



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Física
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física
Mestrado Profissional em Ensino de Física

**Uma introdução à Relatividade Restrita e Geral
para professores do ensino médio.**

Parte I: Relatividade Restrita

Alexandre C. Tort

Rio de Janeiro
2011

Uma Introdução à Relatividade Restrita e Geral para Professores do Ensino Médio Parte I: Relatividade Restrita

(VERSÃO PRELIMINAR)

A C Tort*
Instituto de Física
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Caixa Postal 68.528; CEP 21941-972 Rio de Janeiro, Brazil

11 de Janeiro de 2011

*e-mail: tort@ufrj.br.

Conteúdo

1	As origens da relatividade restrita	3
1.1	Ondas eletromagnéticas, éter, e a velocidade da luz	6
1.2	A relatividade restrita e as transformações de Lorentz.	7
1.3	A dilatação do tempo	9
1.4	A contração de Lorentz.	10
1.5	As transformações de Lorentz II	12
2	As transformações de Lorentz como rotações imaginárias.	15
2.1	Tipos de intervalo, linhas de universo e tempo próprio	19
2.2	Simultaneidade	24
3	Quadrivetores	24
3.1	A quadrivelocidade	30
4	Dinâmica relativística	32
4.1	Partículas de massa nula	38
5	O efeito Doppler	39

1 As origens da relatividade restrita

Formalmente, a teoria da relatividade restrita (TRR) nasce da assimetria aparente dos fenômenos eletromagnéticos e da incompatibilidade entre a teoria eletromagnética de Maxwell e as transformações de Galileu. Eis como Albert Einstein (1879-1955) inicia seu agora histórico trabalho, *Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento*¹:

Como é bem conhecido, a eletrodinâmica de Maxwell – tal como ela é usualmente entendida no momento –, quando aplicada aos corpos em movimento, produz assimetrias que não parecem ser inerentes ao fenômeno. Considere-se, por exemplo, a interação entre um ímã e um condutor. O fenômeno observável, aqui, depende apenas do movimento relativo entre o condutor e o ímã, ao passo que o ponto de vista usual faz uma distinção clara entre os dois casos, nos quais um ou outro dos dois corpos está em movimento. Pois se o ímã está em movimento e o condutor em repouso, surge, nas vizinhanças do ímã, um campo elétrico com um valor definido de energia que produz uma corrente onde quer que estejam localizadas partes do condutor. Se o ímã, contudo, estiver em repouso, enquanto o condutor se move, não surge qualquer campo elétrico na vizinhança do ímã, mas, sim, uma força eletromotriz no condutor, que não corresponde a nenhuma energia *per se*, mas que, supondo-se uma igualdade de movimento relativo, dos dois casos, dá origem a correntes elétricas de mesma magnitude e sentido que as produzidas, no primeiro caso, pelas forças elétricas.

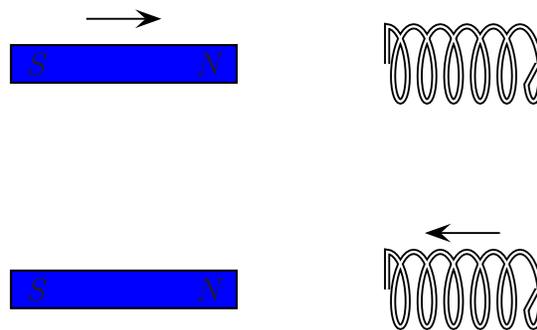


Figura 1: A corrente induzida no condutor é experimentalmente a mesma.

¹ Albert Einstein, *Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento*, publicado em *O ano miraculoso de Einstein. Cinco artigos que mudaram a face da física*, Org. J. Stachel, Rio de Janeiro, Editora da UFRJ, 2001.

Os dois casos mencionados podem ser resolvidos com a lei de indução de Faraday: a variação do fluxo magnético Φ com o tempo induz no condutor uma força eletromotriz \mathcal{E} , em princípio também variável no tempo, dada por:

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt}. \quad (1)$$

Se supusermos que o condutor tem uma resistência \mathcal{R} , então a corrente $i(t)$ induzida no condutor será dada por:

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{\mathcal{R}} = -\frac{1}{\mathcal{R}} \frac{d\Phi(t)}{dt}. \quad (2)$$

O que chama a atenção de Einstein é que em um caso a força eletromotriz (*i.e.*: o fluxo variável no tempo) relaciona-se com o campo elétrico e no outro com o campo magnético. Considere primeiro o caso em que o ímã está em repouso e o condutor move-se com velocidade \vec{v} . Neste caso, o condutor move-se em um campo magnético não-uniforme, mas independente do tempo. A equação de Maxwell pertinente se lê:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (3)$$

Mas o campo \vec{B} em um ponto do condutor não depende do tempo, logo, não haverá um campo elétrico induzido. Se houver campo elétrico, ele deverá ser eletrostático para o qual sabemos que $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$. Portanto, a situação é compatível com a Eq. (1). mas, como se calcula a força eletromotriz? Acompanhando o movimento do condutor no campo criado pelo ímã. De fato,

$$\Phi(t) = \int_{S(t)} \vec{B} \cdot d\vec{a}, \quad (4)$$

onde $S(t)$ é a superfície que tem (idealmente) como fronteira móvel o condutor. Pode ser demonstrado² que a equação acima leva à seguinte expressão para a corrente induzida no condutor:

$$i(t) = -\frac{1}{\mathcal{R}} \oint_{\text{condutor}} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}. \quad (5)$$

No segundo caso, o condutor está fixo e o ímã em movimento. Neste caso em um ponto do condutor haverá um campo magnético não-uniforme, em princípio, e dependente do tempo. Nesse caso, podemos integrar a Eq. (3) com o auxílio do teorema de Stokes e obter:

$$i'(t) = -\frac{1}{\mathcal{R}} \oint_{\text{condutor}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}. \quad (6)$$

²Veja, por exemplo, R. P.Feynman, R. B. Leighton e M. Sands: *Lições de Física* Vol. II 2008 (Porto Alegre: Bookman)

O notável é que experimentalmente, $i(t) = i'(t)$! Embora em um caso o responsável pela corrente induzida no condutor seja o campo elétrico, e no outro o campo magnético. Einstein chama a atenção para o fato de que apenas o movimento relativo entre o condutor e o ímã parece ser importante.

Einstein ainda menciona *en passant* o fracasso da determinação da velocidade da luz em relação a um referencial que se move com velocidade constante relativamente ao éter:

Exemplos deste tipo – em conjunto com tentativas mal sucedidas de detectar um movimento da Terra relativo ao “meio luminífero” – levam à conjectura de que não apenas os fenômenos da mecânica, mas também os da eletrodinâmica não têm propriedades que correspondam ao conceito de repouso absoluto.



Figura 2: Albert Einstein (1879-1955) em palestra e selo comemorativo.

E prossegue:

Ao contrário, as mesmas leis da eletrodinâmica e da óptica serão válidas para todos os sistemas de coordenadas nos quais valem as equações da mecânica, como foi recentemente demonstrado para quantidades de primeira ordem. Elevaremos essa conjectura [...] à condição de um postulado. Iremos introduzir também um outro postulado, apenas aparentemente incompatível com esse, a saber: que a luz sempre se propaga no vácuo com uma velocidade definida, que é independente do estado de movimento do corpo emissor. Esses dois postulados são suficientes para a obtenção de uma eletrodinâmica dos corpos em movimento simples e consistente, baseada na teoria de Maxwell para corpos em repouso.

Os postulados da relatividade restrita

Embora ao mencionarmos a TRR o nome de Albert Einstein surja imediatamente em nossa mente, convém notar que ela é fruto de um grande esforço teórico-experimental para resolver

os problemas que a então nova eletrodinâmica criara. Esse esforço envolveu homens brilhantes como Jules Henry Poincaré (1854–1912), Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928), e o próprio Einstein, e experimentais habilidosos como Albert Abraham Michelson (1852–1931). Mas há muitos personagens mais. Nas subseções seguintes revisaremos alguns pontos essenciais da TRR.

1.1 Ondas eletromagnéticas, éter, e a velocidade da luz

A teoria eletromagnética de Maxwell prevê a propagação de campos elétrico e magnéticos no espaço à medida que o tempo (galileano) transcorre, pois a manipulação formal das equações de Maxwell nos conduz às equações de onda para os campos \vec{E} e \vec{B} . Há uma grande variedade de soluções para essas equações algumas relativamente simples, outras bastante complexas. Por exemplo, uma classe de soluções das equações de Maxwell no espaço livre para o campo elétrico \vec{E} e para o campo magnético \vec{B} é a classe das assim chamadas **ondas planas**. Longe das fontes de emissão, as ondas planas descrevem admiravelmente bem a propagação das perturbações (sinais) eletromagnéticas.

Por simplicidade consideraremos a equação da onda na sua versão escalar unidimensional no espaço. Uma onda escalar $\Psi(x, t)$ que se propaga na direção definida pelo eixo x obedece à equação da onda:

$$\frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial t^2} = 0; \quad (7)$$

onde c é uma constante com dimensões de velocidade. No caso das ondas eletromagnéticas, a constante c em unidades S.I. é definida por:

$$c := \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}, \quad (8)$$

onde ϵ_0 é a permissividade elétrica do vácuo/éter, e μ_0 , a sua permitividade magnética.

A solução geral da equação da onda é a solução de d'Alembert, dada por:

$$\Psi(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct). \quad (9)$$

A solução de d'Alembert permite identificar c como a velocidade de propagação da perturbação. Frente às transformações de Galileu:

$$x = x' + vt', \quad t = t'; \quad (10)$$

e sua inversa:

$$x' = x - vt \quad t' = t, \quad (11)$$

a equação da onda adquire a forma:

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{\partial^2 \Psi'(x', t')}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi'(x', t')}{\partial t'^2} + 2 \frac{v}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi'(x', t')}{\partial x' \partial t'} = 0. \quad (12)$$

Entretanto, apesar da equação da onda não ser invariante na forma, é possível mostrar que a solução geral de d'Alembert continua válida:

$$\Psi'(x', t') = \tilde{F}(x' - c't') + \tilde{G}(x' + c't'), \quad (13)$$

onde:

$$c' = c \pm v, \quad (14)$$

é a velocidade de propagação da perturbação em relação ao novo referencial inercial. Isto que significa que a velocidade de propagação obedece à regra galileana de transformação para a velocidade. Foram as tentativas fracassadas de medir c' em relação ao referencial solidário com a Terra, que se moveria através do éter, é que levaram Einstein a postular a constância da velocidade da luz. Ou melhor: sua celeridade, pois as regras de combinação vetorial para as velocidades permanece válida.

1.2 A relatividade restrita e as transformações de Lorentz.

Começemos com os postulados na forma sucinta com que os escrevemos atualmente:

- (i) As leis da física são as mesmas para todos os observadores inerciais.
- (ii) A magnitude da velocidade da luz, isto é: sua celeridade, c , é a mesma para todos os observadores inerciais, não dependendo do estado de movimento da fonte.

A partir da hipótese de que o espaço deve ser homogêneo e isotrópico concluímos que as transformações que relacionam dois referenciais inerciais devem ser lineares. Considere dois referenciais inerciais K e K' . Suponha que o referencial K' tenha velocidade constante \vec{v} em relação ao referencial K , e que os eixos coordenados dos dois sistemas sejam paralelos, veja a Figura 3. Neste caso, escrevemos:

$$\begin{aligned} x &= a x' + b t' \\ t &= e x' + f t', \end{aligned} \quad (15)$$

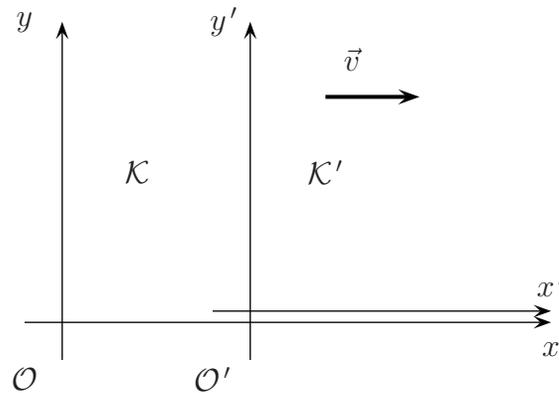


Figura 3: O referencial K' tem velocidade constante \vec{v} em relação ao referencial K ; os eixos coordenados dos dois sistemas são paralelos e coincidem quando $t = t' = 0$.

onde $a, b, e,$ e f são coeficientes que podem depender de $v = \|\vec{v}\|$. Para os outros dois eixos temos $y = y'$, e $z = z'$. A seguir, aplicando os postulados da TRR, podemos calcular os coeficientes da transformação. Os resultados são:

$$a = f = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (16)$$

$$b = \frac{v}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (17)$$

e:

$$e = \frac{v}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (18)$$

Definindo:

$$\gamma(\beta) := \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta := \frac{v}{c}, \quad (19)$$

segue que:

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad (20)$$

e

$$t = \gamma \left(\frac{\beta}{c} x' + t' \right). \quad (21)$$

Para obter a transformação inversa basta fazer as substituições: $\beta \rightarrow -\beta$, $x \leftrightarrow x'$, e $t \leftrightarrow t'$. Nas seções seguintes veremos um modo alternativo de obter a transformação de Lorentz. Mas antes deduziremos dois resultados básicos, a saber: a dilatação do tempo e a contração de Lorentz que são conseqüências dos postulados da RR.

Exercício 1 Escreva a transformação de Lorentz inversa. ■

1.3 A dilatação do tempo

Começemos com a dilatação do tempo. Considere a Figura 4. Ela mostra dois relógios construídos com dois espelhos separados por uma distância L_0 e sinais de luz que são emitidos de um dos espelhos, refletem no segundo espelho e atingem o espelho inicial. Cada vez que isto acontece, os relógios marcam uma unidade de tempo. O relógio superior está em repouso em relação a um referencial inercial, e o relógio inferior move-se da esquerda para a direita com celeridade constante v . Para o espelho em repouso, o intervalo de tempo entre a emissão e a recepção do sinal de luz será dado por:

$$\tau_0 = \frac{2\ell_0}{c}, \quad (22)$$

e para o relógio em movimento, o intervalo de tempo entre a emissão e a recepção do sinal de luz será dado por:

$$\tau = \frac{2\ell}{c}. \quad (23)$$

Da geometria da Figura 4 vemos que:

$$\ell^2 = \left(\frac{v\tau}{2} \right)^2 + \ell_0^2. \quad (24)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \tau^2 &= \frac{4\ell_0^2}{c^2} \left(\frac{v\tau}{2} \right)^2 + \ell_0^2 \\ &= \tau_0^2 \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \frac{c^2\tau^2}{4\ell_0^2} \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Resolvendo esta equação para τ , obtemos:

$$\tau = \gamma(\beta) \tau_0, \tag{26}$$

onde $\gamma(\beta)$ é dada pela Eq. (19). Como $\gamma \geq 1$, o intervalo de tempo marcado por um relógio em movimento (τ) é igual ou maior do que o intervalo de tempo marcado por um relógio em repouso (τ_0).

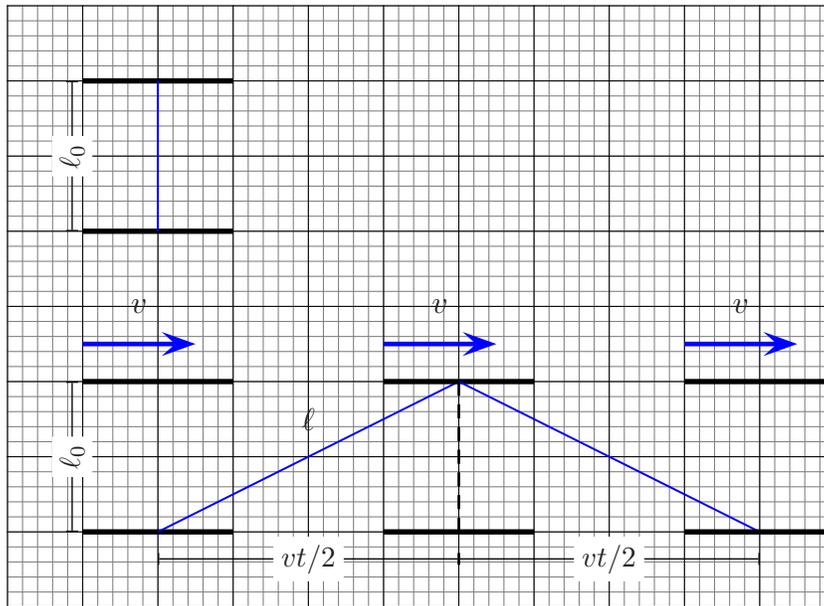


Figura 4: Relógio em repouso e em movimento com celeridade constante.

1.4 A contração de Lorentz.

Consideremos agora a situação mostrada na Figura 5. Ela mostra um relógio que como antes está feito de dois espelhos paralelos separados por uma distância fixa ℓ , e sinais de luz que se propagam entre os espelhos. O conjunto viaja da esquerda para a direita em relação a um referencial inercial com celeridade v . Suponha agora que um pulso de luz seja emitido pelo espelho da esquerda em direção ao espelho da direita, paralelamente à direção do movimento. Seja Δt_1^{IDA} o tempo de voo entre os dois espelhos na viagem de ida. Então, podemos escrever:

$$c \Delta t_1^{\text{IDA}} = \ell + v \Delta t_1^{\text{IDA}}. \tag{27}$$

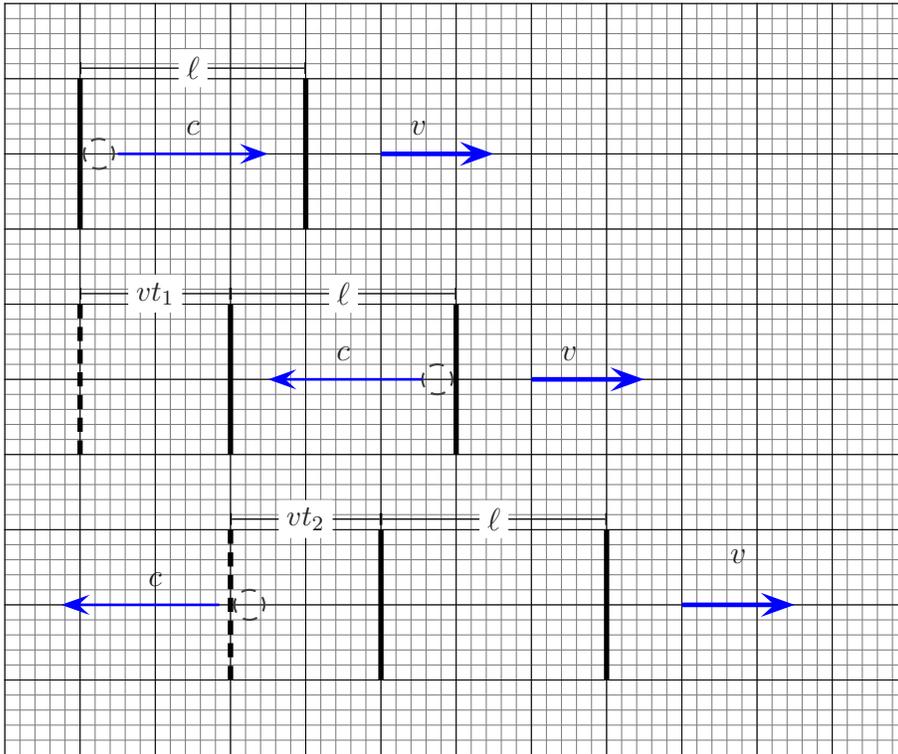


Figura 5: Relógio em movimento com celeridade constante.

O sinal de luz reflete no segundo espelho e volta indo ao encontro do primeiro. Para a viagem de volta do sinal de luz escrevemos:

$$c \Delta t_2^{\text{VOLTA}} = l - v \Delta t_1^{\text{VOLTA}}. \tag{28}$$

Uma ida e volta, ou unidade de tempo, para esse relógio em movimento corresponderá então à quantidade:

$$\tau =, \Delta t_1^{\text{IDA}} + \Delta t_2^{\text{VOLTA}}, \tag{29}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
 \tau &= \frac{\ell}{c-v} + \frac{\ell}{c+v} \\
 &= \frac{2\ell c}{c^2 - v^2} \\
 &= \frac{2\ell}{c} \gamma^2(\beta).
 \end{aligned} \tag{30}$$

Por outro lado, τ é a duração ou intervalo de tempo marcado por um relógio em movimento, logo, vale a relação $\tau = \gamma(\beta) \tau_0$, onde τ_0 é o intervalo de tempo marcado por um relógio similar em repouso, isto é, $\tau_0 = (2\ell_0)/c$. Portanto, a Eq. (4) pode ser rescrita na forma:

$$\underbrace{\frac{2\ell}{c} \gamma^2(\beta)}_{\tau} = \gamma(\beta) \underbrace{\frac{2\ell_0}{c}}_{\tau_0}. \tag{31}$$

Cancelando γ e c , ficamos finalmente com:

$$\ell \gamma(\beta) = \ell_0, \tag{32}$$

ou ainda:

$$\ell(\beta) = \frac{\ell_0}{\gamma(\beta)}. \tag{33}$$

A Eq. (33) descreve a contração de um corpo rígido na direção do movimento. Historicamente, ela foi proposta por Lorentz e por FitzGerald para explicar os resultados nulos de experiências projetadas para determinar a velocidade da luz em relação a um laboratório terrestre em movimento em relação ao éter. Aqui, ela foi deduzida como consequência dos postulados da relatividade restrita.

1.5 As transformações de Lorentz II

Eis agora um modo alternativo de obter as transformações de Lorentz. Para obtê-las, faremos uso da dilatação do tempo e da contração do comprimento na direção do movimento, a contração de Lorentz. Considere a Figura 6. Nela vemos dois referenciais inerciais \mathcal{K} e \mathcal{K}' . O segundo move-se com velocidade constante \vec{V} em relação ao primeiro. Considere agora um ponto P do espaço. Do ponto de vista do referencial \mathcal{K} podemos escrever

$$x = Vt + \underbrace{x'}_{\text{visto de } \mathcal{K}}, \tag{34}$$

onde x e x' são as abscissas do ponto P em relação aos seus referenciais respectivos. Mas, em razão da contração de Lorentz podemos escrever:

$$\underbrace{x'}_{\text{visto de } \mathcal{K}} = \frac{\underbrace{x'}_{\text{visto de } \mathcal{K}'}}{\gamma(\beta)}, \quad (35)$$

$$x = Vt + \frac{x'}{\gamma(\beta)}, \quad (36)$$

Segue que:

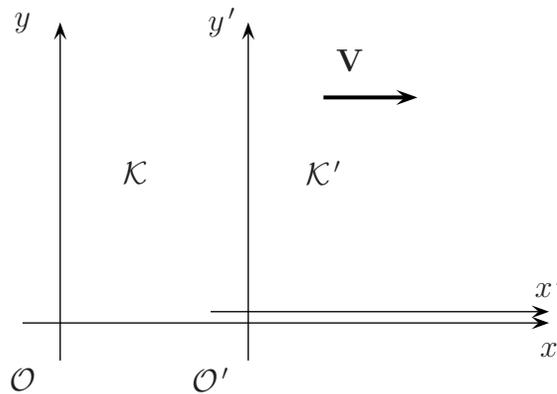


Figura 6: Dedução heurística das TL.

$$x' = \gamma(\beta) (x - \beta ct). \quad (37)$$

Se agora invocarmos o princípio da relatividade (postulado 1) e analisarmos a situação do ponto de vista do referencial \mathcal{K} , teremos:

$$x' = -Vt' + \underbrace{x}_{\text{visto de } \mathcal{K}'}, \quad (38)$$

mas agora,

$$\underbrace{x}_{\text{visto de } \mathcal{K}'} = \frac{\underbrace{x}_{\text{visto de } \mathcal{K}}}{\gamma(\beta)}. \quad (39)$$

Segue então que:

$$x = \gamma(\beta) (x' + \beta ct'). \quad (40)$$

Se agora combinarmos as Eqs. 37 e 40 e eliminarmos x' , obteremos:

$$t' = \gamma(\beta) \left(t - \frac{\beta x}{c} \right). \quad (41)$$

Para obter a transformação inversa combinamos as Eqs. 37 e 40 e eliminamos x . O resultado será:

$$t = \gamma(\beta) \left(t' + \frac{\beta x'}{c} \right), \quad (42)$$

Como agora podemos suspeitar, há mais de um modo de introduzir as transformações de Lorentz.

Exercício 2 *Transformações de Lorentz para a velocidade.* Obtenha as transformações de Lorentz para as três componentes da velocidade ordinária v_x , v_y e v_z de um ponto material. Suponha que o referencial K' tenha velocidade constante \vec{V} em relação ao referencial K , e que os eixos coordenados dos dois sistemas sejam paralelos, veja a Figura 3. Você deve obter

$$v_x = \frac{v'_x + \beta c}{1 + \frac{V v'_x}{c^2}},$$

$$v_y = \frac{v'_y}{1 + \frac{V v'_x}{c^2}}$$

$$v_z = \frac{v'_z}{1 + \frac{V v'_x}{c^2}}$$

Obtenha o limite $\beta \ll 1$ das equações acima. ■

Exercício 3 *Transformações de Lorentz para a aceleração.* Obtenha as transformações de Lorentz para as três componentes da aceleração ordinária a_x , a_y e a_z . Suponha que o referencial K' tenha velocidade constante $\mathbf{V} = V\hat{x}$ em relação ao referencial K e que os eixos coordenados dos dois sistemas sejam paralelos, veja a Figura 3, e inicialmente coincidentes. ■

Você deve obter:

$$a_x = \frac{a'_x}{\gamma^3 \left(1 + \frac{V v'_x}{c^2}\right)^3},$$

$$a_y = \frac{a'_y}{\gamma^2 \left(1 + \frac{V v'_x}{c^2}\right)^2} - \frac{(V v'_y/c^2) a'_x}{\gamma^3 \left(1 + \frac{V v'_x}{c^2}\right)^3},$$

e uma expressão similar para a_z . Para obter as transformações inversas troque V por $-V$.

2 As transformações de Lorentz como rotações imaginárias.

Consideremos uma vez mais o relógio representado na Figura 4. Se utilizarmos um sistema coordenadas cartesianas apropriado, para o relógio em repouso em relação a um referencial inercial podemos escrever:

$$\Delta t' = \tau_0 = \frac{2\ell_0}{c}, \quad \Delta x' = 0, \quad \Delta y' = 0, \quad \Delta z' = 0. \quad (43)$$

Portanto,

$$-c^2 (\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 = -4\ell_0^2. \quad (44)$$

O observador inercial que vê o mesmo relógio mover-se da esquerda para a direita com celeridade constante v , escreverá:

$$\Delta t = \tau = \frac{2\ell_0}{c} \gamma(\beta), \quad \Delta x = v \Delta t, \quad \Delta y = 0, \quad \Delta z = 0. \quad (45)$$

Assim, para este observador inercial:

$$\begin{aligned} -c^2 (\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 &= -4\ell_0^2 \gamma^2(\beta) + v^2 (\Delta t)^2 \\ &= -4\ell_0^2 \gamma^2(\beta) + v^2 \frac{4\ell_0^2 \gamma^2(\beta)}{c^2} \\ &= -4\ell_0^2 ! \end{aligned} \quad (46)$$

Ou seja,

$$-c^2 (\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 = -c^2 (\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2. \quad (47)$$

Embora verificada em um contexto particular, a Eq. (47) tem validade geral se os sistemas de coordenadas utilizados estiverem associados com referenciais inerciais.

A Eq. (47) permite introduzir uma outra representação para as transformações de Lorentz. Para entender como isto funciona, recordemos as rotações em torno de um eixo fixo, digamos o eixo cartesiano z , no \mathbb{R}^2 . Se fizermos uma rotação de um ângulo de medida θ em torno do eixo z , como na Figura 7, então:

$$x = \cos \theta x' - \text{sen } \theta y' \quad (48)$$

$$y = \text{sen } \theta x' + \cos \theta y'. \quad (49)$$

Para obter a transformação inversa fazemos as substituições $\theta \rightarrow -\theta$, $x \leftrightarrow x'$, e $y \leftrightarrow y'$:

$$x' = \cos \theta x + \text{sen } \theta y \quad (50)$$

$$y' = -\text{sen } \theta x + \cos \theta y. \quad (51)$$

O invariante associada com essa transformação é:

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2, \quad (52)$$

que é o quadrado da distância da origem a um ponto P do \mathbb{R}^2 . A figura geométrica naturalmente associada com essa rotação e o seu invariante é o círculo de raio r , cuja equação em cartesianas é:

$$x^2 + y^2 = r^2. \quad (53)$$

A relação trigonométrica fundamental:

$$\cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta = 1, \quad (54)$$

sugere a representação paramétrica:

$$x = r \cos \theta \quad (55)$$

$$y = r \text{sen } \theta. \quad (56)$$

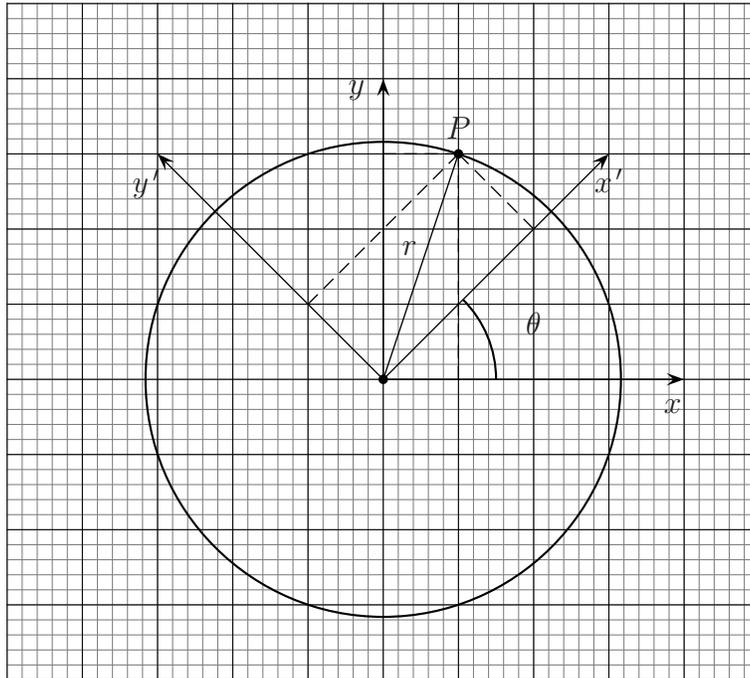


Figura 7: Rotação no \mathbb{R}^2 . A quantidade $r^2 = x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$, é um invariante frente à rotação em torno do eixo z .

Consideremos agora o invariante:

$$(\Delta s)^2 = -c^2 (\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2, \tag{57}$$

e as transformações:

$$ct' = \cosh \theta ct - \sinh \theta x \tag{58}$$

$$x' = -\sinh \theta ct + \cosh \theta x \tag{59}$$

$$y' = y, \tag{60}$$

$$z' = z, \tag{61}$$

onde θ é determinado por:

$$\beta = \tanh \theta. \tag{62}$$

A transformação dadas pelas Eqs. (58), (59), (60), e (61), deixam o **intervalo**, Eq. (57), na verdade, o intervalo ao quadrado, invariante, como pode ser explicitamente verificado se lembrarmos a relação fundamental:

$$\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1. \quad (63)$$

Combinando as Eqs. (62) e (63), podemos mostrar facilmente que:

$$\sinh \theta = \gamma(\beta), \quad (64)$$

e

$$\cosh \theta = \beta \gamma(\beta). \quad (65)$$

Segue então que:

$$t' = \gamma(\beta) \left(t - \beta \frac{x}{c} \right), \quad (66)$$

$$x' = \gamma(\beta) (x - \beta ct), \quad (67)$$

que são as transformações de Lorentz para a direção x na forma usual. As transformações dadas pelas Eqs. (58), (59), (60), e (61), representam uma rotação de um ângulo imaginário $i\theta$ e a figura geométrica naturalmente associada com o invariante é uma hipérbole cuja equação se escreve:

$$-(ct)^2 + x^2 = r^2, \quad (68)$$

A Eq. (63) sugere a seguinte representação paramétrica dessa hipérbole:

$$x = r \cosh \theta = \frac{r \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (69)$$

$$ct = r \sinh \theta = \frac{r}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (70)$$

A Figura 8 sumariza nossos resultados. Para obter o eixo x' basta fazer $t' = 0$. Segue da TL apropriada que o eixo x' é definido pela equação $x = \beta ct$, ou $ct = \beta^{-1} x$. Da mesma forma, para obter o eixo ct' , basta fazer $ct' = 0$. Segue então que $ct = \beta x$.

As transformações de Lorentz (redescobertas por Einstein) mostram que o tempo deve ser tratado como uma coordenada ordinária. Isto permite imaginar uma fusão do espaço e do tempo em uma única entidade: o **espaçotempo**. Foi Hermann Minkowski, antigo professor de Einstein na ETH, quem introduziu e desenvolveu matematicamente o conceito em um ensaio de 1908. A citação a seguir é famosa.

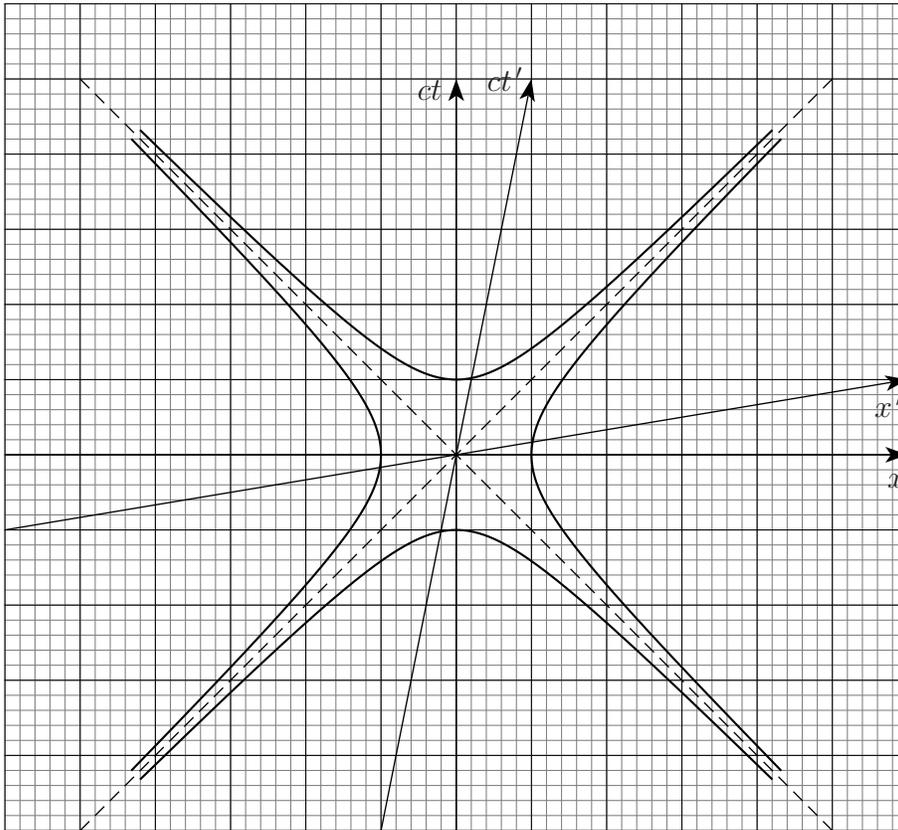


Figura 8: Espaço-tempo.

As visões de espaço e de tempo que quero apresentar-lhes brotaram do solo da física experimental, e nisto reside sua força. Elas são radicais. Doravante, o espaço em si mesmo e o tempo em si mesmo estão condenados a esmaecer transformando-se em simples sombras e somente uma espécie de união dos dois preservará uma realidade independente.

A abordagem de Minkowski à RR leva a um tratamento geométrico do espaço-tempo que é vital para a gravitação relativística. Parte desse tratamento geométrico foi exposto acima.

2.1 Tipos de intervalo, linhas de universo e tempo próprio

Na forma infinitesimal, o quadrado do invariante de Lorentz fundamental, ou simplesmente, intervalo, se escreve:

$$(ds)^2 = -c^2 (dt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2. \quad (71)$$

O invariante $(ds)^2$, pode ser negativo, nulo ou positivo. A nomenclatura correspondente é: **tipo tempo** se $(ds)^2 < 0$, **tipo luz** se $(ds)^2 = 0$, e **tipo espaço** se $(ds)^2 > 0$. Uma trajetória no diagrama espaçotempo é chamada **linha de universo** ou **linha de mundo**. O conjunto das trajetórias descritas por raios de luz define um cone duplo com vértice em um **evento**, que é como denotamos um ponto do espaçotempo. Em duas dimensões, uma espacial e a outra temporal, ou $1 + 1$, o cone de luz é representado pelas linhas tracejadas na Figura 9. O cone de luz com vértice em um evento define três regiões do espaçotempo: o futuro, o passado e alhures. A cada ponto do espaçotempo podemos associar um cone de luz. Passado, futuro e alhures são definidos em relação a um evento particular. Na Figura 9, representa-se uma partícula que se move em movimento retilíneo uniforme, e também o movimento hiperbólico de uma partícula uniformemente acelerada. As partículas progridem de eventos no passado para o futuro. Ambos movimentos serão discutidos com mais detalhes mais adiante. O movimento hiperbólico está fora do cone de luz do observador na origem. Isto significa que não há possibilidade de que o movimento da partícula seja percebido por esse observador. Mas, para outros cones de luz com vértices em outros eventos do espaçotempo, este movimento será percebido.

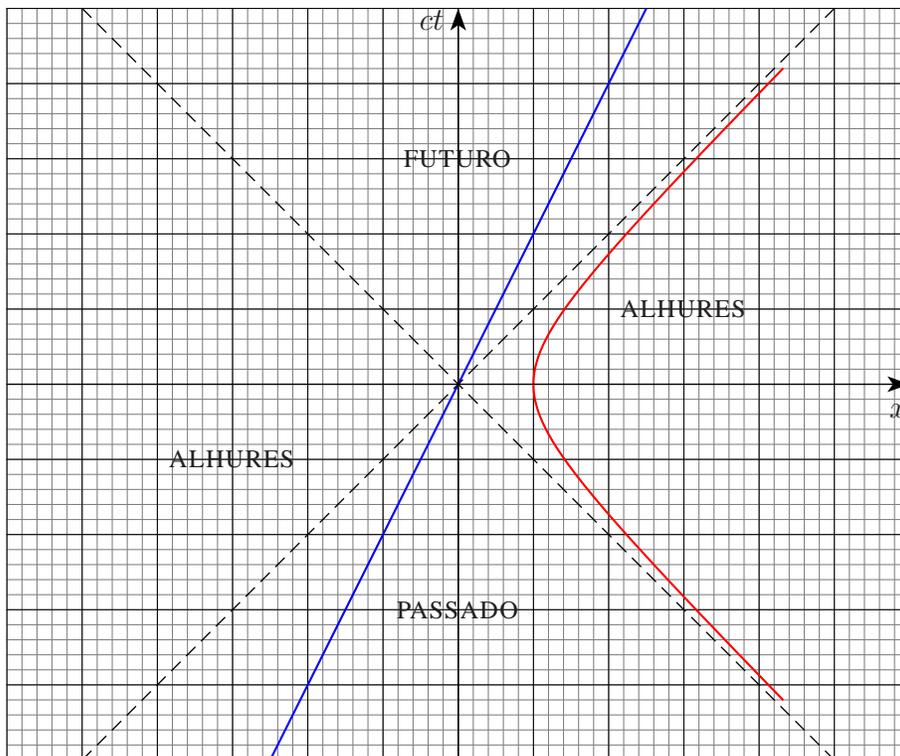


Figura 9: Cone de luz com vértice na origem.

Um segmento de curva no espaçotempo tem um comprimento quadrado $(ds)^2$. Se o segmento for do tipo tempo $(ds)^2 < 0$, o intervalo de tempo, ou duração, marcado por um relógio que se move sobre essa curva definido por:

$$(d\tau)^2 := -\frac{(ds)^2}{c^2}. \quad (72)$$

mede o **tempo próprio** e, por construção, é um invariante de Lorentz. Para uma trajetória do tipo tempo podemos escrever:

$$(c d\tau)^2 = (dt)^2 - (dx)^2 = (dt)^2 \left[1 - \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right], \quad (73)$$

ou,

$$d\tau = \frac{dt}{\sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}}, \quad (74)$$

onde $v(t) \equiv dx(t)/dt$ é a velocidade instantânea do relógio (ou se preferirmos, do corpo material). Observe que o relógio/corpo material pode estar acelerado. O que se exige é que o referencial em relação ao qual o movimento é descrito seja inercial. Observe também que o tempo próprio é sempre menor do que o intervalo de tempo coordenado dt . O exemplo a seguir ilustra o conceito.

Exemplo 1 *O paradoxo dos gêmeos I. Versão high-tech* Cástor e Pólux são dois robôs idênticos que entraram em operação ao mesmo tempo. Cástor é controlador de missões espaciais e Pólux, astronauta-explorador. Pólux é enviado em missão de reconhecimento a 47 *Ursae Majoris d*, um exoplaneta situado a uma distância $D = 45.9$ anos-luz da Terra, em uma astronave capaz de atingir 80% da velocidade da luz. No dia da partida os robôs têm 2 anos de atividade. Qual será diferença de idade entre eles quando voltarem a reunir-se na Terra? Por simplicidade, faremos a suposição de que a viagem de ida e a de volta é feita com celeridade constante e desprezaremos a aceleração (infinita!) que a nave de Pólux sofre para que possa voltar. Desprezaremos também o tempo de estadia de Pólux em 47 *Ursae Majoris d*. Considere o diagrama espaçotempo mostrado na Figura 10. A semirreta em vermelho, $x = D$, paralela ao eixo temporal ct corresponde à linha de universo de 47 *Ursae Majoris d*. A linha de universo de Cástor coincide com o eixo ct . A curva em azul corresponde à linha de universo de Pólux. O tempo próprio para a viagem de ida é dado por:

$$\begin{aligned}
 (\Delta \tau_{\text{ida}})^2 &= -\frac{(\Delta s)^2}{c^2} = (\Delta t)^2 - \left(\frac{\Delta x}{c}\right)^2 \\
 &= (\Delta t)^2 (1 - \beta^2).
 \end{aligned}
 \tag{75}$$

Mas,

$$\Delta t = \frac{D}{v} = \frac{D}{\beta c},
 \tag{76}$$

onde $\beta = 0.80 c$. Segue então que o intervalo de tempo próprio correspondente à viagem de ida é:

$$\Delta \tau_{\text{ida}} = \frac{D}{\beta c} \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{49.5 \text{ anos} \cdot c \sqrt{1 - (0.8)^2}}{0.8 c} \approx 37.1 \text{ anos}
 \tag{77}$$

Por simetria, o tempo próprio correspondente à viagem de ida e volta é igual a duas vezes este valor, logo, pelo relógio de bordo (=tempo próprio), a viagem dura:

$$\Delta \tau_{\text{ida e volta}} = 2 \times \Delta \tau_{\text{ida}} \approx 74.3 \text{ anos}.
 \tag{78}$$

O tempo coordenado (ct) que é o tempo transcorrido na Terra é igual a $2 \times D/(\beta c) = 99$ anos. Portanto, ao reunirem-se, Cástor tem $99 + 2 = 101$ anos de funcionamento e Pólux $74.3 + 2 = 76.3$ anos. Por fim, observe que não há paradoxo algum, pois a dinâmica dos robôs gêmeos não é idêntica. Um dos robôs, Pólux, sofre aceleração enquanto que o outro não.

Exemplo 2 *O paradoxo dos gêmeos. Versão low-tech tradicional.* Uma nave espacial parte da Terra no ano 2100 com destino a um sistema estelar distante. Um dos membros de um casal de gêmeos nascidos em 2080 permanece na Terra, o outro parte com a nave. A nave tem aceleração g em relação a um sistema de referência em relação ao qual a nave está instantaneamente em repouso (o referencial co-movente). O foguete acelera em linha reta durante cinco anos medidos no relógio de bordo, desacelera com a mesma taxa de desaceleração (em módulo) por mais 5 anos, dá a volta, acelera com aceleração g por 5 anos, desacelera com g por 5 anos e chega de volta à Terra. O gêmeo que partiu agora tem 40 anos.

- (a) Em que ano estamos na Terra?
- (b) Que distância da Terra o foguete alcançou?

Evidentemente temos que relacionar o tempo decorrido na nave (o tempo próprio) com o tempo τ o tempo (coordenado) transcorrido na Terra t . Em um referencial que se move instantaneamente com o nave:

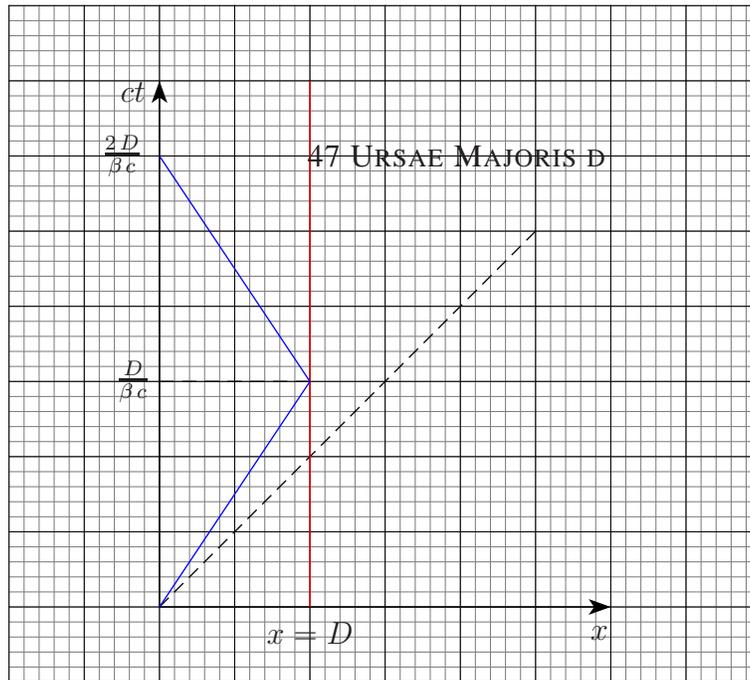


Figura 10: Diagrama espaçotempo para o paradoxo dos gêmeos. A linha de universo do gêmeo que fica na Terra coincide com o semi-eixo $ct \geq 0$

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma(t)},$$

onde:

$$\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta(t)^2}}.$$

Portanto, temos que determinar $\beta(t)$. Para determinar $\beta(t)$ escrevemos (referencial da Terra):

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = c \frac{d\beta(t)}{dt}.$$

Mas,

$$a_x = \left(1 - \frac{v_x^2(t)}{c^2}\right)^{3/2} a'_x,$$

onde $a'_x = g$ (em valor!!!). Segue que:

$$c \frac{d\beta(t)}{dt} = \left(1 - \frac{v_x^2(t)}{c^2}\right)^{3/2} g.$$

A condição inicial é $\beta(0) = 0$, pois a nave parte do repouso. Resolvendo a equação diferencial para $\beta(t)$ vc deve obter:

$$\gamma(t) = \sqrt{1 + \left(\frac{gt^2}{c}\right)}.$$

Agora calcule τ para 1/4 da viagem. O τ total será $4 \times \tau$. Simetria. O resultado é um arcosseno hiperbólico. Inverta e obtenha t como função de τ . Como $\tau = 5$ anos, *etcetera...* . Resposta: $t \approx 360$ anos.

2.2 Simultaneidade

Uma das conseqüências mais importantes que decorre dos postulados da relatividade restrita e que pode ser facilmente percebida com a visualização das transformações de Lorentz no diagrama espaçotempo é o fato de que a **simultaneidade** de dois ou mais eventos é relativa. Sejam A e B dois eventos simultâneos no referencial \mathcal{K} , por exemplo: duas explosões simultâneas. No referencial \mathcal{K}' que se move com velocidade uniforme v em relação ao referencial \mathcal{K} , o evento B claramente precede o evento A , ou seja: a explosão B ocorre antes da explosão A .

3 Quadrivetores

Definição: um **quadrivetor** é um segmento de reta orientado no espaçotempo plano de Minkowski. Neste sentido, o quadrivetor é uma generalização tímida do vetor geométrico ordinário, ou na nossa terminologia, um **trivetor**, do espaço tridimensional euclidiano. Notação: quadrivetores serão denotados em negrito: \mathbf{A} , \mathbf{a} ; trivetores ordinários serão denotados por \vec{V} , \vec{v} . A álgebra dos quadrivetores é a mesma dos trivetores, por exemplo: para somar dois ou mais quadrivetores usa-se a regra do paralelograma ou a regra do polígono. Quadrivetores podem ser multiplicados por um número real. O que diferencia um quadrivetor de um trivetor é o modo de calcular o seu módulo. Vejamos como isto acontece.

Há três tipos de quadrivetores: tipo tempo, nulo, e tipo espaço. A Figura 12 mostra um evento arbitrário e o seu cone de luz associado. O quadrivetor \mathbf{a} é tipo tempo, pois tem origem no evento P e final em um outro evento dentro do cone de luz. Da mesma forma, o quadrivetor \mathbf{b} é do tipo luz, ou nulo, e o quadrivetor \mathbf{c} é do tipo espaço.

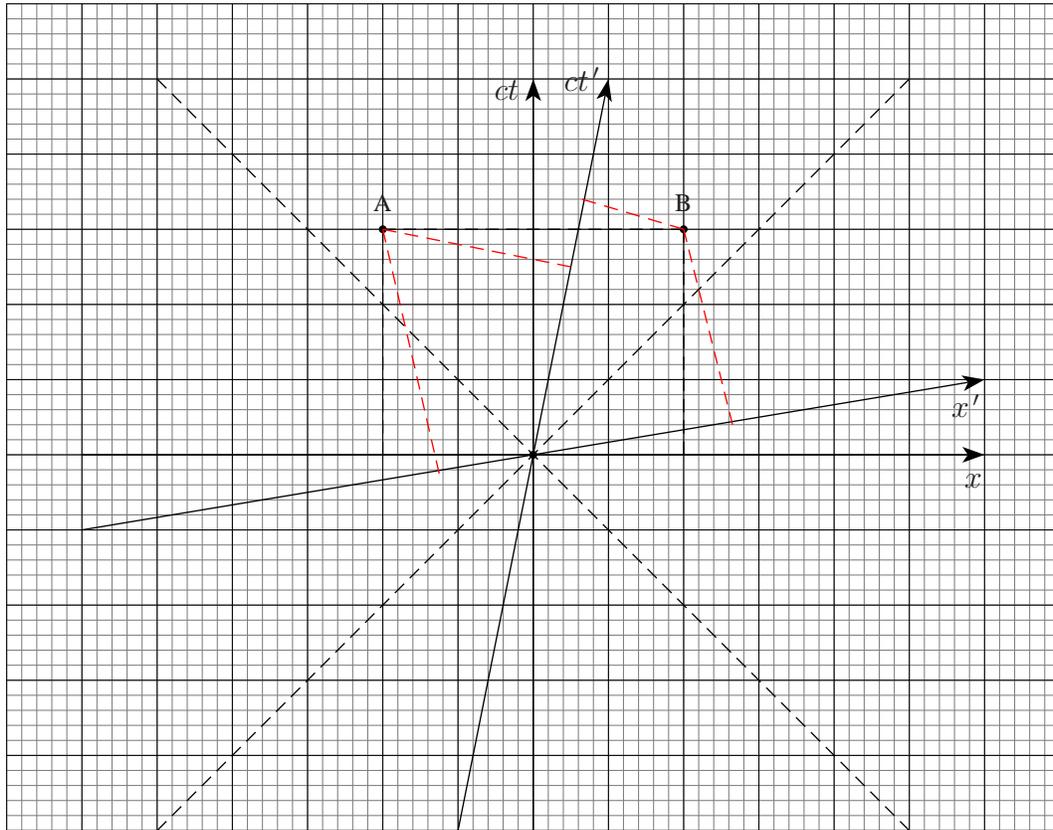


Figura 11: A simultaneidade é relativa.

Dado um referencial inercial, podemos introduzir uma base de quadri-vetores unitários ortogonais:

$$\{e_t, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}, \tag{79}$$

ou em notação mais conveniente:

$$\{e_0, e_1, e_2, e_3\}. \tag{80}$$

Explicitamente, os quadri-vetores unitários se escrevem:

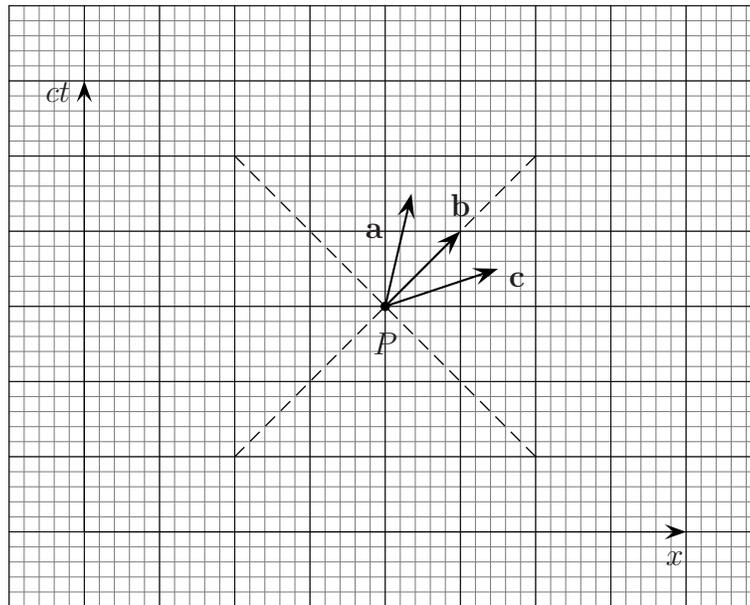


Figura 12: Tipos de quadri vetores.

$$\mathbf{e}_0 = (1, 0, 0, 0), \tag{81}$$

$$\mathbf{e}_1 = (0, 1, 0, 0), \tag{82}$$

$$\mathbf{e}_2 = (0, 0, 1, 0), \tag{83}$$

$$\mathbf{e}_3 = (0, 0, 0, 1). \tag{84}$$

$$\tag{85}$$

Um quadri vetor \mathbf{a} pode ser expresso como uma combinação linear dos vetores da base:

$$\mathbf{a} = a^t \mathbf{e}_t + a^x \hat{\mathbf{x}} + a^y \hat{\mathbf{y}} + a^z \hat{\mathbf{z}}, \tag{86}$$

ou de forma equivalente:

$$\mathbf{a} = a^0 \mathbf{e}_0 + a^x \mathbf{e}_1 + a^y \mathbf{e}_2 + a^z \mathbf{e}_3 = \sum_{\alpha=1}^3 a^\alpha \mathbf{e}_\alpha. \tag{87}$$

Neste ponto convém introduzir a convenção de Einstein para a soma: dois índices repetidos indicam soma sobre o índice:

$$\sum_{\alpha=1}^3 a^\alpha \mathbf{e}_\alpha \equiv a^\alpha \mathbf{e}_\alpha; \quad (88)$$

logo, podemos escrever:

$$\mathbf{a} = a^\alpha \mathbf{e}_\alpha. \quad (89)$$

Há formas alternativas muito comuns representar os quadrivetores:

$$a^\alpha = (a^t, a^x, a^y, a^z); \quad a^\alpha = (a^0, a^j); \quad a^\alpha = (a^0, \vec{a}), \quad (90)$$

e outras, todas igualmente válidas. O contexto nos dirá qual a forma mais útil. Eis alguns exemplos de quadrivetores:

Exemplo 3 O quadrivetor de posição em relação a um sistema inercial é definido por:

$$\mathbf{x} = x^0 \mathbf{e}_0 + x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3,$$

onde $x^0 := ct$. Ou ainda:

$$x^\alpha = (x^0, \vec{x}).$$

A separação entre dois eventos A e B no espaçotempo é definida por:

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A,$$

ou:

$$\Delta x^\alpha = x_B^\alpha - x_A^\alpha.$$

Esta última equação equivale a quatro equações:

$$\Delta x^0 = x_B^0 - x_A^0;$$

$$\Delta x^1 = x_B^1 - x_A^1;$$

$$\Delta x^2 = x_B^2 - x_A^2;$$

$$\Delta x^3 = x_B^3 - x_A^3.$$

A característica marcante dos quadrivetores é o seu **produto escalar** que é definido por:

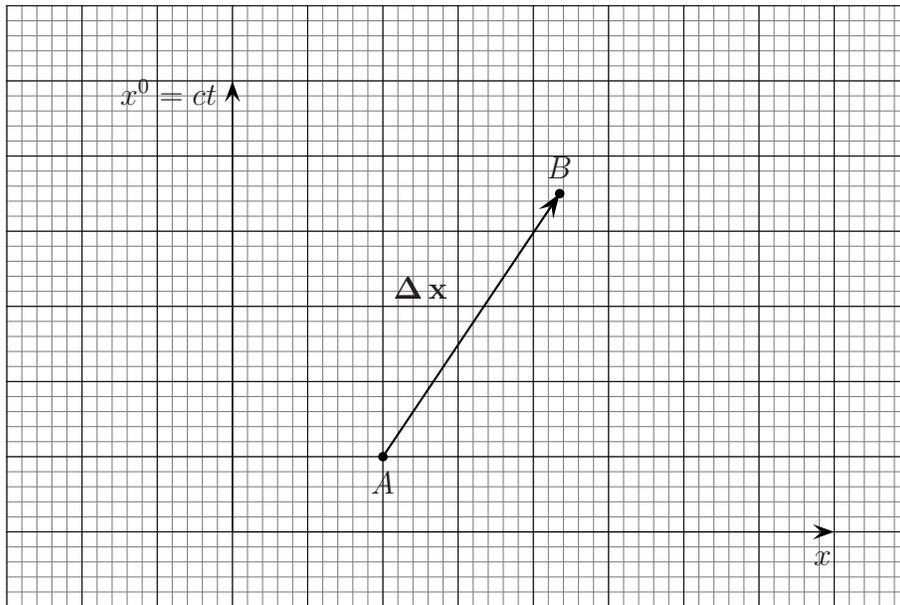


Figura 13: Deslocamento no espaçotempo.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := -a^0 b^0 + a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3. \tag{91}$$

O produto escalar tem as propriedades usuais:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}; \tag{92}$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}; \tag{93}$$

$$(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \tag{94}$$

Com a convenção de Einstein em vigor e as propriedades do produto escalar podemos também escrever (soma dupla implícita):

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a^\alpha \mathbf{e}_\alpha) \cdot (b^\beta \mathbf{e}_\beta) = (\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta) a^\alpha b^\beta, \tag{95}$$

Definindo:

$$\eta_{\alpha\beta} := \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta, \tag{96}$$

escrevemos:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \eta_{\alpha\beta} a^\alpha b^\beta. \tag{97}$$

A soma dupla pode ser desenvolvida e o resultado é:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \eta_{00} a^0 b^0 + \eta_{01} a^0 b^1 + \eta_{02} a^0 b^2 + \eta_{03} a^0 b^3 \\
&+ \eta_{10} a^1 b^0 + \eta_{11} a^1 b^1 + \eta_{12} a^1 b^2 + \eta_{13} a^1 b^3 \\
&+ \eta_{20} a^2 b^0 + \eta_{21} a^2 b^1 + \eta_{22} a^2 b^2 + \eta_{23} a^2 b^3 \\
&+ \eta_{30} a^3 b^0 + \eta_{31} a^3 b^1 + \eta_{32} a^3 b^2 + \eta_{33} a^3 b^3.
\end{aligned} \tag{98}$$

Da propriedade comutativa do produto escalar segue que:

$$\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\beta\alpha}. \tag{99}$$

Assim, por exemplo, $\eta_{12} = \eta_{21}$. Por outro lado, da definição do produto escalar (claramente inspirado no intervalo quadrático $(ds)^2$) vemos que todos os coeficientes $\eta_{\alpha\beta}$ devem ser nulos, exceto os coeficientes para os quais $\alpha = \beta$. Segue também da definição do produto escalar que: $\eta_{00} = -1$, $\eta_{11} = 1$, $\eta_{22} = 1$, e $\eta_{33} = 1$. Os coeficientes reais $\eta_{\alpha\beta}$ são chamados por motivos que ficarão claros mais tarde, componentes do tensor métrico do espaçotempo plano, ou métrica do espaçotempo de Minkowski. Muitas vezes convém escrevê-los na forma matricial:

$$\boldsymbol{\eta} \equiv (\eta)_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{100}$$

Outra característica importante dos quadri vetores: frente às transformações de Lorentz na direção do eixo x que vimos anteriormente, **um quadri vetor deve transformar-se como o quadri vetor de posição x^α** , isto é:

$$a^0 = \gamma a'^0 + \gamma\beta a'^1 \tag{101}$$

$$a^1 = \gamma\beta a'^0 + \gamma a'^1 \tag{102}$$

$$a^2 = a'^2 \tag{103}$$

$$a^3 = a'^3, \tag{104}$$

A transformação inversa é:

$$a'^0 = \gamma a^0 - \gamma\beta a^1 \tag{105}$$

$$a'^1 = -\gamma\beta a^0 + \gamma a^1 \tag{106}$$

$$a'^2 = a^2 \tag{107}$$

$$a'^3 = a^3 \tag{108}$$

$$\tag{109}$$

As transformações de Lorentz de modo geral e na direção Ox em particular podem ser escritas na forma matricial. Para a direção Ox , a matriz que conecta o quadrivetor a^α temos:

$$\mathbf{L} \equiv (L)^\alpha_\beta(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (110)$$

e a inversa se escreve:

$$\mathbf{L}^{-1} \equiv (L)^\alpha_\beta(-\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (111)$$

Exercício 4 Mostre que $\mathbf{L}\mathbf{L}^{-1} = \mathbb{1}$, onde $\mathbb{1}$ é a matriz unitária. ■

As transformações direta e inversa de um quadrivetor se escrevem:

$$a^\alpha = (L)^\alpha_\beta(\beta) a'^\beta, \quad (112)$$

e

$$a'^\alpha = (L)^\alpha_\beta(-\beta) a^\beta. \quad (113)$$

(Soma sobre o índice β).

3.1 A quadrivelocidade

Um quadrivetor especialmente importante é a quadrivelocidade que pode ser definida do modo seguinte: Uma partícula descreve uma curva ou linha de universo do tipo tempo no espaço de Minkowski. Esta curva pode ser descrita sabendo-se como as coordenadas espaciais x^j variam como função do tempo t , ou $x^0 = ct$. Este foi o procedimento que seguimos para desenhar os eixos x'^1 , e ct' da Figura 8 do ponto de vista do referencial cujos eixos são x e ct . Entretanto, como na geometria euclidiana, convém descrever a curva no espaço quadridimensional por meio de uma representação paramétrica bem definida. Neste caso, a curva fica descrita por:

$$x^\alpha = x^\alpha(\sigma), \quad (114)$$

onde σ é um parâmetro conveniente. Muitas são as possibilidades de escolha do parâmetro, mas uma delas é a natural: o tempo próprio τ que relaciona-se com a distância percorrida pela

partícula ao longo da sua linha de universo medida a partir de um ponto de referência. Neste caso, a representação paramétrica da linha de mundo se escreve:

$$x^\alpha = x^\alpha(\tau). \quad (115)$$

O parâmetro τ pode ser medido com um relógio que viaja com a partícula. Por definição, a quadrivelocidade é então dada por:

$$\mathbf{u} := \frac{d\mathbf{x}}{d\tau}, \quad (116)$$

ou em termos das componentes:

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}. \quad (117)$$

As quatro componentes da quadrivelocidade se escrevem:

$$u^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = c \frac{dt}{d\tau} = \gamma c, \quad (118)$$

$$u^1 = \frac{dx^1}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dx^1}{dt} = \gamma v^1, \quad (119)$$

$$u^2 = \frac{dx^2}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dx^2}{dt} = \gamma v^2, \quad (120)$$

$$u^3 = \frac{dx^3}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dx^3}{dt} = \gamma v^3, \quad (121)$$

$$(122)$$

ou ainda:

$$\mathbf{u} = (\gamma c, \gamma \vec{v}). \quad (123)$$

A quadrivelocidade satisfaz à relação:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -c^2. \quad (124)$$

Exercício 5 Obtenha a normalização da quadrivelocidade, Eq. (124). ■

4 Dinâmica relativística

A equação de movimento de uma partícula na dinâmica relativística se escreve:

$$m \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = \mathbf{F}, \quad (125)$$

onde m é a massa inercial da partícula, também chamada **massa de repouso**, discutiremos mais sobre o tema logo adiante. Em notação alternativa podemos escrever a Eq.(125) como:

$$m \frac{d u^\alpha}{d\tau} = F^\alpha, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3. \quad (126)$$

A quadriaceleração fica definida por:

$$\mathbf{a} := \frac{d\mathbf{u}}{d\tau}. \quad (127)$$

Isto significa que podemos escrever também:

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a}. \quad (128)$$

A Eq. (124), a normalização da velocidade, significa que:

$$\frac{d}{d\tau} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = 0. \quad (129)$$

Tomando o produto escalar da Eq. (125) com a quadri velocidade \mathbf{u} :

$$\begin{aligned} m \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} \cdot \mathbf{u} &= \frac{m}{2} \frac{d}{d\tau} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) \\ &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (130)$$

Segue então que, a quadriforça \mathbf{F} e a quadri velocidade devem satisfazer à relação:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (131)$$

Isto significa que a Eq. (125) leva a três equações de movimento independentes.

Exercício 6 Mostre que a Eq. (125) mantém a sua forma frente a uma transformação de Lorentz no direção x . ■

Como se escrevem as componentes da quadriforça? Para responder a esta pergunta examinaremos outro quadri vetor importante: o **quadrimomento**. Por definição, o quadrimomento é dado por:

$$\mathbf{p} := m \mathbf{u}. \quad (132)$$

A equação de movimento pode ser então rescrita na forma:

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \mathbf{F}. \quad (133)$$

Da Eq. (124), vemos que,

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{p}^2 = -m^2 c^2. \quad (134)$$

Como sabemos as componentes da quadrivelocidade, podemos escrever:

$$\mathbf{p} \equiv p^\alpha = (\gamma mc, \gamma m \vec{v}). \quad (135)$$

A componente p^0 pode ser relacionada com a energia da partícula:

$$\begin{aligned} p^0 &= \gamma mc = mc (1 - \beta^2)^{-1/2} \\ &= mc \left(1 + \frac{1}{2} m\beta^2 + \frac{3}{8} \beta^4 + O(\beta^6) \right). \end{aligned} \quad (136)$$

Multiplicando ambos os lados por c :

$$cp^0 = mc^2 + \frac{1}{2} mv^2 + \dots \quad (137)$$

O lado direito desta equação temos um termo constante, mc^2 , a energia de repouso, seguida de um termo familiar, a energia cinética não-relativística, e termos de ordem mais alta que dependem da velocidade da partícula, e que podem ser interpretados como correções relativísticas. Portanto, é plausível definir: $E := cp^0$, como a energia relativística de uma partícula livre e escrever a forma alternativa para o quadrimomento:

$$\mathbf{p} \equiv p^\alpha = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right). \quad (138)$$

Agora que sabemos as componentes do quadrimomento podemos usar a Eq. (134) e mostrar facilmente que:

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \vec{p}^2}. \quad (139)$$

A energia cinética relativística é definida por:

$$K := E - mc^2 = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \vec{p}^2} - mc^2. \quad (140)$$

A equação de movimento na forma dada pela Eq. (133) permite escrever:

$$(F^0, \vec{F}) = \left(\frac{dE/c}{d\tau}, \frac{d\vec{p}}{d\tau} \right) = \left(\frac{\gamma}{c} \frac{dE}{dt}, \gamma \frac{d\vec{p}}{dt} \right). \quad (141)$$

Estabelecendo as correspondências:

$$F^0 \rightarrow \frac{\gamma}{c} \frac{dE}{dt} = \frac{\gamma}{c} \vec{F} \cdot \vec{v},$$

$$\vec{F} \rightarrow \gamma \frac{d\vec{p}}{dt} = \gamma \vec{F}.$$

A quadriforça se escreve então:

$$\mathbf{F} = \left(\gamma \vec{F} \cdot \vec{v}/c, \gamma \vec{F} \right). \quad (142)$$

Exercício 7 Verifique que a quadriforça, Eq. (142), satisfaz a condição dada pela Eq. (131).

■

A versão relativística do teorema trabalho-energia cinética leva a um célebre resultado. A equação de movimento pode também ser escrita na forma trivetorial:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} (m\gamma \vec{v}). \quad (143)$$

Multiplicando escalarmente por um trideslocamento arbitrário $d\vec{\ell}$ e integrando:

$$\begin{aligned} \Delta K &= \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_1^2 [d(\gamma m) \vec{v} \cdot \vec{v} + (\gamma m) \vec{v} \cdot d\vec{v}] \\ &= \int_1^2 \left[d(\gamma m) \vec{v}^2 + (\gamma m) d\left(\frac{1}{2} v^2\right) \right], \end{aligned} \quad (144)$$

onde $\vec{v}^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. Definindo:

$$x := \gamma m = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (145)$$

temos,

$$x^2 c^2 - x^2 \vec{v}^2 = m^2 c^2. \quad (146)$$

Diferenciando:

$$dx c^2 - dx \vec{v}^2 - x d\left(\frac{1}{2} \vec{v}^2\right) = 0, \quad (147)$$

logo,

$$x d\left(\frac{1}{2} \vec{v}^2\right) = dx c^2 - dx \vec{v}^2. \quad (148)$$

Segue que:

$$\Delta K = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_1^2 d(\gamma m) c^2, \quad (149)$$

ou ainda,

$$\Delta K = \gamma_2 m c^2 - \gamma_1 m c^2. \quad (150)$$

Se a partícula partir do repouso, $\gamma_1 = 1$, e atingir uma velocidade arbitrária \vec{v} , a variação da energia cinética será:

$$\Delta K = \gamma m c^2 - m c^2. \quad (151)$$

Segue então que podemos escrever também,

$$E = \gamma m c^2. \quad (152)$$

Um resultado útil que nos ajudará a estabelecer um resultado importante é:

$$\frac{d(\gamma m)}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c^2}. \quad (153)$$

Com esse resultado podemos demonstrar que na RR, **a triferça e a triaceleração não são paralelas!** De fato,

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{\gamma m} - \frac{(\vec{F} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{v}}{\gamma m c^2}. \quad (154)$$

Observe que \vec{v} é a velocidade da partícula. Os resultados para a energia, o teorema trabalho-energia cinética e triaceleração são válidos em um referencial inercial.

Exercício 8 Obtenha as Eqs. (153) e (154). ■

Vejam como aplicar essas equações a dois problemas concretos. No primeiro obteremos a correção relativística à razão carga/massa de uma partícula carregada, por exemplo, um elétron. No segundo, discutiremos o movimento hiperbólico de uma partícula no espaçotempo, o equivalente relativístico do MRUV.

Exemplo 4 *Movimento de uma partícula carregada em um campo magnético uniforme.* Considere uma partícula de massa de repouso m e carga q que se move com velocidade \vec{v} em uma trajetória circular de raio R contida em um plano perpendicular a uma campo magnético de intensidade B . Queremos determinar o raio de trajetória em função dos dados do problema. A equação de movimento. Eq. (125) conduz à:

$$\begin{aligned} \frac{d(m\gamma c)}{d\tau} &= \gamma \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c} \\ \frac{d(m\gamma \vec{v})}{d\tau} &= \gamma \vec{F} \end{aligned}$$

onde \vec{F} é a força de Lorentz:

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}.$$

Por outro lado, a relação entre o tempo próprio e o tempo coordenado permite-nos escrever:

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt} = \gamma \frac{d}{dt}.$$

Segue que as equações de movimento podem ser rescritas na forma:

$$\begin{aligned} \frac{d(\gamma)}{dt} &= \frac{q}{mc^2} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} \\ \frac{d(\gamma m \vec{v})}{dt} &= q (\vec{v} \times \vec{B}) \end{aligned}$$

Usando a propriedade cíclica do produto misto:

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = (\vec{B} \times \vec{C}) \cdot \vec{A} = (\vec{C} \times \vec{A}) \cdot \vec{B},$$

segue que γ é constante! Logo, podemos escrever:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \vec{a} = \frac{q}{\gamma m} (\vec{v} \times \vec{B}).$$

Como a órbita é circular, a aceleração é centrípeta, isto é: a força é perpendicular à velocidade e aponta para o centro do círculo. Segue que:

$$\frac{v^2}{R} = \frac{qvB}{\gamma m},$$

onde $v = \|\vec{v}\|$, e γ depende da celeridade da partícula. Portanto,

$$R = \frac{\gamma m v}{qB} = \frac{p}{qB},$$

onde $p = \|\vec{p}\| = \gamma m v$, é a magnitude do momento linear relativístico.

Considere um elétron de 10 MeV de energia (cinética) que descreve uma órbita circular em um campo magnético cuja intensidade vale 2 T. Lembrando que a energia de repouso do elétron vale 0.511 MeV \ll 10 MeV, temos:

$$p = \frac{\sqrt{E^2 - (mc^2)^2}}{c} \approx 10 \text{ MeV}/c.$$

Substituindo este valor na expressão para o raio e lembrando que $q = e = 1.6 \times 10^{19} \text{ C}$, obtemos:

$$R \approx 1.8 \text{ cm}.$$

Se utilizarmos a expressão não-relativística para a energia:

$$E = \frac{p^2}{2m},$$

onde $m = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ é a massa do elétron, obteremos:

$$R_{\text{NR}} \approx 0.53 \text{ cm},$$

uma diferença significativa que os experimentos decidiram em favor do resultado relativístico.

Exercício 9 *O movimento hiperbólico.* Mostre que sob a ação de uma (tri)força $\vec{F} = U \hat{x}$, isto é, uma força uniforme no espaço e constante no tempo, a trajetória da partícula no espaçotempo, ou seja, a sua linha de universo, é a curva hiperbólica:

$$-(x^0(\sigma) - x^0(\sigma_0))^2 + (x^1(\sigma) - x^1(\sigma_0))^2 = \frac{c^4}{a^2},$$

onde σ é um parâmetro invariante cujo valor inicial é σ_0 , e a é a magnitude da (tri)aceleração.

Sugestão: resolva a Eq. (125).

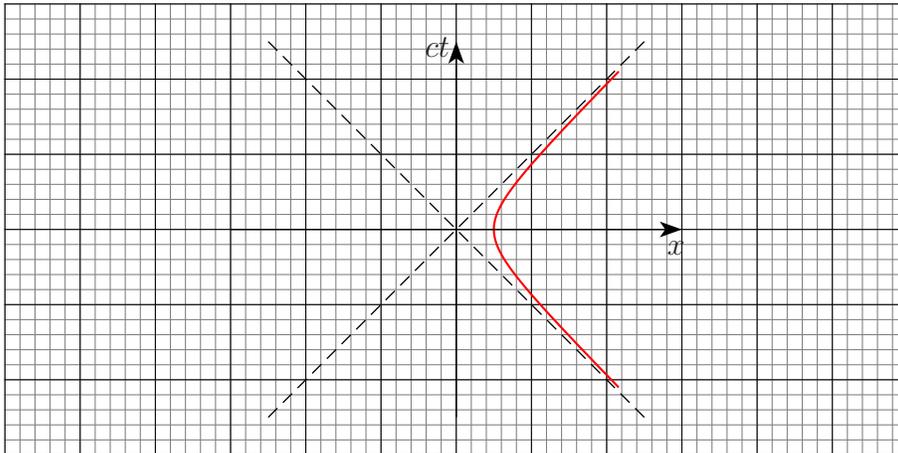


Figura 14: Movimento hiperbólico.



4.1 Partículas de massa nula

Quando a massa da partícula é nula, como é o caso, por exemplo, dos fótons de radiação eletromagnéticas, não podemos usar o tempo próprio como parâmetro invariante, pois nesse caso, $d\tau = 0$. Também teremos problemas com a quadrivelocidade, pois $\gamma \rightarrow \infty$. Mas, como essas partículas viajam sobre o cone de luz, a equação da linha de universo, em $1 + 1$, pode ser escrita:

$$x^0 = x^1 \tag{155}$$

ou ainda:

$$ct = x. \tag{156}$$

Parametricamente podemos escrever também:

$$x^\alpha = u^\alpha \lambda, \quad (157)$$

onde λ é o parâmetro invariante e $u^\alpha = (1, 1, 0, 0)$. Essa parametrização não é a única possível, mas é conveniente. Neste caso, a equação de movimento se escreve:

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\lambda} = 0. \quad (158)$$

Quando a equação de movimento para partículas de massa nula (fótons) assume a forma da equação de movimento de uma partícula de massa não-nula, o parâmetro escolhido é dito **parâmetro afim**.

Exercício 10 Mostre que para partículas de massa nula $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$. ■

5 O efeito Doppler

Um exemplo importante de quadrivetor é o quadrivetor associado com uma onda eletromagnética plana monocromática, o quadrivetor de onda. Considere os dois referenciais inerciais da Figura 15. Uma fonte de ondas monocromáticas emite ondas planas harmônicas a partir da origem do referencial $O'x'y'$. O quadrivetor de onda correspondente se escreve:

$$\mathbf{k}' \equiv k'^\alpha = (k'^0, k'^1, k'^2, k'^3). \quad (159)$$

Em relação ao referencial $O'x'y'$, veja a Figura 15:

$$k'^0 = k' \quad (160)$$

$$k'^1 = k'_x = k' \sin \vartheta' \sin \varphi', \quad (161)$$

$$k'^2 = k'_y = k' \cos \varphi', \quad (162)$$

$$k'^3 = k'_z = k' \sin \vartheta' \cos \varphi', \quad (163)$$

$$(164)$$

onde $k' = \|\vec{k}'\| = \omega'/c$, é a magnitude do trivetor de onda. Portanto, o quadrivetor de onda associado com a onda emitida no sistema $O'x'y'$ se escreve:

$$k'^\alpha = \left(\frac{\omega'}{c}, \frac{\omega'}{c} \sin \vartheta' \sin \varphi', \frac{\omega'}{c} \cos \varphi', \frac{\omega'}{c} \sin \vartheta' \cos \varphi' \right). \quad (165)$$

Suponha que a onda monocromática seja observada a partir de um referencial Oxy , em relação ao qual o referencial $O'x'y'$ move-se com velocidade constante $\vec{\beta}c$. A componente temporal do quadrivetor de onda no referencial do emissor e no referencial do observador estão relacionadas por:

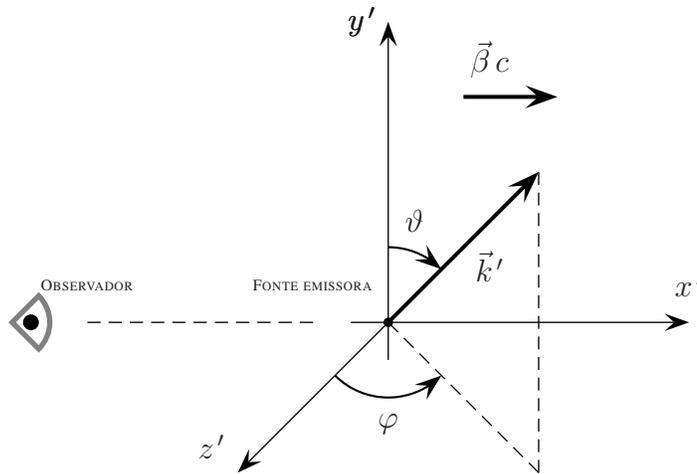


Figura 15: O efeito Doppler relativístico. O vetor de onda \vec{k}' tem direção e sentido determinados pelos ângulos $\vartheta \in [0, \pi]$, e $\varphi \in [0, 2\pi]$.

$$k^0 = \gamma k^{0'} + \gamma \beta k'^1, \tag{166}$$

ou ainda:

$$\frac{\omega}{c} = \gamma \frac{\omega'}{c} + \frac{\omega'}{c} \gamma \beta \text{sen } \vartheta' \text{sen } \varphi'. \tag{167}$$

Lembrando que a frequência angular ω e a frequência diferem por um fator multiplicativo igual a 2π , escrevemos:

$$\nu_{\text{Obs}} = \gamma \nu_{\text{Fonte}} (1 + \beta \text{sen } \vartheta' \text{sen } \varphi'). \tag{168}$$

Este resultado vale para o caso em que o observador vê a fonte emissora afastar-se. Se a fonte aproximar-se do observador deve-se fazer a troca $\beta \rightarrow -\beta$.

Considere o caso em que a fonte afasta-se do observador como na Figura 15, mas emite no sentido oposto ao de sua velocidade. Neste caso, $\vartheta' = \pi/2$, e $\varphi' = -\pi/2$. A Eq. (168) se escreve:

$$\nu_{\text{Obs}} = \gamma \nu_{\text{Fonte}} (1 - \beta) = \nu_{\text{Fonte}} \frac{\sqrt{1 - \beta}}{\sqrt{1 + \beta}}. \tag{169}$$

Este é o efeito Doppler longitudinal. Se $\vartheta' = 0$, ou $\varphi' = 0$, a Eq. (168) leva à:

$$\nu_{\text{Obs}} = \gamma \nu_{\text{Fonte}} = \frac{\nu_{\text{Fonte}}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (170)$$

Este é o efeito Doppler transverso. O efeito Doppler relativístico é frequentemente empregado em Cosmologia observacional. Pode-se obter informações sobre os desvios para o vermelho e para o azul de uma estrela ou galáxia e com isto saber se estes afastam-se ou aproximam-se do observador na Terra. Combinado com a lei de Hubble, o efeito Doppler pode nos dar a distância que uma estrela ou galáxia está da Terra.

Exercício 11 Compare o efeito Doppler relativístico com o efeito Doppler para ondas sonoras.

■

Exemplo 5 *O efeito Doppler e o paradoxo dos gêmeos* Consideremos uma vez mais o paradoxo dos gêmeos. No diagrama espaço-tempo, representa-se as linhas de universo do gêmeo que permanece na Terra (o eixo ct), do gêmeo astronauta (em azul), e do exoplaneta 47 Ursae Majoris d. O tempo coordenado transcorrido em unidades de comprimento para viagem de ida e volta do astronauta pode ser lido o eixo ct . O tempo próprio pode ser calculado com a fórmula:

$$(c\tau)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2,$$

Segue que:

$$c\tau = +\sqrt{(57.4)^2 - (45.9)^2} \text{ a.l.} = 34.4 \text{ a.l.}$$

Por simetria, vê-se que a duração da viagem para o astronauta é de 68.8 anos. Suponha que o astronauta envie sinais de luz em direção à Terra. O número de sinais recebidos deve ser igual ao número de sinais emitidos, logo:

$$\nu_{\text{Obs}} \Delta t = \nu_{\text{Fonte}} \Delta \tau.$$

Segue que na viagem de ida a fonte afasta-se do observador, logo:

$$\frac{\Delta \tau}{\Delta t} = \frac{\nu_{\text{Obs}}}{\nu_{\text{Fonte}}} = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} = \sqrt{\frac{1 - 0.8}{1 + 0.8}} = \frac{1}{3}.$$

Isto significa que no nosso diagrama espaço-tempo, o sinal é emitido a cada 11.5 a.l. Na viagem de volta:

$$\frac{\Delta \tau}{\Delta t} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} = \sqrt{\frac{1 + 0.8}{1 - 0.8}} = 3.$$

Na viagem de ida, o sinal é recebido a cada $c \Delta t = 34.4$ a.l. . Na viagem de volta, o sinal é recebido a cada 3.8 a.l. . Comparativamente, temos um deslocamento para o vermelho na viagem de ida, e um deslocamento para o azul na viagem de volta.

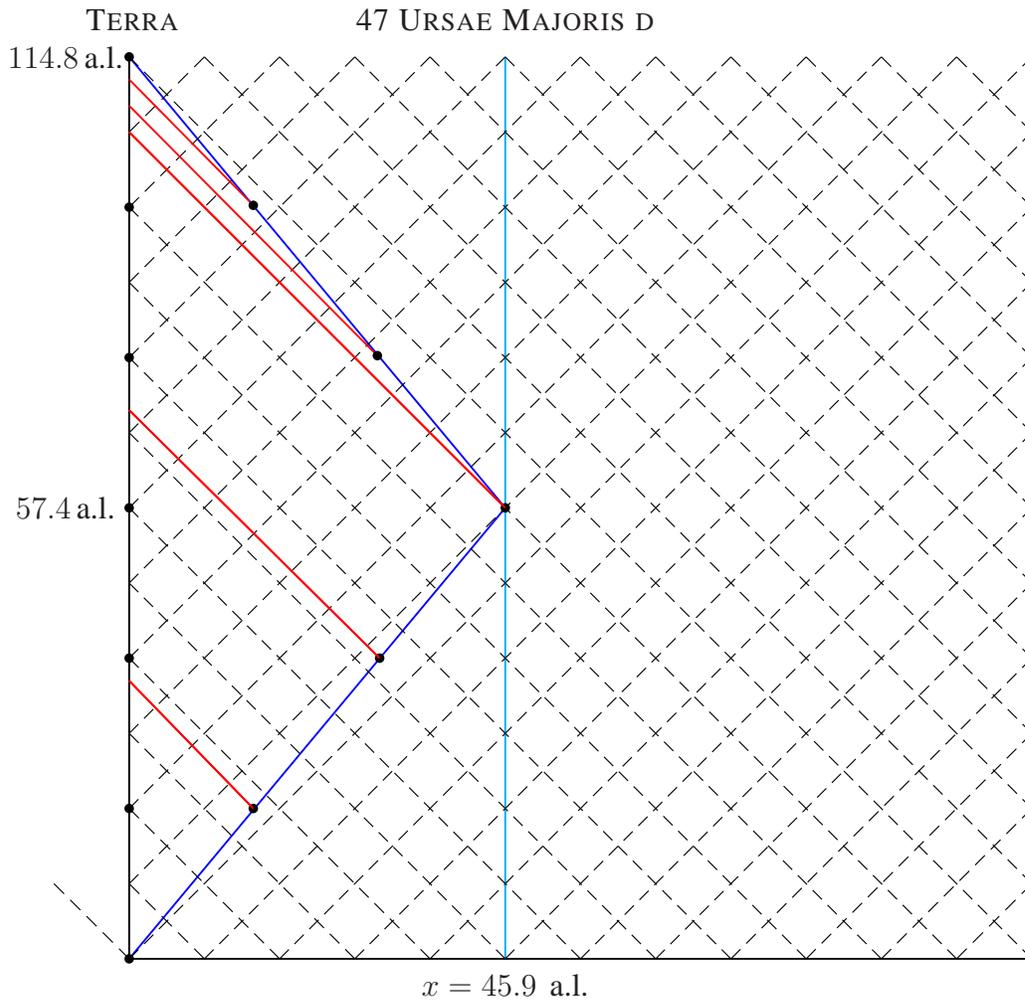


Figura 16: O efeito Doppler e o paradoxo dos gêmeos.

Referências

- [1] D. Bohm *The Special Theory of Relativity* 2006 (Routledge: London)
- [2] E. Taylor and J. A. Wheeler *Spacetime Physics* 1966 (Freeman: San Francisco)
- [3] R. Resnick *Introduction to Special Relativity*, 1968 (John Wiley: New York)
- [4] R. P.Feynman, R. B. Leighton e M. Sands: *Lições de Física* Vols. I, II e III, 2008 (Porto Alegre: Bookman)
- [5] W. Rindler *Essential Relativity: Special, General, Cosmological* 2nd ed. 2006 (OUP, Oxford)
- [6] A. Einstein *Sobre la teoria de la relatividad especial y general* 1984 (Alianza: Madrid)