



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

Instituto de Física

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física

Mestrado Profissional em Ensino de Física

## A física do relógio de água

(Guia de orientação para o professor)

João Gabriel Campos de Bragança  
Vitorvani Soares

Material instrucional associado à dissertação de mestrado de João Gabriel Campos de Bragança, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Rio de Janeiro  
Dezembro de 2021

## Ficha catalográfica

B794m Bragança, João Gabriel Campos de  
A física do relógio de água (Guia de orientação para o professor) / João Gabriel Campos de Bragança Vitorvani Soares. – Rio de Janeiro: UFRJ/IF, 2021.  
iv, 11 f. : il. ; 30 cm.  
Orientador: Vitorvani Soares.  
Dissertação (mestrado) – UFRJ / Instituto de Física / Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, 2021.  
Referências Bibliográficas: f. 15.  
1. Ensino de Física. 2. Tempo. 3. Hidrodinâmica. I. Soares, Vitorvani. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Física, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física. III. Título.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Um modelo matemático para o fluxo de água</b>	<b>6</b>
2.1	Número de Reynolds	6
2.2	Nível do fluido constante	7
2.2.1	Determinação da velocidade $U$	9
2.3	Nível do fluido variável	10
2.3.1	Determinação da velocidade $U$	11
2.4	O relógio de água	13
<b>3</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>14</b>
	<b>Referências</b>	<b>15</b>

# Lista de ilustrações

Figura 1	Recipiente cilíndrico regular reto, preenchido com água . . . . .	6
Figura 2	Velocidade reduzida $U/U_0$ vs. altura reduzida $h/H$ . . . . .	12

# 1 Introdução

Apresentamos e discutimos, neste *Guia de orientação para o professor*, a realização de um modelo matemático que descreve a física do escoamento de água do interior de um recipiente de geometria conhecida. Este *Guia* tem como objetivo servir de orientação ao professor na condução das atividades propostas no material instrucional *A medida do fluir do tempo (Guia de orientação para o professor)* (BRAGANÇA; SOARES, 2021) ou para uma discussão em uma turma mais avançada.

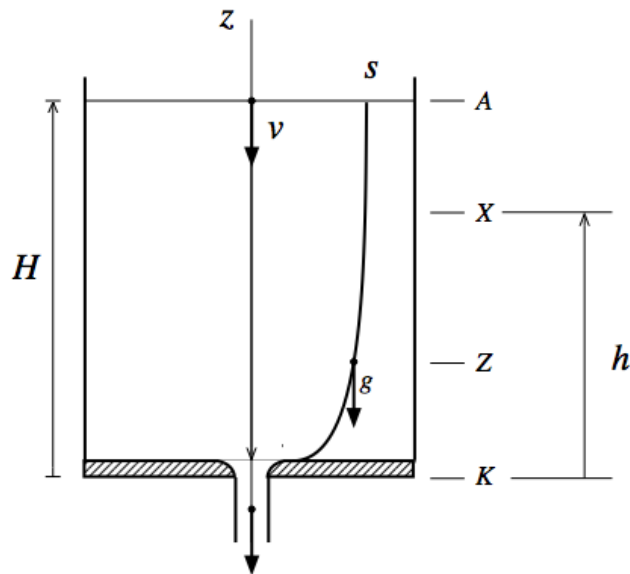
O modelo matemático apresentado nesse *Guia* se propõe também a orientar o professor quanto aos limites da representação matemática usualmente empregada nos modelos hidrodinâmicos discutidos em sala de aula. Como outras observações fundamentais em ciência, ao construir com os alunos a representação do escoamento da coluna de água do interior do recipiente procuramos mostrar que o modelo matemático é uma aproximação da realidade. que os “modelos explicativos não são únicos nem finais”, como sinalizam as orientações dos PCNs de Física quanto ao estudo das Ciências Físicas no Ensino Médio (BRASIL, 2002).

Para uma descrição detalhada das atividades propostas, reunimos o material didático desenvolvido nesse *Guia de orientação para o professor* na seguinte ordem: no Capítulo 2, usamos as leis da hidrodinâmica e construímos um modelo matemático para representar o comportamento do escoamento da coluna de água do interior de um recipiente; para concluir esse trabalho, no Capítulo 3, apresentamos as nossas considerações finais.

O presente material instrucional está associado à dissertação de mestrado de João Gabriel Campos de Bragança (2021), apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

## 2 Um modelo matemático para o fluxo de água

Consideramos o nosso recipiente na forma de um cilindro de revolução reto de altura  $H$ . A abertura superior possui área  $A$  de raio igual a  $R_A$ ; o fluido escorre através de uma abertura na base de área  $K$  e raio igual a  $R_K$ , como ilustrado na Figura 1. Tanto a abertura superior quanto a abertura inferior estão em contato com a atmosfera.



**Figura 1.** – Recipiente cilíndrico regular reto, preenchido com água. A coluna de água tem altura inicial  $H$  e assume os valores  $h$  ao longo do movimento. O movimento da água ocorre na direção  $ds$ , onde  $s$  indica o caminho percorrido pelos componentes do fluido na profundidade  $z$  abaixo da superfície livre;  $g(dz/ds)$  corresponde à componente da gravidade ao longo de  $ds$  e  $v$  a sua velocidade.

### 2.1 Número de Reynolds

Para uma discussão de fluxo de fluidos, é conveniente agrupar os parâmetros envolvidos no problema em um parâmetro adimensional  $R$  denominado número de Reynolds (CARLTON, 2019). Este parâmetro  $R$  distingue as linhas de fluxo do fluido entre o regime laminar e turbulento, e é definido pela fórmula

$$R = \frac{\rho v d}{\eta}, \quad (2.1)$$

onde  $\rho$  é a densidade do fluido,  $v$  é sua velocidade relativa ao recipiente,  $d$  é algum comprimento característico do recipiente, e  $\eta$  seu coeficiente de viscosidade.

Os experimentos indicam que para  $R$  menor que 2000, o fluxo é sempre laminar não importando o valor da densidade ou da viscosidade do fluido. Em geral, para  $R$  maiores

que 2000 temos um fluxo turbulento. Para a água à 10 °C temos os seguintes valores para a densidade de 999,7 kg/m<sup>3</sup>, viscosidade cinemática  $\eta/\rho = 0,000\,001\,308\,4\text{ m}^2/\text{s}$  e altura do recipiente de 0,16 m. Desse modo, para intervalos de tempo de escoamento maiores que 5,0 min,

$$R < \frac{(1)(0,16/300)(0,16)}{0,000\,001\,308\,4} \approx 66. \quad (2.2)$$

Nessas condições, os fluxos da água nos recipientes observados nas Atividades 1 e 2 são provavelmente fluxos em regime laminar.

## 2.2 Nível do fluido constante

Para descrever a dinâmica do fluxo de água mantendo constante o seu nível no recipiente, seguimos a discussão de Besant (1859). Escolhemos a superfície livre da água como a origem de coordenadas. A equação que descreve o movimento da água é a equação de Euler

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial s} = g \frac{dz}{ds} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s}, \quad (2.3)$$

onde assumimos que o movimento da água ocorre na direção  $ds$ , onde  $ds$  indica o caminho percorrido pelos componentes do fluido na profundidade  $z$  abaixo da superfície livre;  $gdz/ds$  corresponde à componente da gravidade ao longo de  $ds$ ;  $p$  representa a pressão sobre a camada e  $v$  a sua velocidade.

Observamos, da Figura 1, que  $ds = dz/\cos\theta = \epsilon(\theta)dz$  e, para o nosso cilindro,

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{ds}{dz} \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2} \\ &\approx \sqrt{1 + 0} \\ &\approx 1. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Ao adotarmos a hipótese dos planos paralelos, admitimos que todas as camadas do fluido se movem verticalmente para baixo, ao longo da direção  $z$  e, ao longo do movimento, na posição  $z$ , a camada antecedente ocupa o lugar da camada subsequente. Nesse caso, (2.3) se reduz a

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} = g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (2.5)$$

Consideramos que o deslocamento da água ocorre em planos paralelos, e esta hipótese exige que seja satisfeita a seguinte condição de continuidade para o fluxo do fluido:

$$AU = Ku = Zv, \quad (2.6)$$

onde  $U$  corresponde à velocidade da água na superfície livre, de área  $A$ , localizada em  $z = 0$ ;  $u$  corresponde à velocidade da água no orifício de saída, de área  $K$ , localizada

em  $z = H$ ; e  $v$  corresponde à velocidade da água na posição  $z$ , de área  $Z$ , localizada na posição  $z$ .

Como o recipiente está sempre cheio, a velocidade  $U$  em  $z = 0$  depende somente do tempo, e observamos também que a área  $Z$  depende somente de  $z$ . Desse modo, das identidades (2.6) podemos concluir que

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{A}{Z} \frac{dU}{dt} = \frac{K}{Z} \frac{du}{dt}. \quad (2.7)$$

Substituímos  $\partial v/\partial t = (A/Z)dU/dt$  na equação (2.5), a integramos entre  $z = 0$  e  $z = H$  e obtemos o resultado

$$A \frac{dU}{dt} \int_0^H \frac{dz}{Z} + \frac{u^2}{2} - \frac{U^2}{2} = gH - \frac{p(H) - p(0)}{\rho}. \quad (2.8)$$

Como as pressões em  $z = 0$  e  $z = H$  correspondem à pressão atmosférica  $p_{\text{atm}}$

$$p(0) = p(H) = p_{\text{atm}} \quad (2.9)$$

e, de (2.6), temos

$$u^2 = \frac{A^2}{K^2} U^2. \quad (2.10)$$

Assim, a equação (2.8) se reduz a

$$A \frac{dU}{dt} \int_0^H \frac{dz}{Z} = gH - \frac{U^2}{2} \left( \frac{A^2}{K^2} - 1 \right). \quad (2.11)$$

Definimos os parâmetros

$$2b = \left( \frac{A^2}{K^2} - 1 \right) \quad (2.12)$$

e

$$k = \int_0^H \frac{dz}{Z}. \quad (2.13)$$

Para nosso recipiente, temos  $A/Z = 1$ , e portanto  $k = H/A$ . Nesse caso, a equação (2.11) se reduz a

$$H \frac{dU}{dt} = gH - bU^2. \quad (2.14)$$

Esta equação é similar à equação do movimento de um corpo sob a ação gravitacional e de uma força resistiva proporcional ao quadrado da sua velocidade.

Consideramos inicialmente que as passagens de entrada e saída de água estão fechadas. Ao abrirmos simultaneamente as duas passagens, a passagem de entrada fornece a mesma quantidade de água que escoar pelo orifício de saída, e a água na superfície livre inicia seu movimento com velocidade nula. Nesse início do movimento, (2.14) se reduz a

$$H \frac{dU}{dt} = gH > 0 \quad (2.15)$$



e esta camada de água é acelerada com aceleração igual a  $g$ . Sua velocidade  $U$  aumenta até que a força resistiva anula a ação gravitacional. Nesse instante a camada de água alcança a velocidade  $U = U_t$ ,  $dU/dt = 0$  e (2.14) se reduz a

$$0 = gH - bU_t^2. \quad (2.16)$$

Concluimos, assim, que a velocidade  $U_t$  corresponde a

$$U_t = \sqrt{\frac{gH}{b}} \quad (2.17)$$

e denominamos  $U_t$  a velocidade terminal da camada de água, na altura  $H$ .

### 2.2.1 Determinação da velocidade $U$

Fazemos a mudança de variável

$$y = \frac{U}{U_t} \quad (2.18)$$

e definimos o parâmetro  $\tau = 1/\alpha$ , com dimensão de inverso de tempo, e  $\alpha$  corresponde a

$$\alpha = \sqrt{\frac{gb}{H}}. \quad (2.19)$$

Com o auxílio de (2.18) e (2.19), resolvemos a equação (2.15) pelo método de separação de variáveis:

$$\begin{aligned} \alpha dt &= \frac{dy}{1-y^2} \\ &= \frac{dy}{2} \left( \frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y} \right). \end{aligned} \quad (2.20)$$

O movimento se inicia com velocidade nula. Portanto, para  $t = 0$  temos  $y(0) = 0$ . Desse modo, ao integrarmos (2.20), obtemos

$$2\alpha t = \ln \left( \frac{1+y}{1-y} \right). \quad (2.21)$$

Solucionamos a equação (2.21) para  $y$  e obtemos

$$\begin{aligned} y &= \frac{e^{2\alpha t} - 1}{e^{2\alpha t} + 1} \\ &= \frac{e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}}{e^{2\alpha t} + e^{-\alpha t}} \\ &= \frac{\sinh(\alpha t)}{\cosh(\alpha t)} \\ &= \tanh(\alpha t). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Substituímos (2.17) e (2.18) em (2.22) e a velocidade  $U$  fica determinada em função do tempo:

$$U(t) = \sqrt{\frac{gH}{b}} \tanh(\alpha t). \quad (2.23)$$

Observamos que o parâmetro  $\tau = 1/\alpha$  corresponde a uma constante de tempo definida pelas condições geométricas do sistema e a região geográfica onde o cilindro está localizado. A velocidade  $u$  de escoamento através do orifício inferior do cilindro fica determinada com o auxílio de (2.6):

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{A}{K}U(t) \\ &= \sqrt{\frac{2gH}{1 - K^2/A^2}} \tanh(\alpha t) \\ &= \sqrt{\frac{2gH}{1 - K^2/A^2}} \tanh\left(\sqrt{\frac{gb}{H}}t\right). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Para  $K/A \ll 1$ ,  $b \gg 1$ , temos  $\alpha \gg 1$ . Nessa condição, as velocidades  $U$  e  $u$  do fluido rapidamente assumem os valores limites  $U = U_t \gtrsim 0$  e  $u \approx \sqrt{2gH}$ . Este último resultado é conhecido como o Teorema de Torricelli.

### 2.3 Nível do fluido variável

Escolhemos a altura  $H$  como a origem de coordenadas  $z$  e assumimos que o movimento da água ocorre no sentido vertical para baixo, como no caso anterior. A hipótese dos planos paralelos também exige que seja satisfeita a seguinte condição de continuidade para o fluxo da água:

$$XU = Ku = Zv, \quad (2.25)$$

onde  $U$  corresponde à velocidade da água na superfície livre, de área  $X$ , localizada na profundidade  $z = H - h$ ;  $u$  corresponde à velocidade da água no orifício de saída, de área  $K$ , localizada em  $z = H$ ; e  $v$  corresponde à velocidade da água na profundidade  $z$ , de área  $Z$ , localizada na posição  $z$ .

Observamos que o nível de água no recipiente diminui e, portanto, a velocidade  $U$  na profundidade  $z = H - h$  depende de  $h$  e do tempo; observamos também que as áreas  $A$ ,  $X$  e  $Z$  são constantes. Desse modo, das identidades (2.6), podemos concluir que para o cilindro reto  $X = A = Z$  temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{XU}{Z} \right) = K \frac{d}{dt} \left( \frac{u}{Z} \right) \\ &= \frac{A}{Z} \frac{dU}{dt} = \frac{K}{Z} \frac{du}{dt}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Substituímos  $\partial v/\partial t = (A/Z)dU/dt$  na equação (2.5), a integramos entre  $z = H$  e  $z = H - h$  e obtemos o resultado

$$A \int_{H-h}^H \frac{dU}{dt} \frac{dz}{Z} + \frac{u^2}{2} - \frac{U^2}{2} = gh - \frac{p(H) - p(H-h)}{\rho} \quad (2.27)$$

Como as pressões em  $z = H$  e  $z = H - h$  correspondem à pressão atmosférica  $p_{\text{atm}}$

$$p(H) = p(H-h) = p_{\text{atm}} \quad (2.28)$$

e, de (2.25), temos

$$u^2 = \frac{A^2}{K^2} U^2 \quad (2.29)$$

a equação (2.27) se reduz a

$$A \frac{dU}{dt} \int_{H-h}^H \frac{dz}{Z} = gh - \frac{U^2}{2} \left( \frac{A^2}{K^2} - 1 \right). \quad (2.30)$$

Fazemos

$$2b = \left( \frac{A^2}{K^2} - 1 \right), \quad (2.31)$$

$$k = \int_{H-h}^H \frac{dz}{Z}. \quad (2.32)$$

Para o cilindro reto, temos  $Z = A$  e, portanto,  $k = h/A$ . Nesse caso, a equação (2.30) se reduz a

$$h \frac{dU}{dt} = gh - 2b \left( \frac{U^2}{2} \right), \quad (2.33)$$

onde observamos que  $h$  é uma função do tempo e  $U = -dh/dt$ . A equação (2.33) decreve a evolução da velocidade  $U$  da superfície livre da água ao longo do tempo, em diferentes alturas da coluna de água. Quando  $h = H$ , temos  $U = 0$  e a camada de água na superfície livre é acelerada com aceleração igual a  $g$ ; quando  $h = 0$ , temos a velocidade  $U = 0$ . Portanto, a velocidade  $U$  apresenta um máximo para  $0 \leq h = h_M \leq H$ . De fato, para  $dU/dt = 0$  temos

$$U(h_M) = \sqrt{\frac{gh_M}{b}} \quad (2.34)$$

Na seção seguinte determinamos a velocidade  $U$  para qualquer altura  $h$ .

### 2.3.1 Determinação da velocidade $U$

Para a determinação da velocidade  $U$  usamos como referência o artigo de Hong (2009). Realizamos as mudanças de variáveis

$$y = \frac{U^2}{2} \quad (2.35)$$

e

$$\lambda = \ln \left( \frac{h}{H} \right). \quad (2.36)$$

Desse modo, obtemos

$$\frac{dy}{d\lambda} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{d\lambda} = -h \frac{dU}{dt}. \quad (2.37)$$

A equação (2.33) se reduz a

$$-\frac{dy}{d\lambda} = gHe^\lambda - 2by. \quad (2.38)$$

uma equação diferencial linear para  $y(\lambda)$  que pode ser resolvida pelo fator integrante. Sua solução é dada na forma

$$y(\lambda) = \frac{gH}{2b-1} (e^\lambda - e^{2b\lambda}). \quad (2.39)$$

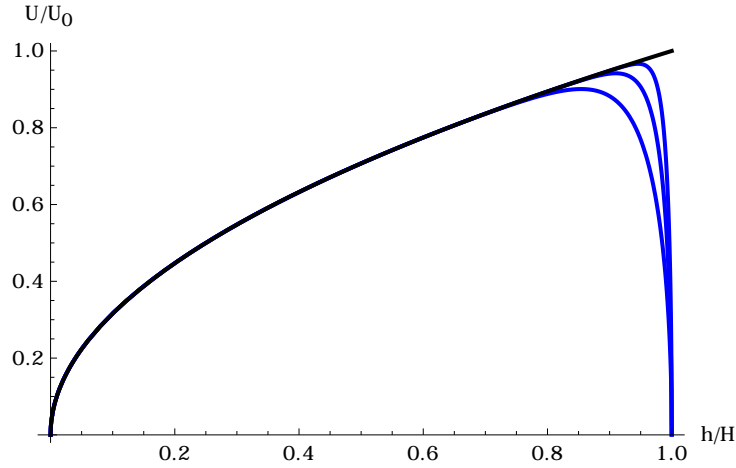
Substituímos (2.35) e (2.36) em (2.39) e obtemos

$$U(h) = \sqrt{\frac{2gH}{2b-1}} \left[ \frac{h}{H} - \left( \frac{h}{H} \right)^{2b} \right]^{1/2} \quad (2.40)$$

ou, ainda,

$$U(h) = \sqrt{\frac{2gh}{2b-1}} \left[ 1 - \left( \frac{h}{H} \right)^{2b-1} \right]^{1/2}. \quad (2.41)$$

Definimos o parâmetro  $U_0 = [2gH/(2b-1)]^{1/2}$ , normalizamos a velocidade  $U$  e representamos na Figura 2 o seu comportamento em função da altura da coluna de água.



**Figura 2.** – Velocidade reduzida  $U/U_0$  da superfície livre da coluna de água vs. sua altura reduzida  $h/H$ , para valores de  $b = 10, 20$  e  $40$ . Quanto maior o valor de  $b$ , mais a curva se aproxima de  $\sqrt{h/H}$  durante todo o movimento.

A velocidade  $U$  tem um máximo na altura

$$h_M = H \left( \frac{1}{2b} \right)^{\frac{1}{2b-1}}. \quad (2.42)$$

Para  $A \gg K$  temos  $2b \gg 1$  e  $(1/2b)^{1/2b} \approx 1$ . Nesse caso,  $h_M \approx H$ , a velocidade  $U$  alcança seu máximo quando a superfície livre ainda se encontra próxima a altura  $H$ , em um instante de tempo  $t = t_{\max} \approx 0$ . Após alcançar o seu máximo ( $0 \leq h \lesssim h_{\max}$ ), ela se comporta como uma função parabólica

$$U(h) \approx \sqrt{\frac{gh}{b}}. \quad (2.43)$$

Observamos que as velocidades  $U$  desenvolvidas pela superfície livre são pequenas e  $U(h_M) = \sqrt{gh_M/b}$ , como indicado em (2.34).

A velocidade  $u$  de escoamento através do orifício inferior do cilindro corresponde a

$$\begin{aligned} u(h) &= \frac{A}{K}U \\ &= \sqrt{\frac{2gH}{1 - K^2/A^2}} \left[ \frac{h}{H} - \left(\frac{h}{H}\right)^{2b} \right]^{1/2} \\ &= \sqrt{\frac{2gh}{1 - K^2/A^2}} \left[ 1 - \left(\frac{h}{H}\right)^{2b-1} \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Para  $A/K \gg 1$  e  $0 \leq h \lesssim h_{\max}$ , temos, no orifício de saída, a velocidade  $u \approx \sqrt{2gh}$ , e reobtemos o resultado de Torricelli.

## 2.4 O relógio de água

Podemos usar a altura  $h$  da coluna de água como um relógio. Das equações  $U = -dh/dt$  e (2.43) podemos escrever que

$$\frac{dh}{dt} = -\sqrt{\frac{gh}{b}} \quad (2.45)$$

ou ainda

$$dt = -\sqrt{\frac{bH}{g}} \frac{dh/H}{\sqrt{h/H}} \quad (2.46)$$

Integramos (2.46) entre  $t = t_{\max} \approx 0$  e  $t$

$$t \approx -2\sqrt{\frac{bH}{g}} \left| \sqrt{\frac{h}{H}} \right|_H^{h/H} \quad (2.47)$$

e obtemos

$$t \approx 2\sqrt{\frac{bH}{g}} \left( 1 - \sqrt{\frac{h}{H}} \right) \quad (2.48)$$

A equação (2.48) representa os instantes de tempo em função da altura  $h$  da coluna de água. Quando  $h = 0$  determinamos o tempo

$$t_{\text{esc}} = 2\sqrt{\frac{bH}{g}}, \quad (2.49)$$

que corresponde ao tempo de escoamento da água do interior do cilindro.

### 3 Considerações finais

Apresentamos neste *Guia* um modelo físico-matemático do escoamento para servir de orientação ao professor na condução com alunos do Ensino Médio das atividades sugeridas no material instrucional *A medida do fluir do tempo (Guia de orientação para o professor)* (BRAGANÇA; SOARES, 2021) ou para discussão em uma turma mais avançada. Ao descrever esse modelo, procuramos mostrar que o experimento proporciona uma medida do fluir do tempo, e que o uso do escoamento de água como um cronômetro exige um sistema de calibração adequado. Com o auxílio do modelo apresentado, discutimos também os limites de uma representação matemática de um fenômeno físico.

## Referências

- BESANT, W. H. *A treatise on hydrostatics and hydrodynamics*. London: Deighton, Bell, 1859.
- BRAGANÇA, J. G. C. de. *A medida do fluir do tempo e a física do relógio de água*. Tese (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, novembro 2021.
- BRAGANÇA, J. G. C. de; SOARES, V. *A medida do fluir do tempo (Guia se orientação para o professor)*. Rio de Janeiro, dezembro 2021.
- BRASIL. *PCN+Física: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias*. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.
- CARLTON, J. The propeller environment. In: CARLTON, J. (Ed.). *Marine Propellers and Propulsion*. 4. ed. Butterworth-Heinemann, 2019. cap. 4, p. 47–57. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780081003664000043>>. Acesso em: junho de 2021.
- HONG, S.-I. An exact solution to the draining reservoir problem of the incompressible and non-viscous liquid. *European Journal of Physics*, v. 30, n. 2, p. 277, 2009.
- PLOFKER, K. The mathematics of measuring time. In: JARDINE, D.; SHELL-GELLASCH, A. (Ed.). *Mathematical time capsules: Historical modules for the mathematics classroom*. Washington, DC: Mathematical Association of America, 2011. cap. 8, p. 55.