua respectiva unidade de medida.

c) Complete a tabela abaixo.

Intervalo de tempo (s)	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
Deslocamento no intervalo (cm)	4	6	8	12	12	16	18	20
Velocidade média no intervalo (cm/s)	80	120	160	240	240	320	360	400

d) O movimento é uniforme?

não Porque a velocidade muda e o gráfico não é uma reta.

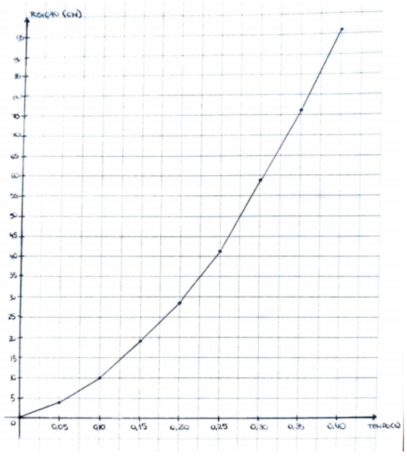


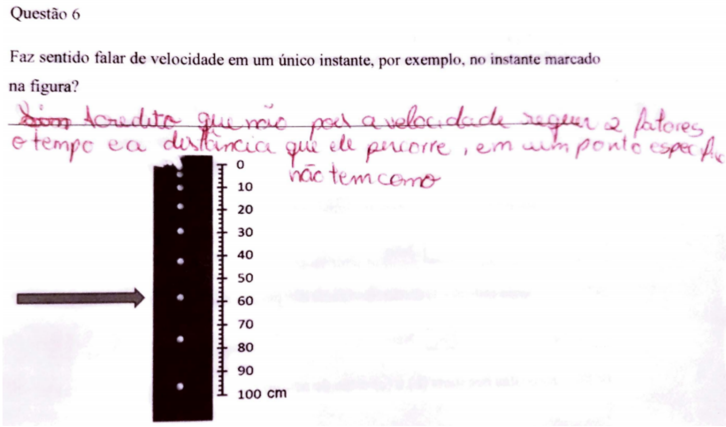
Figura 5.26: Análise de um aluno do movimento de queda de uma bolinha.

As questões 4 e 5 sintetizam o estudo da descrição gráfica de movimentos uniforme e não uniforme; os alunos responderam corretamente às perguntas.

Finalmente, na última questão da unidade perguntou-se se faria sentido falar da velocidade em um único instante. A figura 5.27 mostra as respostas dadas por duas alunas a essa questão. Essas respostas foram tão interessantes que vale a pena destacá-las:

> Acredito que não pois a velocidade requer 2 fatores o tempo e a distancia que ele percorre, em um ponto específico não tem como.
>
> Não, pois não seria a velocidade de um percurso e a velocidade depende de um percurso para existir.

As duas alunas mostram claramente a dificuldade que levou à elaboração desta dissertação: em um ponto não há distância nem intervalo de tempo, logo não deveria ser possível falar de velocidade. Os outros alunos também acharam que não faria sentido falar de velocidade em um ponto, mas suas respostas não foram tão articuladas quanto as selecionadas.



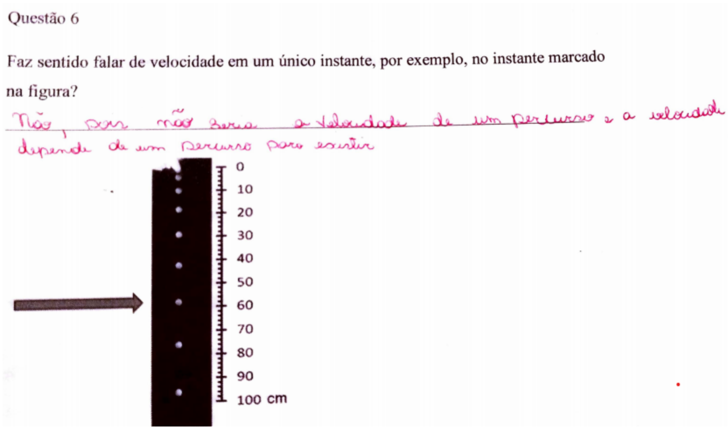


Figura 5.27: Respostas à pergunta sobre velocidade em um ponto dadas por duas alunas.

5.2.4 Unidade 4

A unidade necessitou de 4 tempos de aula (3h e 20min). Utilizou-se a apresentação mostrada no apêndice B para fazer uma revisão da discussão feita nas unidades anteriores e para explicar o conceito de velocidade instantânea proposto pelo medievais. Surgiram alguns questionamentos no decorrer da explicação, como:

> Professora, então a velocidade vai ser igual depois do ponto P?
>
> Ahhhh! Então a gente pode calcular a velocidade de um instante usando o que a gente tava estudando nas outras aulas?

Após essa discussão, discutiu-se como a ideia dos mertonianos foi aplicada em uma situação concreta (um plano inclinado seguido por um horizontal) por Galileu. O "velocímetro galileano" foi então apresentado aos alunos.Também foi mostrado como utilizá-lo para medir a velocidade instantânea e como realizar as medidas de tempo utilizando gravações de sons. A figura 5.28 mostra alguns alunos realizando a atividade.

Figura 5.28: Alunos realizando a atividade

A tabela 5.2 apresenta as velocidades instantâneas obtidas pelos alunos. Para cada distância de descida no plano inclinado os alunos mediram três vezes o tempo que a bolinha levou para percorrer uma distância $D = 0{,}6$m no plano horizontal. O tempo T mostrado na tabela é a média dessas três medidas. A velocidade instantânea $v = D/T$ foi calculada a partir dessa média. A tabela também mostra o quadrado da velocidade instantânea, v^2.

x (m)	T médio (s)	v (m/s)	v^2 (m^2/s^2)
0,5	0,309	1,94	3,78
0,4	0,344	1,74	3,04
0,3	0,400	1,50	2,25
0,2	0,508	1,18	1,40
0,1	0,666	0,90	0,81

Tabela 5.2: As distâncias de descida x e o tempo médio T necessário para percorrer uma distância fixa (0,6m) no plano horizontal. A velocidade instantânea ao final da descida é v; seu quadrado é v^2.

Com esses dados, os alunos construíram o gráfico da velocidade instantânea em função da distância percorrida no plano inclinado, mostrado na figura 5.29.

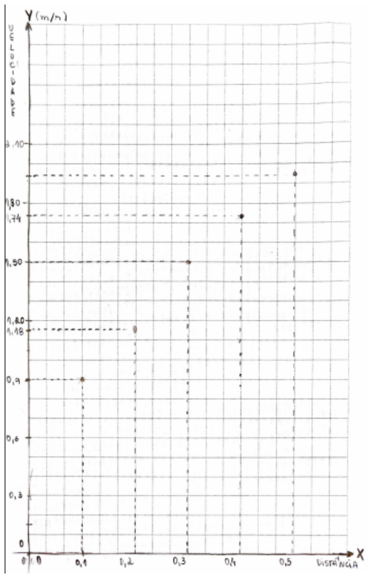


Figura 5.29: Gráfico da velocidade instantânea em função de x feito por uma aluna.

Durante a confecção da tabela e dos gráficos, foi ressaltado para os alunos que eles estavam medindo a velocidade instantânea, ou seja, algo que, na unidade anterior, julgaram não ter sentido.

Em seguida, foi pedido aos alunos que construíssem o gráfico do quadrado da velocidade em função da distância de descida. A figura 5.30 apresenta o gráfico de uma aluna.

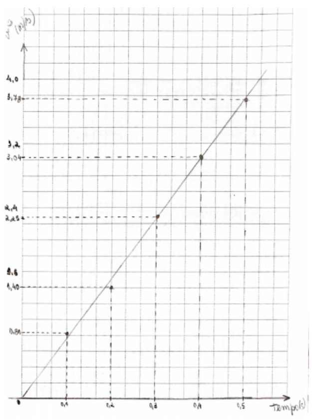
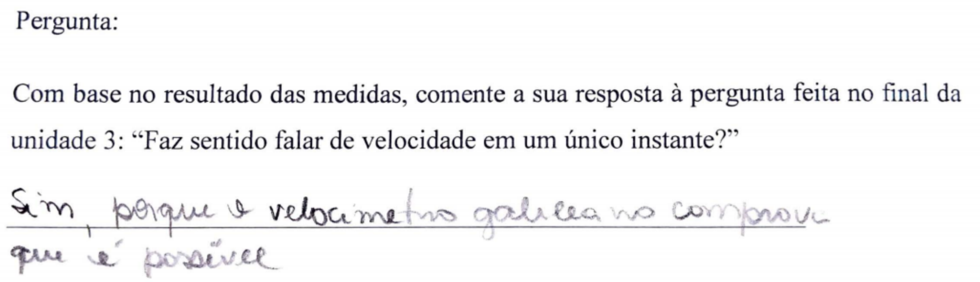


Figura 5.30: Gráfico da velocidade ao quadrado, v^2, em função da distância x feito por uma aluna.

Foi discutido então que os últimos gráficos feitos pelos alunos, como o da figura 5.30, sugerem que v^2 é proporcional a x. Foi mencionado que essa proporcionalidade caracteriza um movimento conhecido como uniformemente variado e foram feitos alguns comentários sobre o conceito de aceleração. Também foi apresentada aos alunos a equação $v^2 = 2ax$ e comentado que a aceleração poderia ser obtida a partir desses gráficos.

A unidade terminou refazendo a pergunta sobre a possibilidade de se falar sobre a velocidade em um instante. A figura 5.31 mostra a resposta dada por um aluno.


Pergunta:

Com base no resultado das medidas, comente a sua resposta à pergunta feita no final da unidade 3: "Faz sentido falar de velocidade em um único instante?"

Sim, porque o velocimetro galileano comprova que é possível

Figura 5.31: Resposta de um aluno à pergunta sobre a velocidade em um ponto.

5.2.5 Unidade 5

Para realizar a atividade na unidade 5, foram necessários 4 tempos de aulas (3h e 20min). A unidade foi iniciada discutindo que geralmente a velocidade e a posição são descritas em função do tempo. Após isso, comentou-se com os alunos que, para medir o tempo t que a bolinha leva para descer a distância x, é preciso registrar o instante em que ela é solta, algo difícil de realizar com a gravação do som de um sino. Por isso, o instante inicial da descida é marcado com uma batida de palmas. Com esse método, descrito no capítulo 4, o tempo t, de descida, para uma distância x, é medido e comparado com o tempo T para percorrer uma distância $D = 2x$ no plano horizontal, obtido como antes. Após algumas medidas os alunos perceberam que t e T eram praticamente iguais. Foi comentado que esse resultado ($t = T$), conhecido como Regra da Dupla Distância, permitia simplificar as medidas do tempo: fazendo $D = 2x$

pode-se dispensar as palmas e fazer apenas as medidas de T no percurso horizontal.

Com esse procedimento os alunos determinaram os valores de v e x em função do tempo de descida t. Foram realizadas três medidas de T para cada distância x e a velocidade instantânea foi calculada com a média desses tempos. A tabela 5.3 mostra os dados obtidos no experimento.

x (m)	T médio (s)	v (m/s)
0,5	0,52	1,92
0,4	0,46	1,74
0,3	0,40	1,50
0,2	0,34	1,18

Tabela 5.3: A distância de descida x, o tempo médio T (igual ao tempo de descida t) para percorrer a distância $D = 2x$ na horizontal e a velocidade instantânea $v = D/T$.

Utilizando os dados da tabela, os alunos construíram os gráficos da velocidade em função do tempo e da distância em função do tempo. A figura 5.32 mostra exemplos desses gráficos.

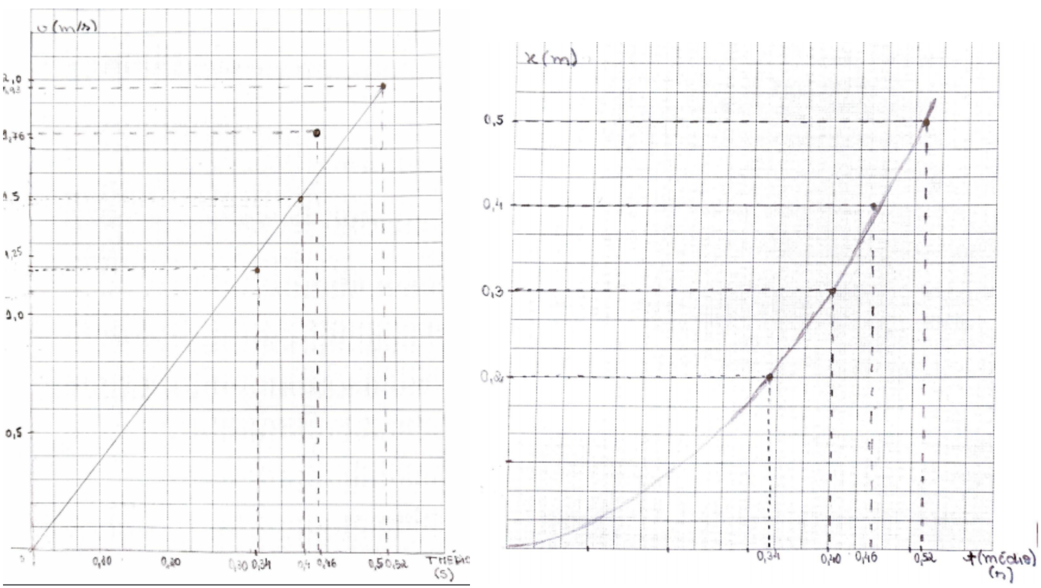


Figura 5.32: Gráficos da velocidade e posição em função do tempo feitos por uma aluna. As linhas são apenas guias para os olhos.

Finalmente, foi discutido com os alunos que o gráfico de v por t sugere que a velocidade instantânea é proporcional ao tempo de descida e que essa é a descrição usual do que se chama o movimento uniformemente variado. Com relação ao gráfico de x por t foi ressaltada sua semelhança com o gráfico 5.27 obtido na unidade 3, correspondente à foto estroboscópica de uma bolinha em queda livre. Foi também mencionado que todos esses resultados seriam objeto de estudo em cursos posteriores.

Capítulo 6

Considerações Finais

Muitos autores já utilizaram a história da ciência no ensino introdutório de física. Na década de 60 o livro *Harvard Project Physics*, de F. Rutherford, G. Holton e F. Watson, propunha o ensino da física com uma perspectiva histórica. Nas palavras de Holton (p. 20), o livro concebia a física "na maneira mais ampla e humanista possível e não apenas nos termos pré-profissionais". Em outra vertente, relacionada à pesquisa em ensino de física, a história revelou-se um guia útil para a compreensão das noções intuitivas que os estudantes possuem antes da instrução. Um exemplo, estudado por M. McCloskey, é o paralelo que pode ser estabelecido entre as concepções dos alunos sobre a dinâmica e as ideias medievais. Segundo McCloskey (p. 123), a teoria dinâmica intuitiva "tem uma semelhança notável com a teoria pré-newtoniana do ímpeto".

Esta dissertação sugere um modo, talvez ainda pouco explorado, de uso da história para ensinar um tema da física, no caso, a velocidade instantânea. A história não serve unicamente para identificar ideias semelhantes às noções intuitivas dos alunos, mas fornece instrumentos para superar as dificuldades de aprendizagem causadas por essas noções. Isso pode ser associado ao fato dos pensadores que fizeram a física terem de criar um novo conhecimento a partir de noções a eles disponíveis, mudando-as e colocando-as em outro contexto

O modelo tradicional para ensinar o conceito de velocidade instantânea parte da utilização do cálculo diferencial, que não é conhecido pela maior parte dos alunos do ensino médio e possivelmente não é familiar mesmo a alunos que iniciam o curso universitário. A proposta de ensino apresentada não está baseada no conceito de limite; ela foi desenvolvida a partir das ideias de Galileu, que deu um sentido operacional à definição mertoniana de velocidade instantânea, formulada antes da invenção do cálculo diferencial.

Partindo das ideias dos mertonianos e de Galileu, foi construído um aparato que que foi chamado de "velocímetro galileano", para medir a velocidade instantânea em uma dada situação física. Com isso, foi desenvolvida uma sequência didática para o ensino de velocidade instantânea. Essa sequência foi aplicada em duas escolas com resultados promissores.

Os alunos da primeira escola já tinham conhecimentos básicos de cinemática. Com isso, a atividade pôde ser realizada rapidamente, em 1h e 40min. Mesmo nesse tempo reduzido, os alunos não apenas realizaram medidas da velocidade instantânea; em geral eles demonstraram uma compreensão satisfatória desse conceito.

Os alunos da segunda escola tinham apenas noções rudimentares do conceito de velocidade, vindas do ensino fundamental. Durante a atividade os alunos estudaram os conceitos da velocidade média e movimento uniforme, chegando sem dificuldades aparentes ao de velocidade instantânea. Ao final das atividades alguns comentários foram feitos por eles, como:

> Genial o que eles fizeram, né? Tipo o Galileu com os planos. O movimento uniforme tem a mesma velocidade em qualquer trecho do plano que tá reto

> Eu ainda tô abismada que o tempo para percorrer 50cm aqui é o mesmo tempo pra bolinha percorrer 100cm ali.

Esses comentários mostram que os alunos não apenas entenderam o conteúdo das atividades, mas se interessaram por elas e até se surpreenderam com alguns resultados.

A sequência de ensino proposta não é necessariamente parte de um curso de cinemática; os resultados na segunda escola mostram que é possível apresentá-la de forma independente. Entretanto, é claro que ela pode ser produtivamente integrada a um curso usual de cinemática. Isso ocorre não apenas por ser um recurso a mais no difícil ensino do conceito de velocidade instantânea, mas também porque os dados experimentais obtidos podem ser ferramenta úteis na discussão de temas como a queda dos corpos, funções horárias e as equações do movimento de queda, entre outros.

É importante ressaltar que o objetivo desta proposta não é substituir a abordagem tradicional da velocidade instantânea, mas estendê-la. Como observou Arons, poucos alunos vão absorver esse conceito em um primeiro encontro e devem ter a chance de reencontrá-lo várias vezes. Esperamos que esta dissertação traga uma contribuição nesse sentido.

Apêndice A

Material Instrucional: O conceito de velocidade instantânea

O material instrucional consiste em uma proposta alternativa para ensinar o conceito de velocidade instantânea.

Usualmente, o conceito de velocidade instantânea é introduzido por um processo de limite, o qual é de difícil entendimento para um aluno do ensino médio. Entretanto, mesmo sem ter um conceito matemático de limite, os filósofos mertonianos, no século XIV, deram ao conceito de velocidade instantânea uma definição precisa. Cerca de duzentos anos depois, Galileu Galilei usou a definição mertoniana e demonstrou as leis do movimento uniformemente acelerado. Como esses pensadores enfrentaram e contornaram as dificuldades envolvidas no processo de limite, seus métodos inspiram uma forma alternativa de ensino do conceito de velocidade instantânea. A proposta aqui apresentada é inspirada na concretização que Galileu deu à definição mertoniana de limite. Essa concretização sugere a construção de um "velocímetro", o qual permite introduzir o conceito de velocidade instantânea de modo operacional.

A sequência didática consiste de cinco unidades. Essas unidades são trabalhadas em sala de aula. Cada unidade não precisa corresponder a uma aula inteira; o material a ser trabalhado em cada aula depende da disponibilidade do professor.

Descrição do material instrucional

Unidade 1

Nesta unidade, é feita uma avaliação diagnóstica do conhecimento dos alunos sobre o conceito de velocidade. Eles respondem a um questionário, em sala de aula.

1. A primeira questão analisa a noção subjetiva dos alunos sobre o conceito de velocidade. Nesta questão, duas imagens de um personagem de “videogame”, Sonic, são apresentadas em situações distintas e se pergunta em qual delas ele é mais rápido. Pede-se, também, uma justificativa para a resposta.

2. Nas questões 2 e 3, são apresentadas duas situações diferentes e se pede uma avaliação qualitativa sobre qual corpo é o mais rápido. A questão 2 apresenta dois carros percorrendo distâncias diferentes em tempos iguais; pergunta-se qual carro é mais rápido e o porquê da resposta. A questão 3 apresenta dois carros percorrendo distâncias iguais em tempos diferentes; pergunta-se qual carro é mais rápido e o porquê da resposta.

3. Nas questões 4 e 5, pede-se uma avaliação quantitativa das mesmas situações das questões 2 e 3, respectivamente. Na questão 4, pergunta-se quantas vezes um carro, na questão 2, é mais rápido que o outro e o porquê da resposta. Na questão 5, pergunta-se quantas vezes um carro, na questão 3, é mais rápido que o outro e o porquê da resposta.

4. A questão 6 avalia se os alunos entendem que deslocamento e tempo são ambos necessários para o cálculo da velocidade.

5. A última questão é uma piada sobre o conceito de velocidade, envolvendo Einstein, em que distância e tempo têm significados diferentes dos da Física.

A unidade termina com uma tarefa: medir quanto tempo o aluno demora para percorrer a quadra da escola, em duas situações, andando e, depois, correndo.

Unidade 2

Nesta unidade, a definição formal de velocidade média é introduzida. A seguir, pede-se aos para aplicar a definição em várias situações.

1. Na questão 1, pede-se ao aluno que aplique a definição para calcular a velocidade com que percorreu a quadra, pede-se as unidades de medida do tempo, da distância e da velocidade e, finalmente, que compare com a resposta anteriormente dada à mesma pergunta.

2. Na questão 2, é dada a mesma situação da questão 4 da Unidade 1. Dois carros percorrem distâncias diferentes em tempos iguais; pede-se ao aluno a velocidade média de cada carro e para comparar com a resposta anteriormente dada à mesma pergunta.

3. Na questão 3, é dada a mesma situação da questão 5 da Unidade 1. Dois carros percorrem distâncias iguais em tempos diferentes. Pede-se ao aluno a velocidade média de cada carro e para comparar com a resposta anteriormente dada à mesma pergunta.

4. Nas questões 4 e 5, o sistema de unidades de velocidade é trabalhado.

5. Na questão 6, é introduzido um movimento em que trechos são percorridos uniformemente, mas com velocidades diferentes. Pede-se a velocidade em cada trecho e no percurso total. Então, é apresentada uma situação, cuja resposta envolve o conceito de velocidade instantânea.

Unidade 3

Nesta unidade, os conceitos de movimento uniforme e de movimento não uniforme são introduzidos. A Unidade começa definindo movimento uniforme como aquele em que distâncias iguais são percorridas em tempos iguais. Então, várias perguntas são feitas.

1. Na questão 1, o movimento não uniforme na questão 6 da Unidade 2 é trabalhado. Pergunta-se se as velocidades anteriormente calculadas são velocidades médias, pegunta-se se o movimento é uniforme e, finalmente, pede-se que o aluno marque em um papel milimetrado posições e instantes, de acordo com o enunciado da questão 6.

2. Na questão 2, é dado o gráfico posição versus tempo de um movimento uniforme. Pede-se as velocidades em vários trechos de igual duração e se pergunta se o movimento é uniforme.

3. Na questão 3, é mostrada uma imagem estroboscópica da queda de uma bolinha. As fotos são tomadas a cada 0,05 segundos e uma régua adicionada à foto mostra a posição. Os alunos preenchem uma tabela com as posições ao final de cada intervalo de 0,05 segundos, de 0,00 até 0,40 segundos, e colocam esses valores em um gráfico posição versus tempo. Depois, preenchem uma tabela com os deslocamentos e as velocidades médias em intervalos sucessivos de 0,05 segundos. Finalmente, pergunta-se se o movimento é uniforme.

4. Na questão 4, o conceito de movimento uniforme é fixado; dá-se a definição de movimento uniforme como aquele em que distâncias iguais são percorridas em iguais intervalos de tempo e se pergunta se é correto ou falso. A seguir, pergunta-se se, nos gráficos das questões 2 e 3, respectivamente, distâncias iguais são percorridas em tempos iguais e pede-se que compare com a definição de movimento uniforme, no primeiro ítem.

5. Na questão 5, é dado um gráfico posição versus tempo, em que são representados dois movimentos, um descrito por uma reta e o outro,

por uma curva. Pede-se ao aluno para identificar qual é o movimento uniforme e qual é o não uniforme.

6. A questão 6 mostra a foto estroboscópica anterior e se pergunta se é possível falar de velocidade no instante apontado por uma seta.

Unidade 4

Nesta unidade, é introduzida a proposta de ensino.

1. Na primeira parte, é feita uma apresentação em sala de aula sobre a fundamentação teórica, entitulada "Aristóteles, os mertonianos e Galileu".

2. Na segunda parte, entitulada "Um velocímetro galileano", é proposto um experimento para o cálculo da velocidade instantânea. Essa proposta é inspirada nas ideias de Galileu Galilei, descrita na primeira parte.

   Os dados são colocados em uma planilha e construído o gráfico velocidade versus distância e o gráfico quadrado da velocidade versus distância.

A Unidade 4 termina com a pergunta anteriormente feita, na questão 6 da Unidade 3: "Faz sentido falar de velocidade em um único instante?"

Unidade 5

Na unidade 4, os experimentos com o "velocímetro galileano" mostram a dependência da velocidade instantânea no pé do plano com a distância de descida. Na unidade 5, resultados com o "velocímetro galileano" são complementados, de modo a se obter como a velocidade instantânea varia com o tempo de descida do plano inclinado e como a distância percorrida sobre o plano inclinado varia com o tempo. A importância de estudar a dependência temporal de x e de v vem do fato dela ser a forma usual de apresentar a cinemática no ensino médio.

As dificuldades para medir o tempo de descida e a maneira de contorná-las são apresentadas aos alunos. A regra medieval da dupla distância (RDD) é apresentada como uma forma de contorná-las. Com auxílio da RDD, o experimento da medida de tempo torna-se tão simples quanto o experimento feito na unidade 4. Sua verificação pode ser uma etapa inicial da atividade ou, dependendo do tempo disponível, ela pode ser apenas enunciada. Dessa maneira os alunos medem o tempo, a distância, a velocidade instantânea e preenchem uma tabela com os valores de x, v e t.

Material a ser apresentado em sala de aula

Nas próximas páginas estão os roteiros para uso em sala de aula.

Unidade 1

Questão 1

O Sonic é um dos personagens mais rápidos do mundo, tem como objetivo salvar os outros animais do vilão Dr. Eggman.

Imagem 1

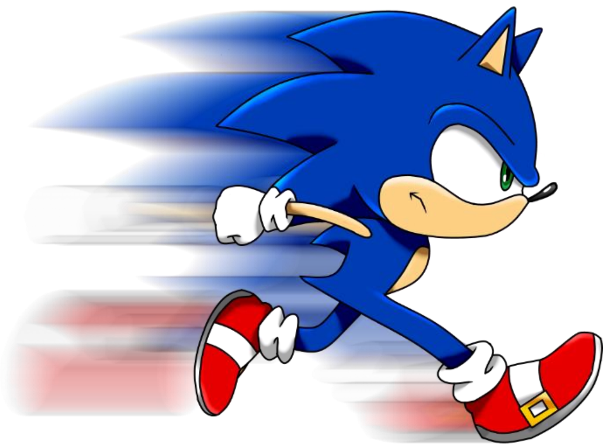


Imagem 2

a) Observando as imagens do Sonic, em qual delas ele é mais rápido?

☐ Imagem 1 ☐ Imagem 2

b) Por quê?

____

____

____

Questão 2

Dois carros, A e B, percorrem distâncias diferentes em tempos iguais.

a) Qual carro é o mais rápido?

☐ Carro A ☐ Carro B

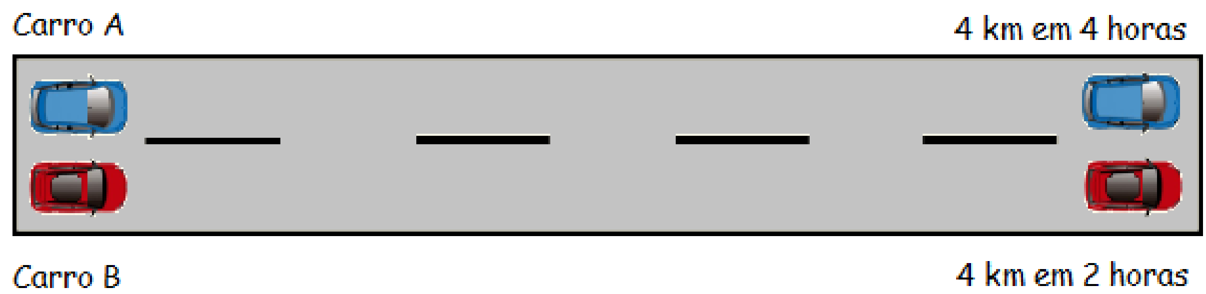
b) Por quê?

____

____

Questão 3

Dois carros, A e B, percorrem distâncias iguais em tempos diferentes.



a) Qual carro é o mais rápido?

☐ Carro A ☐ Carro B

b) Por quê?

____

____

Questão 4

Dois carros, A e B, percorrem distâncias diferentes em tempos iguais.

Unidade 1

Quantas vezes o carro A é mais rápido ou mais lento que o carro B? Explique

a) 2 vezes mais rápido

b) 3 vezes mais rápido

c) 2 vezes mais lento

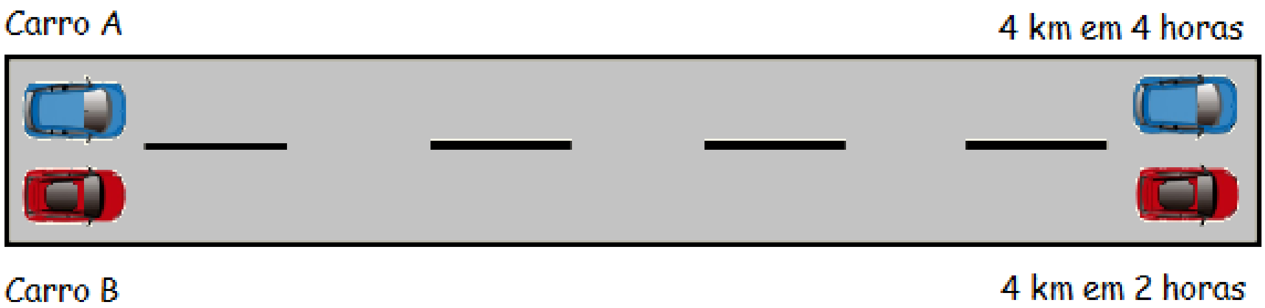
d) 3 vezes mais lento

____

____

Questão 5

Dois carros, A e B, percorrem distâncias iguais em tempos diferentes.



Quantas vezes o carro A é mais rápido ou mais lento que o carro B? Explique

a) 2 vezes mais rápido

b) 3 vezes mais rápido

c) 2 vezes mais lento

d) 3 vezes mais lento

____

____

Considerando toda a discussão abordada anteriormente, responda as próximas questões.

Questão 6

a) Seria possível saber qual é o mais rápido ou mais lento, apenas com as distâncias percorridas?

____

____

b) Seria possível saber qual é o mais rápido ou mais lento, apenas com os tempos de viagem?

____

____

Questão 7

a) Você riu? Por quê?

____

____

____

Unidade 1

Atividade para trazer na próxima aula

Vamos medir quanto tempo você demora para percorrer a quadra da escola, andando e, depois, correndo. Use seu celular para cronometrar o tempo. Anote também o comprimento da quadra.

	Tempo
Andando	
Correndo	

Tamanho da quadra

Unidade 2

Para calcular a velocidade no percurso precisamos saber a distância percorrida e o tempo para percorrê-la. Podemos definir a velocidade da seguinte maneira:

$$velocidade = \frac{distância}{tempo}$$

Questão 1

a) Agora calcule sua velocidade para percorrer a quadra da escola, usando os dados que anotou na unidade 1.

b) Em que unidade você mediu a quadra da escola? E em que unidade você mediu o tempo para percorrer a quadra?

____

____

____

c) A velocidade que você calculou tem unidade? Se sim, qual é?

____

Questão 2

a) Calcule as velocidades dos carros A e B.

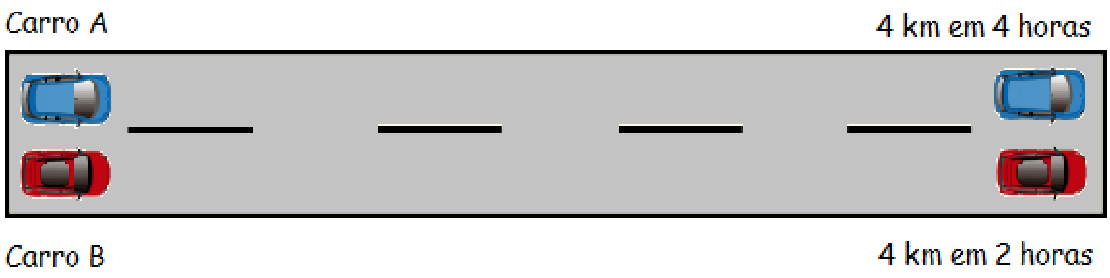
b) Esses valores são compatíveis com sua resposta à questão 4 da unidade 1?

____

Unidade 2

Questão 3

a) Calcule as velocidades dos carros A e B



b) Esses valores são compatíveis com sua resposta à questão 5 da Unidade 1?

____

Questão 4

A unidade da velocidade que você calculou na quadra é a mesma utilizada nos carros nos exemplos?

____

____

Questão 5

O que seria mais rápido, você andando a 2 m/s ou um carro a 2 km/h?

Questão 6

A Linha Vermelha no RJ possui 22 km de extensão e a velocidade máxima permita é de 80 km/h. Considere que um carro percorre o primeiro trecho nessa via, de 12 km, em 15 minutos. O segundo trecho, de 10 km, é percorrido em 5 minutos.

a) Qual a velocidade, em km/h, do carro em cada trecho?

b) E qual a velocidade, em km/h, do carro em toda a extensão da linha vermelha?

c) O motorista recebeu multa por um radar no segundo trecho. O motorista recorreu alegando que a sua velocidade na Linha Vermelha estava abaixo do valor permitido na via. O motorista tem razão ou não? Por quê?

____

____

____

____

Unidade 3

Velocidade Média

O que definimos anteriormente como velocidade é denominada, com mais precisão, de velocidade média e se refere somente ao *percurso considerado*. Diferentes trechos de um mesmo movimento podem ter diferentes velocidades médias (v_m).

$$v_m = \frac{distância\ percorrida}{tempo\ para\ percorrer}$$

Movimento Uniforme

Um tipo de movimento é muito importante: o *movimento uniforme*. Nesse movimento, a velocidade média é a mesma em qualquer trecho do percurso. Assim, se o movimento for uniforme – e somente nesse caso – não precisamos especificar para qual percurso a velocidade foi calculada.

Questão 1

Na aula anterior, discutimos, em uma das questões, sobre o movimento de um carro na Linha Vermelha, em que ele percorre dois trechos de comprimentos diferentes em intervalos de tempos diferentes. E você calculou a velocidade em cada trecho e em toda a extensão da via.

a) As velocidades que você calculou são velocidades médias?

____

____

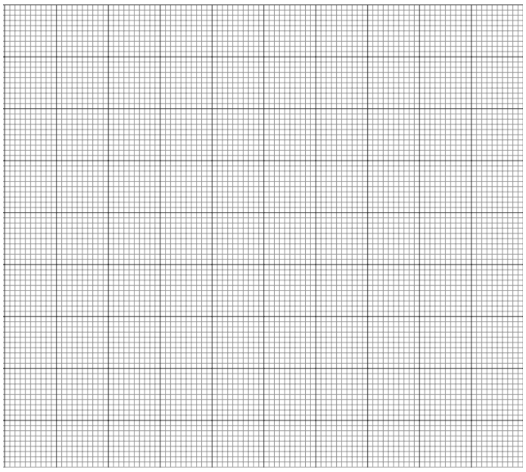
b) O movimento do carro foi uniforme?

____

____

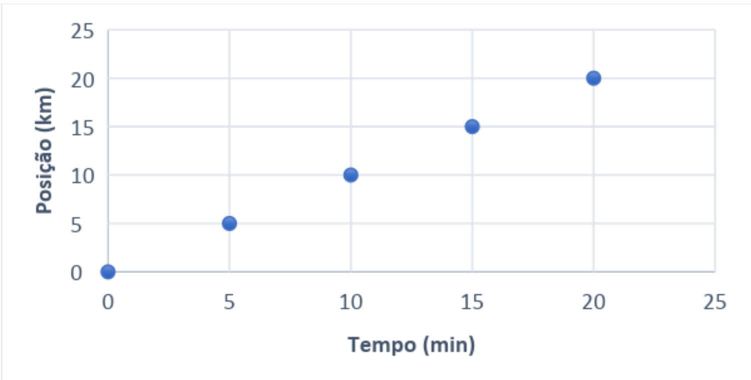
c) Marque no papel milimetrado a posição do carro nos instantes considerados. Os dados estão na questão 6 da Unidade 2. Indique em cada eixo a grandeza física e sua respectiva unidade de medida.

Unidade 3



Questão 2

Suponha que o gráfico do movimento de outro carro na linha vermelha fosse como o da imagem abaixo.



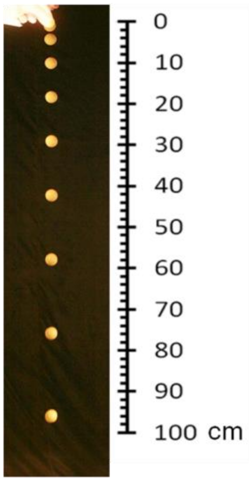
a) Qual a velocidade média do carro entre 0-5 min, 5-10 min, 10-15 min, 15-20 min, 0-20 min? Especifique em que unidade está sua resposta.

b) Esse movimento foi uniforme?

___

Questão 3

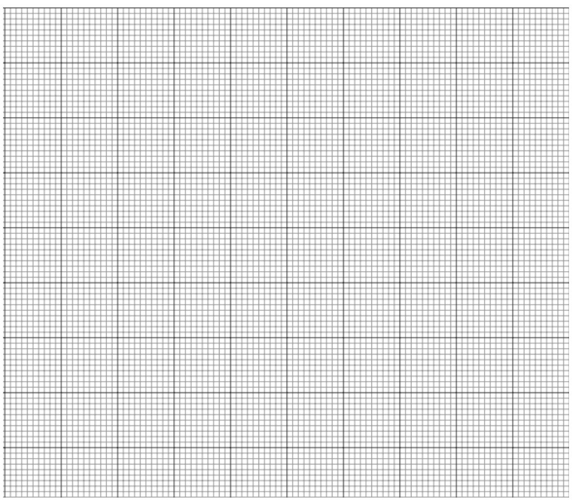
A imagem mostra o movimento de queda de uma bolinha. A foto registra a posição da bolinha a cada 0,05 s. Chamamos esse tipo de foto de imagem estroboscópica.



a) Preencha a tabela com os dados (posição e tempo) extraídos da foto. Suponha que a primeira posição na queda considerada por você corresponda a t = 0 s.

Tempo (s)	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,4
Posição (cm)									

b) Construa no papel milimetrado o gráfico da posição em função do tempo. Indique em cada eixo a grandeza física e sua respectiva unidade de medida.



c) Complete a tabela abaixo.

Unidade 3

Intervalo de tempo (s)	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
Deslocamento no intervalo (cm)								
Velocidade média no intervalo (cm/s)								

d) O movimento é uniforme?

____

____

Questão 4

a) Considere a seguinte afirmativa: No movimento uniforme, distâncias iguais são percorridas em tempos iguais. Essa afirmativa é:

☐ Correta ☐ Falsa

b) No gráfico da questão 2, distâncias iguais são percorridas em tempos iguais?

☐ Sim ☐ Não

c) No gráfico da questão 3, distâncias iguais são percorridas em tempos iguais?

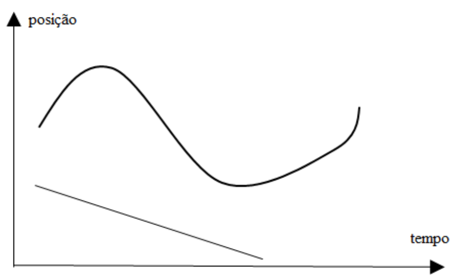
☐ Sim ☐ Não

d) Suas respostas nos itens (b) e (c) estão de acordo com sua resposta no item (a)?

____

Questão 5

O gráfico abaixo representa dois movimentos diferentes, um uniforme e um não uniforme. Identifique esses movimentos.

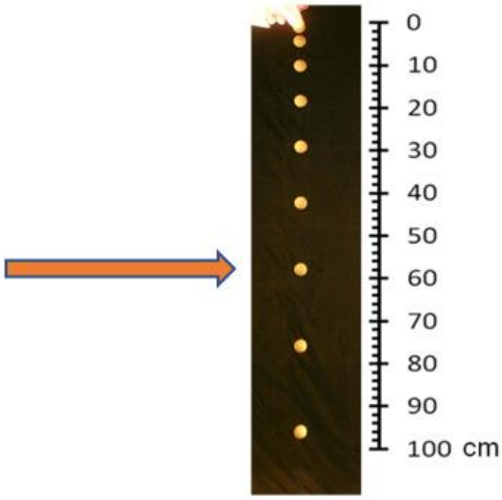


☐ Uniforme ☐ Não Uniforme

Questão 6

Unidade 3

Faz sentido falar de velocidade em um único instante, por exemplo, no instante marcado na figura?



Unidade 4

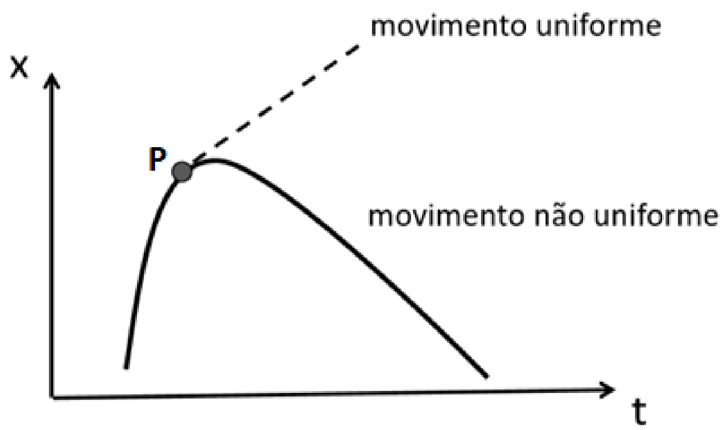
1 – Aristóteles, os Mertonianos e Galileu

O conceito de velocidade apresentado nas unidades 1, 2 e 3 é semelhante àquele proposto por Aristóteles: a velocidade está relacionada a um percurso.

Durante muito tempo, só havia essa formulação para velocidade. No século XIV, um dos períodos intelectualmente mais ricos da Idade Média, filósofos, reunidos no Merton College, em Oxford, e por isso chamados mertonianos, estudaram o movimento mais detalhadamente que Aristóteles e introduziram novas ideias. Entre as novas ideias, estão o uso de gráficos para descrever o movimento e um conceito muito importante, o da velocidade em um instante ou velocidade instantânea.

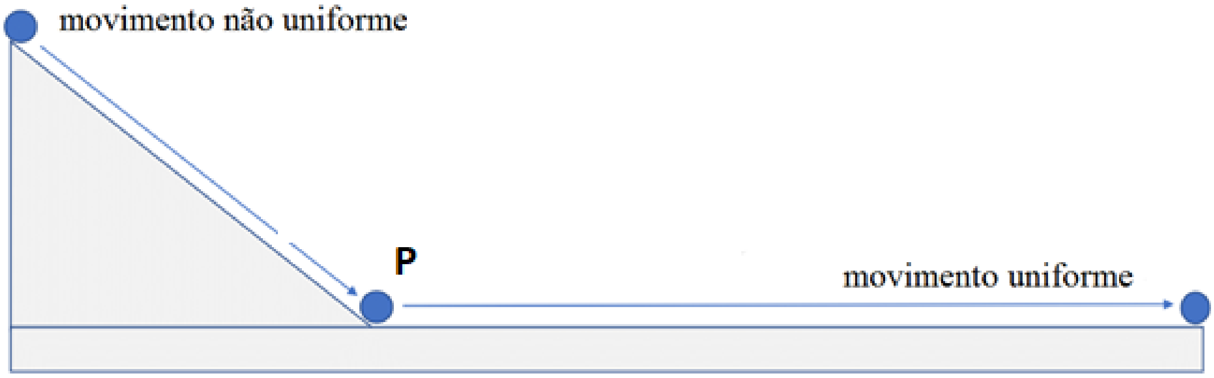
O filosofo mertoniano William Heytesbury respondeu à pergunta que fizemos ao final da unidade 3, da seguinte maneira:

Se um corpo tem um movimento não uniforme, sua velocidade em um dado instante (a velocidade instantânea), é determinada pelo caminho que esse corpo percorreria se, a partir desse instante, o movimento fosse uniforme.



O gráfico representa o movimento não uniforme de um corpo. A partir de um certo instante, indicado na figura pelo ponto P, o corpo poderia percorrer um movimento uniforme. Nesse caso, o gráfico da posição com o tempo seria uma reta a partir do ponto P, mostrada pela linha tracejada A velocidade instantânea em P é determinada pela velocidade desse movimento uniforme, $v = \Delta S/\Delta t$.

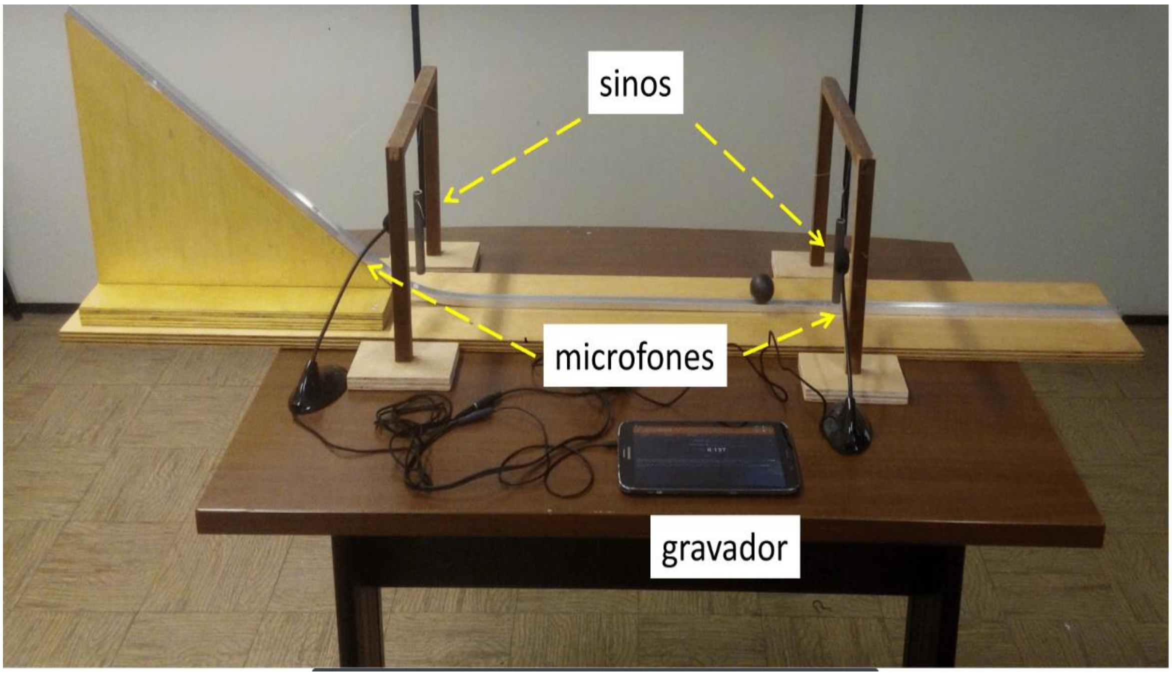
A ideia dos mertonianos pode ser aplicada em um experimento simples. No esquema mostrado na figura seguinte, a bolinha percorre dois trechos com movimentos diferentes. No primeiro trecho, um plano inclinado, o movimento é não uniforme. No segundo trecho, um plano horizontal, o movimento é uniforme, conforme foi enfatizado por Galileu. De acordo com a definição mertoniana, Galileu obteve a velocidade instantânea no ponto marcado calculando a velocidade do movimento uniforme no plano horizontal.



$$velocidade\ em\ P = \frac{distância\ percorrida\ na\ horizontal}{tempo\ para\ percorrer\ a\ distância\ horizontal}$$

2 – Um velocímetro galileano

Construímos um aparato capaz de medir a velocidade instantânea de um corpo que desce um plano inclinado. Chamamos esse aparato de velocímetro galileano, pois é baseado na definição de velocidade instantânea dada por Galileu, que discutimos na seção anterior. Entretanto, é importante dizer que Galileu jamais construiu um velocímetro tal como entendemos hoje.



A foto acima mostra o aparato. Ele é a junção de um plano inclinado com um plano horizontal, como foi discutido na seção anterior. Dois sinos são colocados sobre o plano horizontal, separados por uma distância ΔS. Os sinos são posicionados de maneira tal que um objeto que percorra o plano horizontal colida com eles. O tempo Δt que o objeto leva para percorrer a distância entre os sinos é dado pelo intervalo entre os sons dos impactos, registrado por um gravador. Pelo que foi discutido anteriormente, a velocidade instantânea, v, no final do plano inclinado é a velocidade do movimento uniforme no plano horizontal, ou seja,

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Um procedimento para medir a velocidade instantânea:

- Coloque os sinos em uma posição fixa no plano horizontal e meça a distância entre eles.
- Solte uma bolinha em diferentes posições no plano inclinado. Em cada um dos casos meça a distância entre a posição inicial e o final da descida.
- Meça o tempo que a bolinha leva para percorrer a distância entre os dois sinos usando um programa de análise de áudio.

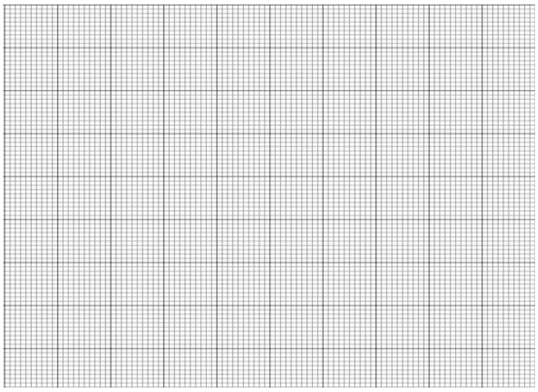
Complete os dados da tabela.

Medidas	1	2	3	4	5	6
Posição inicial da bolinha no plano inclinado (cm)						
Tempo para percorrer a distância entre os dois sinos (s)						
Distância entre os dois sinos (cm)						
Velocidade Instantânea (cm/s)						
Quadrado da velocidade instantânea $(cm/s)^2$						

Unidade 4

Construa no papel milimetrado o gráfico da velocidade em função da distância. Indique em cada eixo a grandeza física e sua respectiva unidade de medida.

Construa no papel milimetrado o gráfico do quadrado da velocidade em função da distância. Indique em cada eixo a grandeza física e sua respectiva unidade de medida.



Pergunta:

Com base no resultado das medidas, comente a sua resposta à pergunta feita no final da unidade 3: “Faz sentido falar de velocidade em um único instante?”

Na unidade 4 vimos como a velocidade instantânea se relaciona com a distância percorrida em um plano inclinado, ou seja, encontramos experimentalmente a função $v\ (x)$. Entretanto, os movimentos geralmente são descritos em função do tempo, ou seja, gostaríamos de encontrar experimentalmente as funções $v\ (t)$ e $x\ (t)$. Para isso, temos que medir o tempo t que a bolinha leva para percorrer a distância x.

Essa medida de tempo é difícil de realizar com o método anterior já que não é fácil fazer com que a bolinha produza um ruído no ponto de partida. Por exemplo, ela não consegue fazer um sino soar. Uma opção para contornar essa dificuldade é soltar a bolinha no mesmo instante de uma batida de palmas. A gravação do som das palmas marca o início do movimento. Com isso, o intervalo de tempo entre as palmas e um sino colocado ao pé do plano inclinado, que pode ser medido na gravação nos fornece o tempo t necessário para descer uma distância x. E o intervalo de tempo T entre os sons do primeiro sino e do segundo sino (separados por uma distância D) pode ser usado, como antes, para medir a velocidade instantânea ao final da descida.

Com esse procedimento podemos verificar uma propriedade muito interessante do velocímetro galileano: se $D = 2x$ então $T = t$. Essa propriedade, chamada de *regra da dupla distância*, simplifica bastante a medida do tempo t, pois não precisamos mais do som das palmas. Ajustando o aparato para que $D = 2x$, o tempo de descida t será dado pelo tempo T entre os dois sinos, que pode ser medido como no experimento anterior.

Procedimento para medida da velocidade instantânea em função do tempo:

● Solte uma bolinha em diferentes posições, x, no plano inclinado.

● Para cada posição x coloque um dos sinos ao pé do plano inclinado e o outro no plano horizontal a uma distância $D = 2x$ do primeiro.

● Meça o tempo T que a bolinha leva para percorrer a distância, $D = 2x$, entre os dois sinos usando um programa de análise de áudio.

Unidade 5

Lembrando a definição dos mertonianos para velocidade instantânea, temos que a velocidade ao pé do plano é:

$$v = \frac{D}{T}$$

Medidas	1	2	3	4	5	6
Posição da bolinha no plano inclinado - x (m)						
Distância para percorrer o plano horizontal - D = 2x (m)						
Tempo para percorrer o plano - T = t (s)						
Velocidade instantânea - v = D/T						

1 - Construa no papel milimetrado o gráfico da velocidade em função do tempo. Indique em cada eixo a grandeza física e sua respectiva unidade de medida.

2 - Construa no papel milimetrado o gráfico da posição em função do tempo. Indique em cada eixo a grandeza física e sua respectiva unidade de medida.

Apêndice B

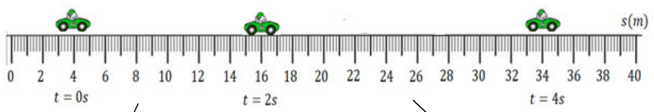
Roteiro resumido da proposta didática

O Conceito de Velocidade Instantânea

1 – Velocidade Média

- Velocidade Média: $v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t}$ Depende do percurso

Exemplo:



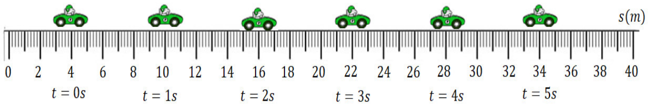
$$v_m = \frac{16-4}{2-0} = \frac{12}{2} = 6\frac{m}{s}$$

$$v_m = \frac{34-16}{4-2} = \frac{18}{2} = 9\frac{m}{s}$$

1 – Velocidade Média

- Movimento Uniforme

Nesse movimento, a velocidade média é a mesma em qualquer trecho do percurso. Assim, se o movimento for uniforme – e somente nesse caso – não precisamos especificar para qual percurso a velocidade foi calculada.

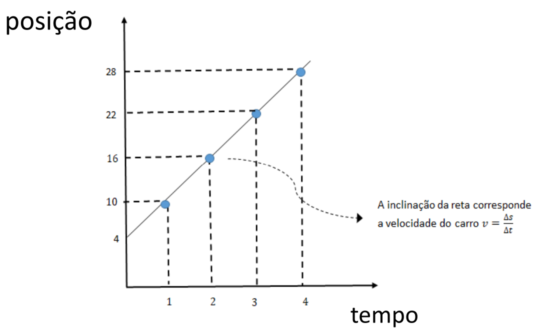


$$v_m = \frac{10 - 4}{1 - 0} = \frac{6}{1} = 6\frac{m}{s}$$

$$v_m = \frac{28 - 22}{4 - 3} = \frac{6}{1} = 6\frac{m}{s}$$

1 – Velocidade Média

- Gráfico do Movimento Uniforme

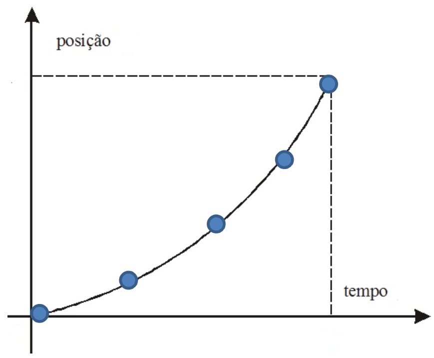


O gráfico é uma reta

1 – Velocidade Média

- No movimento não uniforme a velocidade média depende do percurso

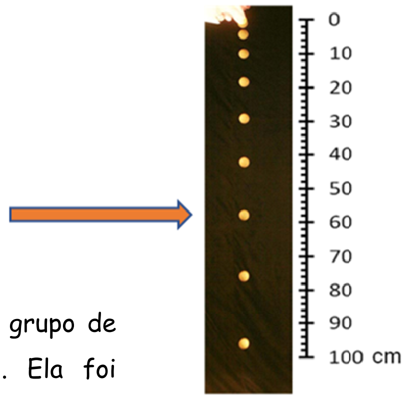
- Gráfico do movimento não uniforme



O gráfico não é uma linha reta

2 – Velocidade instantânea

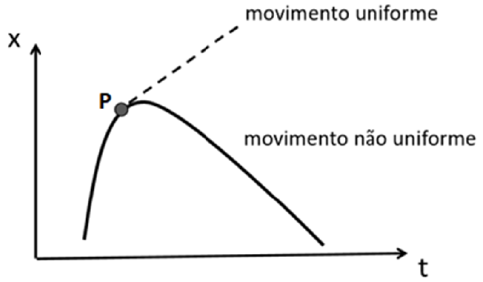
Faz sentido falar de velocidade em um único instante, por exemplo, no instante marcado na figura?



A resposta foi dada no século XIV por um grupo de filósofos do *Merton College*, em Oxford. Ela foi aperfeiçoada e aplicada à queda dos corpos por Galileu no século XVI.

2 – Velocidade instantânea

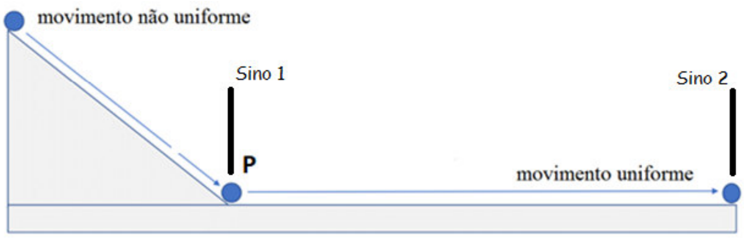
Se um corpo tem um movimento não uniforme, sua velocidade em um dado instante (a velocidade instantânea), é determinada pelo caminho que esse corpo percorreria se, a partir desse instante, o movimento fosse uniforme.



A velocidade instantânea em P é a velocidade do movimento uniforme, representado pela linha tracejada.

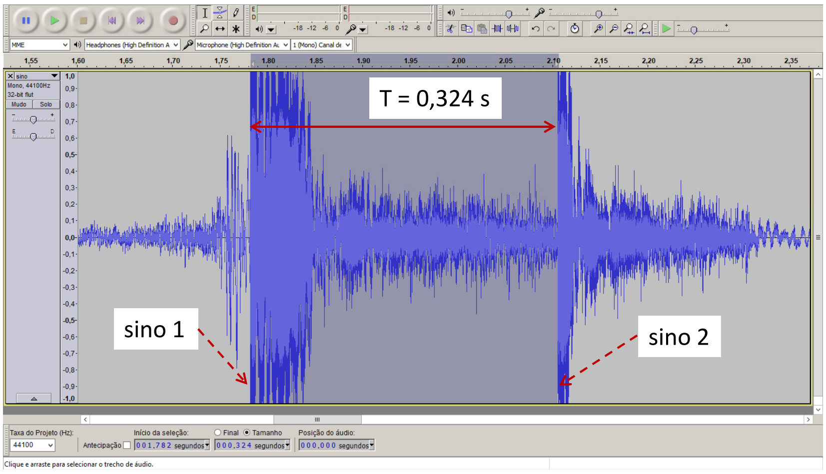
3 – Medida da velocidade instantânea

- Aparato experimental



$$velocidade\ em\ P = \frac{distância\ percorrida\ na\ horizontal}{tempo\ para\ percorrer\ a\ distância\ horizontal}$$

4 – Medida do intervalo de tempo



Apêndice C

Experimento feito com filmadora e "Tracker"

Neste apêndice, são mostrados os gráficos obtidos no experimento em que o movimento da bolinha no "velocímetro galileano" é filmado e o vídeo é analisado com um programa de vídeo-análise, como o *Tracker*.

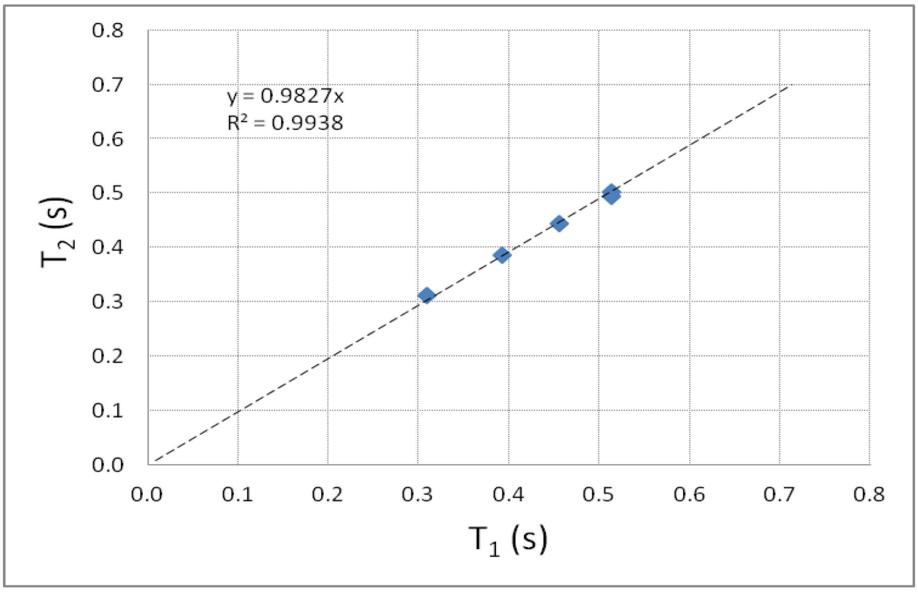
No primeiro gráfico, a RDD é testada. Pelo gráfico, os tempos T_2, do movimento uniformemente acelerado de descida do plano (distância percorrida d), e T_1, do movimento uniforme horizontal (distância percorrida $D = 2d$), são iguais, com ótima precisão.

O segundo gráfico mostra os resultados das medidas da velocidade instantânea em função do tempo e a reta ajustada a esses pontos, $v = 4{,}01 \times t$.

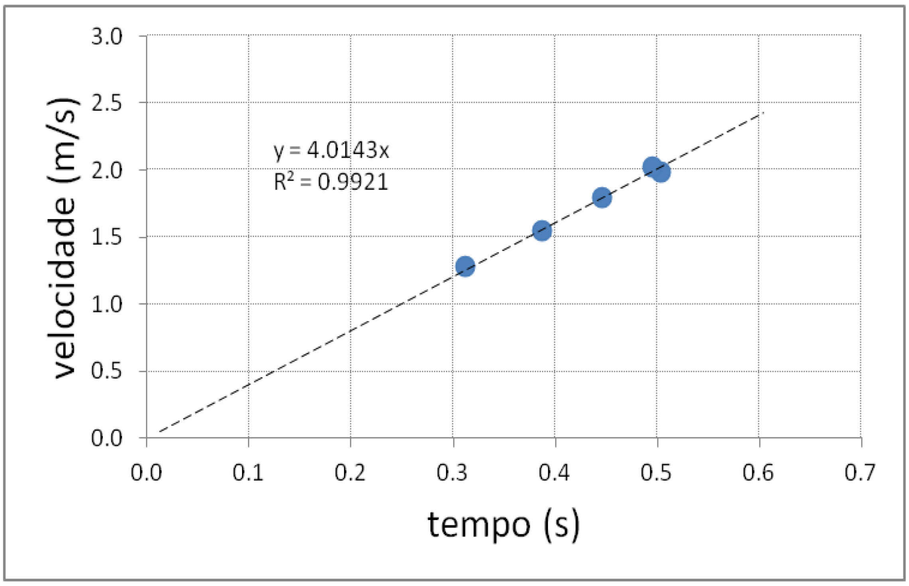
O terceiro gráfico mostra a distância percorrida em função do tempo e a parábola ajustada a esses pontos, $D = \frac{1}{2} \times 4{,}01 \times t^2$.

O quarto gráfico mostra que, no gráfico tempo versus distância, a velocidade instantânea em um ponto define a tangente à curva nesse ponto. Escolhendo um ponto sobre a curva, de coordenadas T e D, marca-se, a partir dele, um ponto de coordenadas T e $2D$; a reta que liga os pontos é tangente à curva.

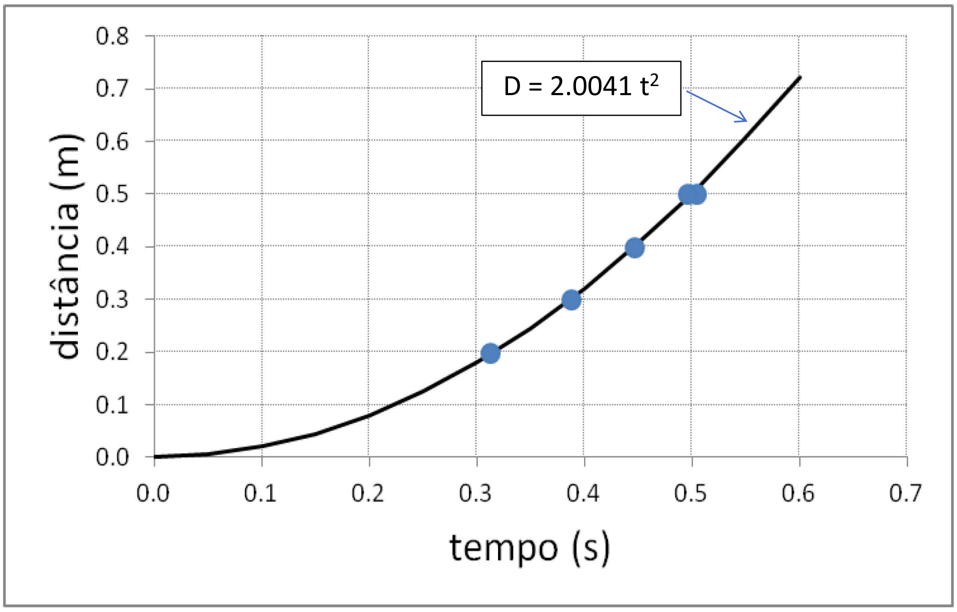
Verificação da Regra da Dupla Distância



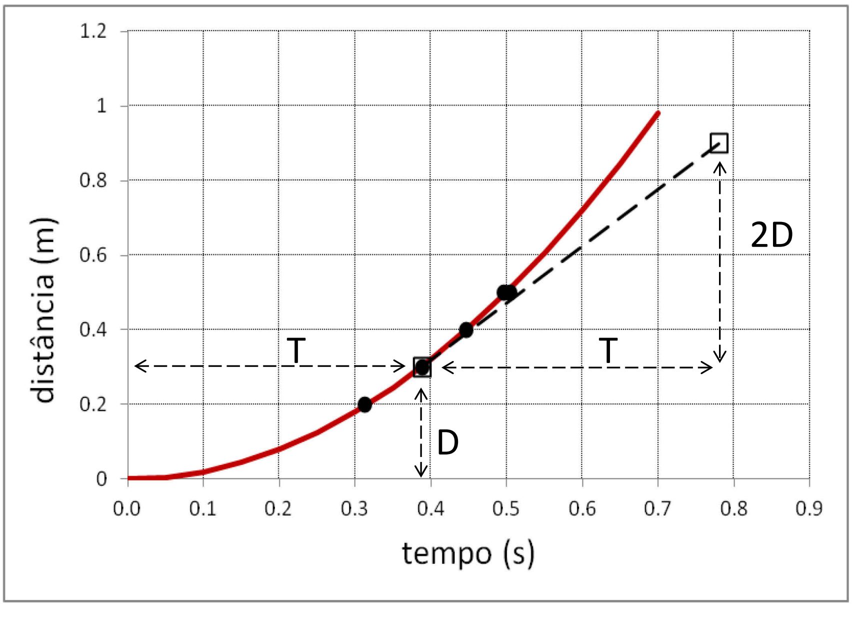
Velocidade x Tempo



Distância x Tempo



Relação da velocidade com a derivada



Referências Bibliográficas

[1] *Audacity*: Free Audio Editor and Recorder, `www.audacityteam.org/`

[2] Aguiar, C. E., Barroso, M. F., Cardozo Dias, P. M., Francisquini, M. F. B., em preparação.

[3] Arons, A. B., *Teaching Introductory Physics*, Wiley, 1996

[4] Archimedes, “On Spirals", in: T. L. Heath (ed.), *The Works of Archimedes*, p. 151–188, Cambridge University Press (Cambridge, UK), 1987.

[5] Aristotle, “Physica", in: W. D. Ross (ed.), *The Works of Aristotle*, v.II, Clarendon Press (Cambridge, UK), 1930.

[6] Cardozo Dias, P. M., “O teorema da velocidade média: Um antecedente medieval de Galileu", *Perspicillum*, **6** (1992), p. 9–24.

[7] Cardozo Dias, P. M., Francisquini, M. F. B., Aguiar, C. E., Barroso, M. F., “What the mid-aged Galileo told the elderly Galileo (Galileo's search for the laws of motion)", *Physics in Perspective* (2019), aceito para publicação.

[8] Clagett, M., *The Science of Mechanics in the Middle Ages*, The University of Wisconsin Press (Madison), 1959.

[9] Damerow, P., Freudenthal, G., McLaughlin, P. , Renn, P. J. , *Exploring the Limits of Preclassical Mechanics*, Springer (Dordrecht), 2004.

[10] Favaro, A. (ed.) *Le Opere di Galileo Galilei*, 20 vols., vol. X, Barbèra (Florença), 1900.

[11] Franklin, A., *The Principle of Inertia in the Middle Ages*, Colorado Associated University Press (Boulder), 1977.

[12] Galileo Galilei, *Discourse Concerning Two New Sciences. Translated with a new introduction and notes, by Stillman Drake*, Wall & Thomson (Toronto), 1989.

[13] Gaspar, A., *Física – Ensino Médio*, 1ª edição, volume único, Ática (S. Paulo), 2006.

[14] Grant, E., *Physical Sciences in the Middle Ages*, Cambridge University Press (Cambridge, UK), 1977; publicado inicialmente por John Wiley & Sons, 1971.

[15] Guimarães, L. A. e Fonte Boa, M., *Física – Ensino Médio – Mecânica*, 2ª edição, vol. 1, Galera (S. Paulo), 2006.

[16] Halloun, I. A. e Hestenes, D., "Common sense concepts about motion", *American Journal of Physics*, **53** (1985), p. 1056–1065.

[17] Holton, G., "Harvard Project Physics: A report on its aims and current status", *Physics Education*, **4** (1969), p. 19–25.

[18] Máximo, A. e Alvarenga, B., *Física – Ensino Médio*, 1ª edição, vol. 1, Scipione (S. Paulo), 2006.

[19] McCloskey, M., "Intuitive Physics", *Scientific American*, 248(4), 1983, p. 122–130.

[20] Moody, E. A., "Laws of Motion in Medieval Physics", *The Scientific Monthly* **72** (1951), p. 18–23. Republicado in: *Studies in Medieval Philosophy, Science, and Logic (Collected Papers 1933-1969)*, University of California Press (Berkeley), 1975; p. 194.

[21] Nussenzveig, H. M., *Curso de Física Básica I – Mecânica*, 4ª edição, Edgar Blücher (S. Paulo), 2002.

[22] Palmerino, C. R., "The Geometrization of Motion: Galileo's Triangle of Speed and its Various Transformations", *Early Science and Medicine*, **15** (2010), p. 410–447.

[23] Rutherford, F. J., Holton, G., Watson, F. G., *Project Physics*, Saunders College Pub, 1981

[24] Schemmel, M., "Medieval Representations of Change and Their Early Modern Application", *Foundations of Science*, **19** (2014), p. 11–34.

[25] Rosenquist, M. L. e McDermortt, L. C., "A conceptual approach to teaching kinematics", *American Journal of Physics*, **55** (1987), p. 407–415.

[26] *Tracker*: Video Analysis and Modeling Tool, `https://physlets.org/tracker/`

[27] Trowbridge, D. E. e McDermott, L. C., "Investigation of student understanding of the concept of velocity in one dimension", *American Journal of Physics*, **48** (1980), p. 1020–1028.