

Tópicos de Física Contemporânea

O efeito Doppler relativístico

A C Tort*

23 de maio de 2014

Ondas planas harmônicas

Uma onda plana harmônica (monocromática) que se propaga no espaço se escreve:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) \sim \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t). \quad (1)$$

onde

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{\mathbf{k}}, \quad (2)$$

é o vetor **número de onda**. O módulo deste vetor é $2\pi/\lambda$ com λ simbolizando o comprimento de onda. O vetor unitário $\hat{\mathbf{k}}$ define a direção e o sentido da propagação da onda harmônica. A frequência angular ω relaciona-se com a frequência linear ν por meio da relação $\omega = 2\pi\nu$. O vetor \mathbf{r} é o vetor de posição de um ponto arbitrário da frente de onda plana. Consideremos a propagação no plano xy . Em relação à origem do sistema de coordenadas cartesiano da Figura 1, $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}$ e $\mathbf{k} = k_x\hat{\mathbf{x}} + k_y\hat{\mathbf{y}}$. Convém aos nossos propósitos que escrevamos a onda harmônica na forma:

$$\Psi(x, y, t) \sim \cos(k_x x + k_y y - 2\pi\nu t). \quad (3)$$

Como $k_x = \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{k} = k \cos \theta$ e $k_y = k \cos(\pi/2 - \theta) = k \sin \theta$, temos:

$$\Psi(x, y, t) \sim \cos 2\pi \left[\left(\frac{\cos \theta x + \sin \theta y}{\lambda} \right) - \nu t \right]. \quad (4)$$

A quantidade:

$$\Phi(x, y, t) = 2\pi \left[\left(\frac{\cos \theta x + \sin \theta y}{\lambda} \right) - \nu t \right], \quad (5)$$

é chamada **fase** da onda plana harmônica. Convém lembrar também que a propagação se dá no vácuo, logo vale a **relação de dispersão**: $\lambda \nu = c$.

A invariância de Lorentz da fase

Considere agora uma onda plana emitida na origem de um referencial S' que se move com velocidade constante $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{x}} = \beta c\hat{\mathbf{x}}$ em relação ao referencial fixo (chamado também **referencial do laboratório**) S . No referencial móvel em relação ao laboratório, a onda plana é descrita por:

$$\Psi'(x', y', t') \sim \cos \left[2\pi \left(\frac{\cos \theta' x' + \sin \theta' y'}{\lambda'} - \nu' t' \right) \right]. \quad (6)$$

Pelos postulados da Relatividade Restrita, observadores nos dois referenciais (laboratório e móvel) devem observar uma onda plana, pois em princípio uma distorção da geometria da onda permitiria que o observador no referencial do laboratório afirmar que está em movimento com velocidade $-\mathbf{v}$ em relação ao referencial em que a onda

*email: tort@ufrj.br

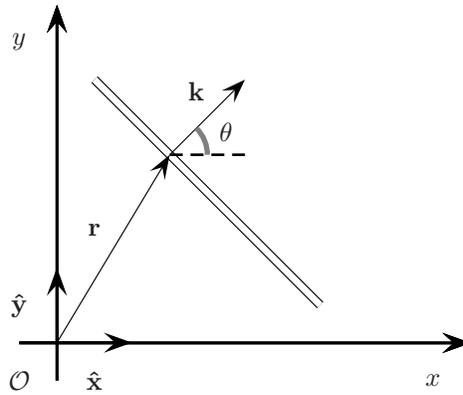


Figura 1: Onda plana no plano xy .

é plana. Isto é, sem olhar para fora do laboratório, esse observador conseguiria detectar seu estado de movimento mesmo sendo inercial¹. Em outras palavras, a **fase da onda plana deve ser um invariante de Lorentz**:

$$\frac{\cos \theta' x' + \text{sen } \theta' y'}{\lambda'} - \nu' t' = \frac{\cos \theta x + \text{sen } \theta y}{\lambda} - \nu t. \quad (7)$$

Observe que no sistema móvel vale a relação de dispersão $\lambda' \nu' = c$. As transformações de Lorentz permitem

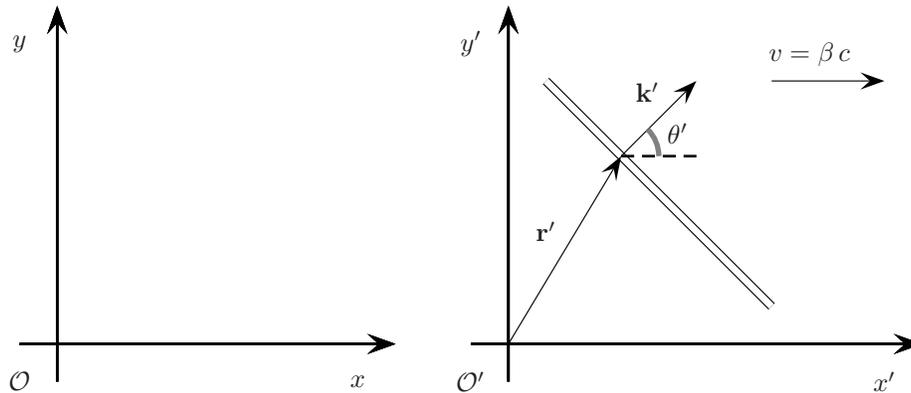


Figura 2: Onda plana emitida no referencial S'

determinar as relações entre a frequência linear medida no sistema móvel ν' e a frequência ν medida no laboratório ν e entre os ângulos de propagação da onda harmônica θ' medido no sistema móvel e θ medido no laboratório. No primeiro caso estaremos lidando com a versão relativística do **o efeito Doppler** e no segundo com o fenômeno da **aberração estelar**. Ambos os efeitos são importantíssimos para a astrofísica e para a cosmologia. Nosso conhecimento de que nosso universo está em expansão vem basicamente do efeito Doppler relativístico na versão que estudaremos aqui e na versão da Teoria Geral da Relatividade que veremos posteriormente.

¹Já usamos este argumento na dedução das transformações de Lorentz.

O efeito Doppler relativístico

As transformações de Lorentz que necessitamos se escrevem:

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(\beta) (x - vt) \\t' &= \gamma(\beta) \left(t - \frac{v}{c^2} x\right) \\y' &= y\end{aligned}$$

Substituindo no lado esquerdo da equação (11) obtemos:

$$\Phi(x', y', t') = 2\pi \left[\frac{\gamma(\beta)}{\lambda'} (x - vt) \cos \theta' + \frac{y}{\lambda'} \sin \theta' - \gamma(\beta) \nu' [t - (v/c^2) x] \right]. \quad (8)$$

Lembrando que $\gamma(\beta) = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$, com $\beta = v/c$, e rearranjando termos obtemos:

$$\Phi(x', y', t') = 2\pi \left[\frac{(\cos \theta' + \beta) x}{\lambda' \sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{y}{\lambda'} \sin \theta' - \frac{(\beta \cos \theta' + 1) \nu' t}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right]. \quad (9)$$

A fase no sistema do laboratório se escreve:

$$\Phi(x, y, t) = 2\pi \left[\left(\frac{\cos \theta x + \sin \theta y}{\lambda} \right) - \nu t \right]. \quad (10)$$

Igualando os coeficientes de x , y e t , obtemos as equações:

$$\frac{\cos \theta}{\lambda} = \frac{(\cos \theta' + \beta)}{\lambda' \sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (11)$$

$$\frac{\sin \theta}{\lambda} = \frac{\sin \theta'}{\lambda'}, \quad (12)$$

e a equação mais importante:

$$\nu = \nu' \frac{(1 + \beta \cos \theta')}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (13)$$

que descreve o efeito Doppler.

EXERCÍCIO 1: Obtenha as Eqs. (9), (11), (12) e (13).

Lembre-se ainda que $\lambda' \nu' = \lambda \nu$ e isto permite escrever o efeito Doppler em termos do comprimento de onda:

$$\lambda = \lambda' \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{(1 + \beta \cos \theta')}. \quad (14)$$

Com as equações (11) e (12) obtemos

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta' \sqrt{1 - \beta^2}}{\cos \theta' + \beta}, \quad (15)$$

que descreve a **aberração estelar** e o **efeito farol de automóvel**.

EXERCÍCIO 2: Obtenha as Eqs. (14) e (15).

Mais sobre o efeito Doppler

Concentremo-nos no efeito Doppler relativístico. As Eqs. (13) e (14) podem ser facilmente invertidas fazendo a substituição $\beta \rightarrow -\beta$ e trocando o que deve ser trocado no restante. O resultado é

$$\nu' = \nu \frac{(1 - \beta \cos \theta)}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (16)$$

O observador no referencial Oxy , onde está o receptor, registra uma frequência ν , mas a fonte emissora emite sinais com frequência ν' , logo, identificando: $\nu = \nu_{\text{rec}}$ e $\nu' = \nu_{\text{em}}$:

$$\nu_{\text{rec}} = \nu_{\text{em}} \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \theta}, \quad (17)$$

temos finalmente a fórmula do efeito Doppler em termos de grandezas que podemos medir inteiramente no laboratório. Mesmo ν_{em} pode ser identificada no laboratório, pois o espectro **como um todo** sofre um deslocamento, por exemplo, em direção ao vermelho, como veremos mais adiante, e isto permite identificá-lo sem ambiguidades. A Eq. 17 pode ser reinterpretada da seguinte forma: o ângulo θ é o ângulo entre a linha de visada e a velocidade da fonte em movimento β . Se $\theta = 0^\circ$, a fonte aproxima-se do observador, e se $\theta = 180^\circ$, a fonte afasta-se do observador, estes dois casos extremos são chamados efeito Doppler **longitudinal ou radial**. Podemos dizer também que no primeiro caso, o observador e a fonte aproximam-se um do outro, e no segundo caso ambos afastam-se. A Figura 3 representa uma interpretação da Eq. (17).

A Relatividade Restrita prevê também um tipo adicional de efeito Doppler: o efeito Doppler **transversal**, sem análogo não-relativístico. Isto acontece quando a linha de visada e a direção do movimento da fonte formam um ângulo $\theta = 90^\circ$. Neste caso, da Eq. (13) teremos:

$$\nu_{\text{rec}} = \nu_{\text{em}} \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (18)$$

O efeito Doppler transversal está relacionado com a dilatação temporal e foi observado experimentalmente pela primeira vez por Ives e Stilwell em 1938².

O efeito Doppler da Relatividade Restrita pode ser aplicado à astrofísica e, com as devidas cautelas, à cosmologia, como veremos a seguir.

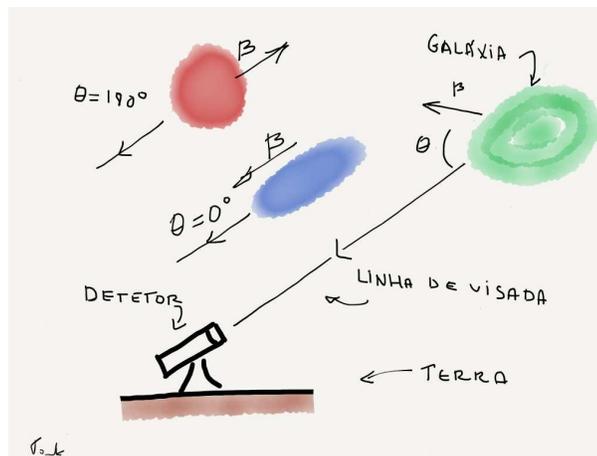


Figura 3: Uma interpretação da Eq. (13). A linha de visada dá a direção do vetor com origem na fonte e que aponta para o observador.

² H. E. Ives & G. R. Stillwell *An experimental study of the rate of a moving clock* J. Opt. Soc. Am. 28 7 215-219 (1938).

Aplicações à astrofísica

A visão do universo que temos atualmente começa com o astrônomo americano **Vesto Melvin Slipher** (1875-1969). Slipher, trabalhando no Observatório Lowell, acoplou um espectrógrafo ao telescópio de 24 polegadas do observatório e atendendo a um pedido de Percival Lowell (1855-1916), o patrocinador do observatório, passou a estudar as **nebulosas espiraladas** ou **galáxias**, como as chamamos hoje. No final de 1912, Slipher, analisando as chapas fotográficas com as quais se registravam os espectros experimentais, concluiu que espectro da luz que chegava de Andrômeda parecia ser mais azulado do que o normal. Mais ainda, a Nebulosa de Andrômeda estava aproximando-se do Sistema Solar com uma celeridade espetacular: 300 km/s^3 , mais informações sobre Andrômeda no Apêndice A. Na época, acreditava-se que as nebulosas espiraladas poderiam ser muitas coisas: agrupamentos de estrelas, nuvens de gás na Via Láctea ou mesmo sistemas planetários em formação, embora alguns acreditassem que poderiam ser também galáxias muito distantes. O resultado obtido por Slipher era atípico quando comparado com valores obtidos para objetos astronômicos na Via Láctea e mostrava que Andrômeda era um objecto extragaláctico, era o fim da idéia da Via Láctea como uma ilha de estrelas e matéria interestelar cercada de vazio por todas as partes.. Nos anos seguintes, Slipher continuou a medir as velocidades radiais das nebulosas espiraladas e descobriu que algumas afastavam-se e outras aproximavam-se do Sistema Solar. E as celeridades eram enormes, a nebulosa M104⁴, por exemplo, afasta-se de nós com uma celeridade de 1000 km/s ! Em 1914, em um encontro da *American Astronomical Society*, Slipher apresentou resultados para 15 galáxias. Foi ovacionado pelos presentes, um acontecimento muito raro em congressos e reuniões científicas.

Em 1929, o astrônomo americano **Edwin Hubble** publicou um importante trabalho em que valendo-se dos dados de Slipher ao qual acrescentou suas próprias observações realizadas conjuntamente seu habilidoso assistente Milton Humason (1891-1972). No trabalho, Hubble conclui que a velocidade radial de afastamento das galáxias observadas são diretamente proporcionais à suas respectivas distâncias ao Sistema Solar⁵. Hubble escreve:

$$V = H_0 r, \quad (19)$$

onde V é a velocidade de afastamento da galáxia em estudo, r é a distância da galáxia ao observador e H_0 é uma constante, a **constante de Hubble** que presentemente vale⁶:

$$H_0 = 100 h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}, \quad (20)$$

onde h é um fator adimensional que expressa nossa incerteza sobre o valor da constante de Hubble. Por exemplo, com o observatório de raios X *Chandra* o valor obtido em agosto de 2006 é

$$H_0 = 77 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}, \quad (21)$$

com um erro de 15 %. Já uma recalibração da relação que dá a distância às Cefeidas, um grupo de estrelas jovens que serve de 'vela' padrão, realizada em 2012 nos dá:

$$H_0 = 74 \pm 2,1 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}. \quad (22)$$

Para entender os resultados experimentais e conclusões de Slipher e Hubble consideremos o efeito Doppler longitudinal em dois casos extremos. Se fizermos $\theta = 0^\circ$ na Eq. (13) obteremos:

$$\nu_{\text{rec}} = \nu_{\text{em}} \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta} = \nu_{\text{em}} \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}. \quad (\text{blueshift!}) \quad (23)$$

É fácil convencer-se de que neste caso $\nu_{\text{rec}} > \nu_{\text{em}}$. Se, por exemplo, uma estrela ou galáxia emitir radiação na parte visível do espectro eletromagnético haverá um deslocamento deste em direção às frequências mais altas (e

³Lowell Observatory Bull. (1913) 58 Vol. II No. 8 56-57: *The Radial Velocity of the Andromeda Nebula*, V. M. Slipher.

⁴M104 significa: objeto astronômico 104 do catálogo Messier, criado por Charles Messier (1730-1817) que compilou uma lista de 100 objetos difíceis de diferenciar dos cometas.

⁵E. Hubble *A relation between distance and radial velocity among extra-extragalactic nebulae* (1929), Proc. National Acad. Sci. 15, Issue 3, p. 168-173.

⁶Chamar a constante de Hubble de *constante* é um abuso de linguagem, pois seu valor evolui no tempo cosmológico. Veja mais no Apêndice B.

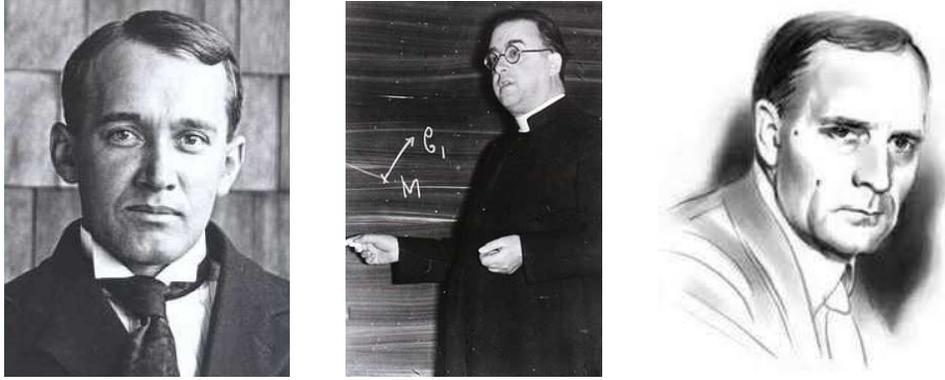


Figura 4: Da esquerda para a direita, Vesto Melvin Slipher (1875-1969), Georges Lemaître (1894-1966) e Edwin Hubble (1889-1953). A idéia da expansão do universo é de Lemaître. Hubble nunca afirmou ou endossou a idéia de que o universo estava em expansão. (Ilustrações Wikipédia)

comprimentos de onda menores), um **deslocamento para o azul** (*blueshift*). Se agora fizermos $\theta = 180^\circ$ na Eq. (13) teremos:

$$\nu_{\text{rec}} = \nu_{\text{em}} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta} = \nu_{\text{em}} \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}. \quad (\text{redshift!}) \quad (24)$$

Neste caso, $\nu_{\text{rec}} < \nu_{\text{em}}$. Se a estrela ou galáxia emitir no visível, o observador no laboratório registrará um deslocamento do espectro em direção às frequências mais baixas (e comprimentos de onda maiores), um **deslocamento para o vermelho** (*redshift*). É deste modo que podemos saber se os objetos astronômicos estão aproximando-se ou afastando-se de um observador aqui na Terra.

O parâmetro z

As fórmulas para as frequências podem ser facilmente rescritas em termos do comprimento de onda. Os resultados são:

$$\lambda_{\text{rec}} = \lambda_{\text{em}} \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \quad (\text{deslocamento para o azul, aproximação relativa}), \quad (25)$$

e

$$\lambda_{\text{rec}} = \lambda_{\text{em}} \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \quad (\text{deslocamento para o vermelho, afastamento relativo}). \quad (26)$$

Os astrofísicos definem o parâmetro z pela relação:

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{\text{em}}} = \frac{\lambda_{\text{rec}} - \lambda_{\text{em}}}{\lambda_{\text{em}}}. \quad (27)$$

O comprimento de onda λ_{em} é o comprimento de onda próprio, isto é, o comprimento de onda medido com a fonte em repouso. Este é o comprimento de onda da radiação emitida pela fonte distante. Se considerarmos o deslocamento para o vermelho, Eq. (26), é simples obter a seguinte relação:

$$\frac{(z+1)^2 - 1}{(z+1)^2 + 1} = \beta, \quad (28)$$

que permite calcular a celeridade de **afastamento** de uma estrela ou galáxia. **Esta mesma fórmula pode ser utilizada também para o deslocamento para o azul.** Neste caso z será negativo e obteremos um β também negativo que indicará aproximação relativa entre emissor e receptor.

EXERCÍCIO 3: Obtenha a relação entre o parâmetro z e β dada pela Eq. (28). Mostre também que

$$z + 1 = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}, \tag{29}$$

e que para $z \ll 1$:

$$V \approx zc. \tag{30}$$

Para a galáxia de Andrômeda, $z = -0,001$. Calcule a velocidade relativa entre Andrômeda e a Via Láctea. Estime o tempo de colisão entre as duas galáxias. A distância atual entre elas é de aproximadamente 2,5 milhões de anos-luz. Dê sua resposta em anos e confira os valores no Apêndice A.

EXERCÍCIO 4: Considere β como uma função de z e faça um gráfico $\beta(z) \times z$ para $z \in [0, 10]$.

EXERCÍCIO 5: As linhas espectrais do hidrogênio presente nas galáxias estão muitas vezes deslocadas para o vermelho. Uma linha de emissão em especial, a linha de 21 cm aparece deslocada de 0,1cm. Mostra que nesse caso, as galáxias que emitem nesse comprimento de onda estão afastando-se de nós com velocidade um pouco maior do que 1400 km/s.

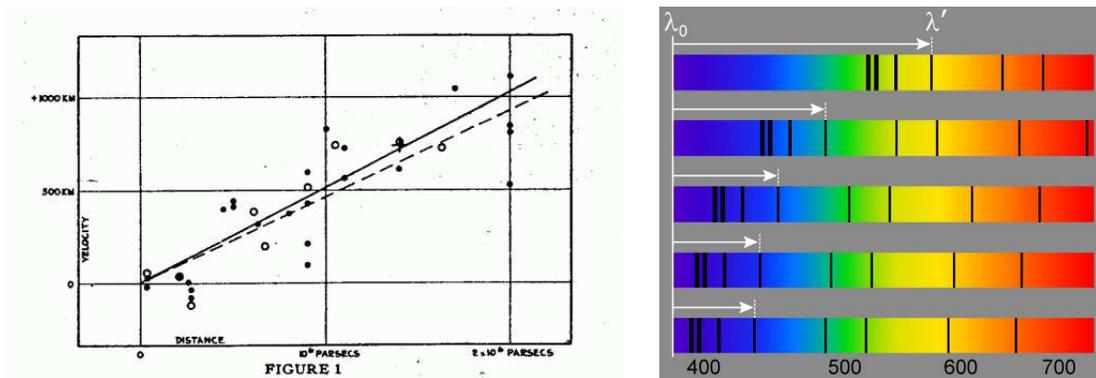


Figura 5: À esquerda, o gráfico original de Hubble. À direita, deslocamentos para o vermelho em função do comprimento de onda (em nm) observado. De cima para baixo (a) galáxia muito distante, (b) galáxia distante, (c) galáxia vizinha, (d) estrela, e (e) laboratório . (Ilustração Wikipédia e JPL)

Cosmologia

O efeito Doppler é também utilizado na Cosmologia, mas para grandes distâncias intergalácticas, da ordem de bilhões de anos-luz, o efeito Doppler da relatividade restrita deve ser substituído pelo efeito Doppler previsto pelos modelos cosmológicos que fazem uso da **Relatividade Geral de Einstein**, os assim chamados **modelos de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker**. O espectro de objetos extremadamente distantes de nós, por exemplo, os **quasares**, terão uma componente cinemática do efeito Doppler da Relatividade Restrita (o movimento local ou peculiar) e uma **componente cosmológica** do efeito Doppler previsto pelos modelos cosmológicos. A razão para considerar como mais importante o efeito Doppler cosmológico é simples: nessa escala de distâncias, a curvatura do espaço-tempo e a sua expansão devem ser levadas em conta e é este o movimento que predomina. Objetos próximos, digamos distâncias da ordem de até milhões de anos-luz, como a distância entre Andrômeda e a Via Láctea, podem ter um deslocamento para o azul ou para o vermelho, isto dependerá do movimento relativo

emissor-receptor. Este é o efeito Doppler cinemático e que se deve aos movimentos ditos locais ou peculiares. Já os **objetos extremamente distantes só apresentam deslocamentos para o vermelho!** O movimento global, também dito **fluxo de Hubble**, predomina sobre o local. Entretanto, deve-se manter em mente que **a lei de Hubble é válida em todas as escalas de distância** e que são os efeitos Doppler que devem ser diferenciados. É possível argumentar que nos modelos de F-L-R-W, que supõem homogeneidade em grande escala do universo, a relação entre a velocidade e a distância deve necessariamente ser linear. É o deslocamento para o vermelho no espectro de emissão de objetos astronômicos muito distantes medidos com instrumentos tecnologicamente muito sofisticados, como por exemplo, o Telescópio Espacial Hubble, que permitem aos astrofísicos e cosmólogos modernos afirmar que nosso universo está em expansão e mais ainda: que a celeridade da expansão está aumentando!

O conceito de expansão do universo foi introduzido pelo cosmólogo e abade belga **Georges Lemaître** que em 1927 argumentou pela primeira vez que o universo poderia estar em expansão⁷. Em 1930, o mesmo Lemaître argumentou que o universo teria começado a partir do decaimento de um “átomo primordial”. Desde então, a concepção de Lemaître e de outros cosmólogos, foi expandida e refinada e o que temos hoje é um modelo ainda em aprimoramento, que faz uso da Teoria Geral da Relatividade (a versão relativística da gravitação newtoniana) e do Modelo Padrão da física das partículas elementares, mas que é capaz de explicar as características mais salientes do universo observável, a saber:

- a abundância de elementos leves;
- a radiação cósmica de fundo correspondente a 2.7 K;
- a estrutura de grande escala do universo observável;
- o diagrama de Hubble para as supernovas do tipo Ia⁸.

O modelo é chamado de **Grande Explosão** ou **Big-Bang**. A evolução dinâmica do universo, as questões envolvendo a matéria e da energia escuras, a **formação** de estruturas de grande escala como por exemplo, **A Grande Muralha**, e outros aspectos ainda são temas de pesquisa de vanguarda, conseqüentemente, podemos esperar modificações no modelo. O tempo dirá.

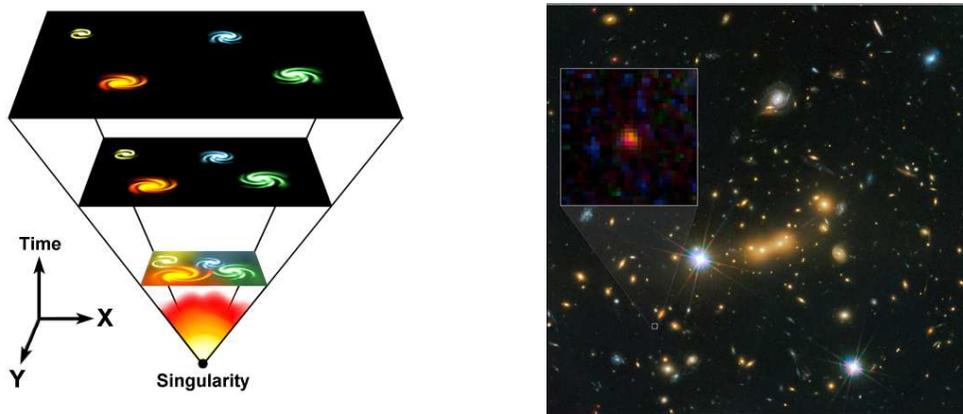


Figura 6: Uma visão artística muito simplificada da expansão do Universo. À direita, no quadrado, o que pode ser a galáxia mais distante já observada, a MACS0647-JD, 13, 3 bilhões de anos-luz distante de nós. (Ilustração Wikipédia e NASA)

⁷G. Lemaître *Un univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques* (1927), Ann. Soc. Sci. de Bruxelles, 47, 49.

⁸Supernovas do tipo Ia são supernovas que resultam da violentíssima explosão de uma anã branca, o estágio final de uma classe de estrelas.

Apêndice A: Andrômeda

Andrômeda ou M31, ou ainda NGC 224, ou nos textos antigos, A Grande Nebulosa de Andrômeda, está a uma distância de $2,54 \pm 0,06$ milhões de anos-luz da Terra. É uma galáxia espiralada contendo aproximadamente um trilhão (10^{12}) de estrelas e com uma massa equivalente a aproximadamente $7,1 \times 10^{11} M_{\odot}$ (massas solares). O deslocamento para o azul de Andrômeda corresponde a $z = -0.001$, isto é, A Via Láctea e Andrômeda aproximam-se uma da outra devem colidir formando uma supergaláxia elíptica. A velocidade espectroscópica radial é de -301 ± 1 km/s (o sinal negativo indica aproximação). Acredita-se que Andrômeda tenha sido formada há 9 bilhões de anos atrás como consequência da colisão de duas galáxias menores. A colisão com a nossa galáxia acontecerá em 3,75 bilhões de anos.



Figura 7: A galáxia de Andrômeda. À direita, Uma visão artística da colisão entre Andrômeda e a Via Láctea, que deve ocorrer em aproximadamente 4 bilhões de anos, vista da Terra (por quem?). (Imagens Wikipédia)

Apêndice B: a constante de Hubble⁹

Um modo simples de entender a razão pela qual a constante de Hubble evolui no tempo é o que se segue. Imaginemos um mundo unidimensional limitado, mas sem fronteiras: uma circunferência de raio variável no tempo $R(t)$ de tal modo que a circunferência esteja em expansão. Considere dois instantes de tempo distintos t e $t + \Delta t$. Sejam $R(t) = OA$, o raio no instante t e $S(t)$, o comprimento do arco AB no instante t , e $R(t + \Delta t) = OA'$ e $S(t + \Delta t) = A'B'$ *idem* no instante $t + \Delta t$, veja a Figura 8. Da geometria da Figura 8 segue que:

$$\frac{S(t) + \Delta S(t)}{S(t)} = \frac{R(t) + \Delta R(t)}{R(t)}, \quad (31)$$

ou ainda

$$R(t) \Delta S(t) = S(t) \Delta R(t). \quad (32)$$

Dividindo por Δt ,

$$R(t) \frac{\Delta S(t)}{\Delta t} = S(t) \frac{\Delta R(t)}{\Delta t}. \quad (33)$$

Podemos interpretar $\Delta S/\Delta t$ como a celeridade de afastamento dos pontos A e B (as ‘galáxias’), segue que:

$$V(t) = \frac{\Delta S(t)}{\Delta t} = \left(\frac{1}{R(t)} \frac{\Delta R(t)}{\Delta t} \right) S(t), \quad (34)$$

onde o termo entre parêntesis pode ser interpretado como a ‘constante’ de Hubble de universo calculada em um instante de tempo t . Se $t = t_0$ for o tempo presente, então a constante de Hubble *hoje em dia* vale:

$$H(t_0) \equiv H_0 = \left(\frac{1}{R(t)} \frac{\Delta R(t)}{\Delta t} \right)_{t=t_0}. \quad (35)$$

⁹Inspirado na aula ministrada pelo Prof. Walter Lewin, do MIT. Veja as Referências.

Mas de que tempo falamos? O tempo é o **tempo cosmológico** que pode ser simples e perfeitamente definido em um modelo de universo homogêneo em grande escala. Se o universo está em expansão, a constante de Hubble diminui com o tempo. Para saber como isto acontece necessitaríamos de um modelo para descrever a evolução temporal do raio de curvatura $R(t)$.

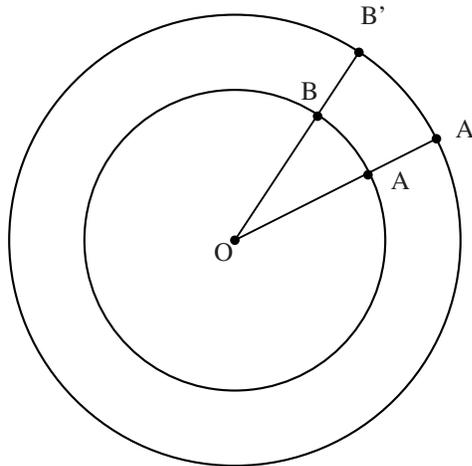


Figura 8: Um 'universo' em expansão.

Apêndice C: o espalhamento da luz

Por que razão vemos linhas negras nos espectros das estrelas e galáxias? A Figura 9 nos explica sucintamente este fenômeno.

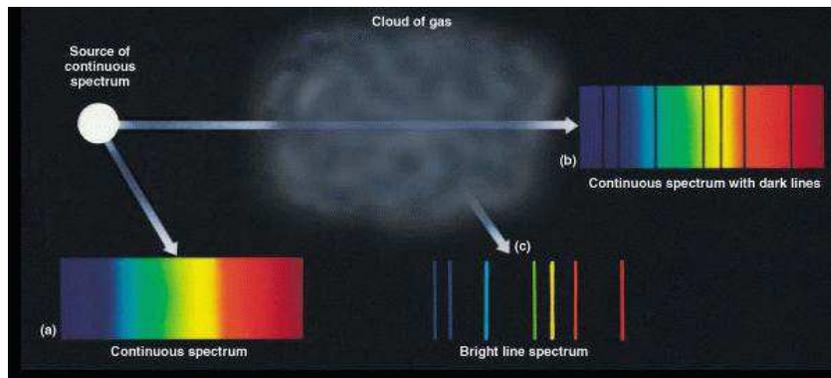


Figura 9: (a) Espalhamento da luz emitida por uma fonte que emite um espectro contínuo. (b) Se o observador estiver olhando diretamente para a nuvem de gás na frente da fonte verá algumas linhas de absorção, isto é linhas que correspondem à remoção de alguns comprimentos de onda pelas moléculas e átomos que constituem a nuvem. (c) Se o observador estiver olhando quase perpendicularmente à direção de emissão da luz, verá as linhas que faltam.

Apêndice D: Lemaître e a expansão do universo

O trabalho original de Lemaître foi publicado em francês em uma obscura revista belga. O primeiro a publicar soluções dinâmicas das equações de Einstein for Alexander Friedmann em 1922. Mas foi Lemaître que em 1927 redescobriu as soluções de Friedmann e construiu o primeiro modelo cosmológico e partir dele obtém a relação linear $V = Hr$. Com os dados experimentais disponíveis e a partir do seu modelo, Lemaître calculou dois valores para H , 575 e 670 km s^{-1} . Essa discrepância é consequência de dois possíveis reagrupamentos dos dados experimentais sobre o *redshift* (obtidos principalmente por Vesto Slipher!). Em 1931, graças aos esforços de Arthur Eddington, eminente astrofísico inglês, o trabalho foi traduzido para o inglês e republicado em uma importante revista especializada em astrofísica e cosmologia, a *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. Embora os livros-texto em sua maioria afirmem que a descoberta da expansão do universo se deve a Hubble, a verdade é que este importante resultado se deve ao abade Lemaître. Hubble não acreditava que o universo estivesse em expansão.

Referências

- [1] D. Bohm *The Special Theory of Relativity* 2006 (Routledge: London)
- [2] R. Resnick *Introduction to Special Relativity*, 1968 (John Wiley: New York)
- [3] N. F. Comins e W. J. Kaufmann III *Descobrindo o Universo* 8a. edição 2008 (Bookman: Porto Alegre)
- [4] E. Harrison *Cosmology: The Science of the Universe* 2nd ed 2000 (Cambridge University Press: Cambridge)
- [5] M. L. Bedran *A comparison between the Doppler and cosmological redshifts* Am. J. Phys. **70** (4) 406-408 (2002)
- [6] W. Lewin MIT 8.02 *Lecture 35: The Doppler Effect*. Disponível em *iTunes Store* (gratuito, em inglês)