A Grande Pirâmide de Giza

A C Tort
Instituto de Física
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Caixa Postal 68 528 CEP 21941-972 Rio de Janeiro, Brazil

July 15, 2014

Abstract

According to the Greek Historian Herodotus, it took a task force of 100 000 men and 20 years to build up the Great Pyramide of Gizeh or Kuhfu's Pyramid. In the present paper, making use of basic concepts of Newtonian mechanics we discuss an analytical solution that allow us to check Herodotus' statement. We also discuss a simple model for the internal stresses of the Great Pyramid that help us to shed some light on the reasons why the pyramidal shape was chosen by several ancient civilizations for this type of monument. Numerical results are compared with results obtained by other means.

Resumo

De acordo com o historiador grego Heródoto, foi necessária uma força de trabalho 100 000 homens e 20 anos para erguer a Grande Pirâmide de Giza, tembém conhecida como a Pirâmide de Khufu (ou Quéops). Neste trabalho, fazendo uso de conceitos básicos de mecânica newtoniana, apresentamos uma solução analítica que permite verificar a afirmação de Heródoto. Um modelo simples das tensões internas da Grande Pirâmide que permite entender a razão pela qual a forma piramidal foi escolhida por diversas civilizações na construção desses monumentos também é discutido. Resultados numéricos são comparados também com resultados obtidos por outros meios.

Key-words: Newtonian mechanics; Work and Energy;

1 Introdução

A *Grande Pirâmide de Giza*, também conhecida como a *Pirâmide de Khufu* ou a *Pirâmide de Quéops*[1], foi construída entre os anos 2560 a.E.C. e 2040 a.E.C. para servir como tumba para o Faraó Khufu (ou Quéops, na forma grega) da IV dinastia [1]. Originalmente, a Grande Pirâmide tinha uma altura de $146,5$ metros e uma base quadrada de $230,4$ metros de lado [1]. Na verdade, ignorando as duas câmeras mortuárias, a galeria, e as passagens ascendentes e descendentes[2] que ocupam uma fração mínima do volume total, a Grande Pirâmide pode ser considerada como um enorme bloco maciço de rocha com uma densidade média aproximadamente igual a $2\,500\,\mathrm{kg/m^3}$. O historiador grego Heródoto (*c.* 484 a.E.C.– *c.* 425 a.E.C.) afirmou que foram necessários 10 anos para preparar o terreno e as câmeras subterrâneas e outros 20 anos e 100 000 homens para construir a pirâmide propriamente dita. Outro problema interessante do ponto de vista mecânico é a escolha da geometria da construção, também adotada com variantes por outras civilizações.

Nosso objetivo no presente trabalho será triplo: (a) calcular analiticamente o trabalho empregado para erigir a Grande Pirâmide; (b) verificar a afirmação de Heródoto; e finalmente, (c) construir um modelo simples para a distribuição das tensões internas da pirâmide que permite sustentar o prprio peso. A primeira parte do problema é proposta em [2], mas a solução analítica é omitida, apenas os resultados numéricos são apresentados. A segunda parte, tanto quanto é conhecimento do autor, enquanto problema apropriado à discussão no ensino universitário de física básica, é inédita.

2 Trabalho e energia potencial

O trabalho mecânico realizado pelos agentes externos fica armazenado sob forma de energia potencial gravitacional da pirâmide em relação à Terra. A mecânica newtoniana permite-nos substituir a pirâmide por um ponto material, o *centro de massa*. A massa associada a esse ponto é a massa total M e sua localização pode ser calculada com um mínimo de esforço se levarmos em conta a simetria da pirâmide. Tomando como origem de um sistema de coordenadas cartesiano, o centro geométrico da base quadrada da pirâmide, o c. de m. está localizado no ponto de coordenadas $P(0,0,z_{\text{c. de m.}})$, onde $z_{\text{c. de m.}}$ é a altura do c. de m. da pirâmide (que será calculada mais adiante).

Voltando ao cálculo do trabalho realizado, tomamos como referência o nível do solo e escrevemos

$$W_{\text{agentes externos}} = \Delta U_{\text{pirâmide}} = M g\, z_{\text{c. de m.}}, \tag{1}$$

onde M é a massa da pirâmide, $g = 9,8\,\mathrm{m/s^2}$ é a aceleração gravitacional próximo à superfície da Terra. Para prosseguir devemos calcular $z_{\text{c. de m.}}$. Por definição, veja [2] ou qualquer outro livro de mecânica básica:

[1] As três grandes pirâmides do platô de Giza (ou Gizé) são também conhecidas como as pirâmides de Quéops (Khufu). Quéfrem (Khafre) e Miquerinos (Menkaure), nomes helenizados.

[2] Uma característica única da Grande Pirâmide.

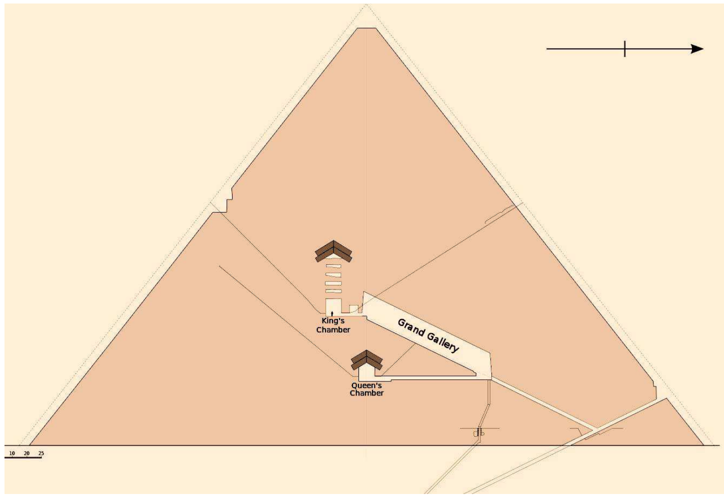

Figure 1: Esquema interno da Grande Pirâmide. (Ilustração Wikipedia.)

$$z_{\text{c. de m.}} := \frac{1}{M} \int z\, dm. \tag{2}$$

Em outros dizeres: se fatiarmos a pirâmide em elementos de massa dm paralelos à sua base, então $z_{\text{c. de m.}}$ é a média ponderada das alturas z dos elementos de massa dm. Se $A(z)$ é a seção reta da pirâmide na altura z, podemos escrever $dm = \rho\, A(z)dz$, onde ρ é a densidade. Se a densidade for uniforme, $M = \rho\, V$, onde $V = (1/3)A_0H$, onde A_0 e H são a área da base e a altura da pirâmide, respectivamente. Portanto,

$$z_{\text{c. de m.}} = \frac{3}{A_0H} \int_0^H zA(z)\, dz. \tag{3}$$

Fazendo uso do Princípio de Cavalieri [3] escrevemos:

$$\frac{A(z)}{A_0} = \left(\frac{H-z}{H}\right)^2. \tag{4}$$

Subsituindo $A(z)$ na integral na eq. (3) temos

$$z_{\text{c. de m.}} = \frac{3}{H} \int_0^H z \left(\frac{H-z}{H}\right)^2 dz. \tag{5}$$

Efetuando a integral obtemos

$$z_{\text{c. de m.}} = \frac{1}{4}\, H. \tag{6}$$

Portanto, o centro de massa da pirâmide está localizado no ponto $z_{\text{c. de . m}}(0, 0, H/4)$. O trabalho dos agentes externos se escreve

$$W_{\text{agentes externos}} = \frac{1}{4}\, M g\, H = \frac{1}{12}\, \rho\, g\, A_0^2\, H^2. \tag{7}$$

Esta é a solução analítica que buscávamos. Podemos agora substituir os dados numéricos que temos nesta expressão

$$W_{\text{agentes externos}} = \frac{1}{12} \times 2\,500 \times 9,8 \times (230,4)^2 \times (138,8)^2 \approx 2.1 \times 10^{12}\,\text{J}. \tag{8}$$

3 A estimativa de Heródoto

Vejamos agora se Heródoto estava certo ao afirmar que foram necessários 100 000 homens e 20 anos (2×10^6 homens-ano) para construir a Grande Pirâmide. Seguindo [2], suponhamos que cada trabalhador consuma 1 500 kcal por dia e que apenas 10 % desse total sejam utilizados como trabalho mecânico na construção. Nosso resultado em kcal ($1\,\text{J} = 0,23901\,\text{cal}$) se escreve:

$$W_{\text{agentes externos}} \approx 5,2 \times 10^8 \text{ kcal}. \tag{9}$$

Um homem-dia é capaz de realizar 150 kcal ou $5,48 \times 10^4$ kcal/ano de trabalho útil (do ponto de vista do Faraó e de seu arquiteto-mor, Hemuinu[3]), logo são necessários

$$\frac{5,02 \times 10^8}{5,48 \times 10^4} = 9,17 \times 10^4 \text{ homens-ano}, \tag{10}$$

que é um resultado bem menor do que a estimativa de Heródoto, pois corresponde *grosso modo* a 9 000 homens trabalhando durante 10 anos. Este resultado pode ser comparado com a estimativa detalhada de Illig e Löhner citada em [4]. Illig e Löhner concluem que foram necessários 6 700 trabalhadores durante um período de 10 anos para erigir a Grande Pirâmide. Este resultado pode ser comparado com a estimativa de outros egiptólogos, como por exemplo, o arqueólogo americano Mark Lehner que sugere 20 000 homens em 20 anos, isto é: 4×10^5 homens-ano [5].

Por outro lado, se a estimativa de Heródoto fosse correta[4] isto significaria que trabalhar na construção de uma pirâmide talvez não fosse tão ruim assim. De fato, de acordo com Donald B. Redford da Penn State University, citado em [6], a imagem que temos de escravos sendo obrigados a construir pirâmides contra a vontade é incorreta. De acordo com Redford, no Antigo Egito, o conceito de trabalho escravo não é um problema fácil de ser entendido em razão dos complicados aspectos das leis concernentes à servidão e à escravidão. E mais, ainda de acordo com Redford,

[3]Provavelmente, irmão de Khufu.

[4]Muito improvável. Heródoto recolheu esses dados em uma viagem ao Egito, por volta de 450 a.E.C.. Suas impressões a respeito de Khufu e da organização social e política do Antigo Egito são muito negativas.

os camponeses que trabalhavam nas pirâmides tinham direito a isenções de taxas, viviam em vilas próximas ao sítio da construção e tinham direito a moradia, alimentação e vestuário. Convém notar que muitos desses trabalhadores eram artesões e artistas altamente qualificados. Escavações mais recentes parecem confirmar as hipóteses de Redford. Nada mal se fôssemos camponeses ou artesãos designados para trabalhar na construção da Grande Pirâmide.

4 Um modelo para a distribuição das tensões internas

A Grande Pirâmide nos dá a oportunidade de analisarmos a variação da tensão com a altura. Na base, esta tensão interna deve suportar o peso total da pirâmide, no vértice, a tensão deve ser nula.

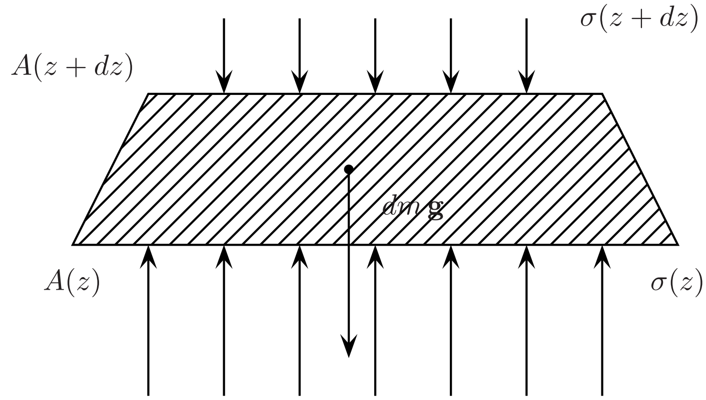

Figure 2: Tronco de pirâmide infnitesimal em equilíbrio mecânico.

Suponha que a pirâmide seja dividida em troncos de pirâmide infinitesimais. Considere um elemento representativo da partição de massa $dm = \rho\, A(z)dz$ a uma altura z. Seja $\sigma(z)$ o campo de tensões no interior da pirâmide. Em equilíbrio mecânico,

$$-\sigma(z + dz)\, A(z + dz) + \sigma(z)\, A(z) - \rho\, g\, A(z)\, dz = 0. \tag{11}$$

Escrevendo $\sigma(z + dz) \approx \sigma(z) + (d\sigma/dz)\, dz$ e $A(z + dz) \approx A(z) + (dA/dz)\, dz$, substituindo em (11) e simplificando obtemos

$$\frac{d\,[\sigma(z)\, A(z)]}{dz} = -\rho\, gA(z), \tag{12}$$

A solução formal desta equação diferencial para ρ e g uniformes no espaço é

$$\sigma(z)\, A(z) = -\rho\, g \int A(z)\, dz + C, \tag{13}$$

onde C é uma constante de integração. Fazendo uso mais uma vez do Princípio de Cavalieri, eq. (4), podemos escrever

$$\sigma(z)\, \left(1 - \frac{z}{H}\right)^2 = -\rho\, g \int \left(1 - \frac{z}{H}\right)^2 dz + C. \tag{14}$$

Definindo

$$\omega(z) = 1 - \frac{z}{H}, \quad \to dz = -H d\omega, \tag{15}$$

e integrando otemos

$$\sigma(z)\, \omega^2(z) = \rho\, gH\, \frac{\omega^3(z)}{3} + C. \tag{16}$$

A força vertical que o solo exerce sobre a pirâmide deve equilibrar o peso desta, isto significa que para $z = 0$,

$$\sigma(0) = \frac{Mg}{A_0} = \frac{1}{3}\, \rho\, gH. \tag{17}$$

Como para $z = 0$, $\omega(0) = 1$, da eq. (16) segue então que $C = 0$, e o campo das tensões internas varia com z de acordo com

$$\sigma(z) = \frac{1}{3}\, \rho\, gH\, \left(1 - \frac{z}{H}\right), \qquad 0 \leq z \leq H. \tag{18}$$

Observe que para $z = H$, a tensão interna $\sigma(H)$ é nula. Como o produto $(1/3)\, \rho\, g\, H$ vale $1,2\, \times\, 10^{11}$ N/m^2, e como a área da base vale $(230,4)^2$ m^2, força na base $\sigma(0)\, \times\, A_0$ vale $6,4\, \times\, 10^{10}$ N, aproximadamente $6\,400\,000$ toneladas-força! Esta força equilibra o peso total da Grande Pirâmide. A pirâmide de base quadrada e estruturas similares, suportam a maior parte do peso da estrutura nas suas partes inferiores. O peso da pirâmide em função da da sua altura é dado por

$$P(z) = \int dm\, g = \rho g \int A(z)\, dz = \rho g A_0 \int_0^z \left(1 - \frac{z'}{H}\right)^2 dz', \tag{19}$$

Fazendo como antes $\omega = 1 - z'/H$, temos

$$P(z) = \rho g H A_0 \int_{1-\frac{z}{H}}^{z} \omega^2\, d\omega, \tag{20}$$

Efetuando a integral obtemos

$$P(z) = \frac{1}{3}\,\rho g H A_0\,\left[1-\left(1-\frac{z}{H}\right)^3\right] = Mg\,\left[1-\left(1-\frac{z}{H}\right)^3\right]. \tag{21}$$

O peso da parte superior da pirâmide é

$$P^*(z) = Mg - P(z) = Mg\,\left(1-\frac{z}{H}\right)^3, \tag{22}$$

veja a Figura 3. Este peso deve ser equilibrado pela força exercida pela parte inferior da pirâmide, $F(z) = \sigma(z)\,A(z)$. Para um dado valor de z, podemos definir a parte inferior da pirâmide, pela razão $z^* = z/H \leq 1$, e a parte superior por $z/H > z^*$. Usando a eq. (18) e o Princípio de Cavalieri, eq. (4), verificamos facilmente que $F(z) = P^*(z)$, Suponha que $z = (1/4)\,H$, isto é, suponha que a parte inferior da pirâmide tenha a altura do centro de massa. Então

$$F(H/4) = 0,42\,Mg, \tag{23}$$

isto é: a parte inferior sustenta quase a metade do peso total da pirâmide. O leitor poderá verificar

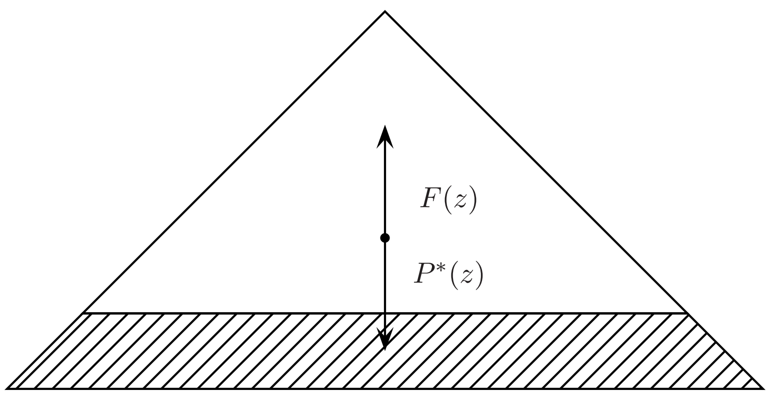

Figure 3: A força $F(z)$ exercida pela parte inferior da pirâmide equilibra o peso da parte superior, $P^*(z) = Mg - P(z)$.

ele próprio que metade do peso da parte superior da pirâmide é sustentada pelo tronco de priâmide imediatamente abaixo de altura igual a $0,21\,H$. A escolha da forma piramidal (ou similar) significa que a maior parcela do peso a ser sustentado recai sobre as camadas inferiores da estrutura, veja o gráfico mostrado na Figura 4, e é esta a razão que permitiu a muitas civilizações antigas erigir monumentos colossais e estáveis.

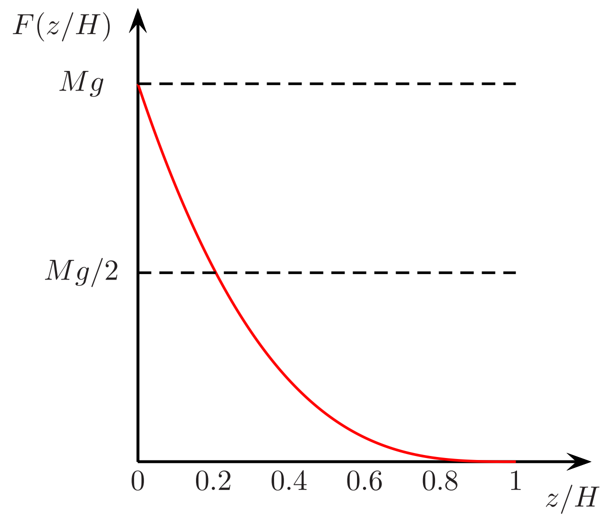

Figure 4: Gráfico da força $F(z/H) = Mg\,(1 - z/H)^3$, exercida pela parte inferior da pirâmide, definida $z^* = z/H \leq 1$, sobre a parte superior, definida por $z/H > z^*$.

5 Observações finais

A Grande Pirâmide de Giza é a única das Sete Maravilhas do Mundo Antigo que sobreviveu ao tempo e às vicissitudes da história. Hoje em dia, as pirâmides egípicias exercem um enorme fascínio sobre grandes parcelas do público leigo que vêm nelas sinais e mistérios muitas vezes interpretados de modo delirante, como por exemplo, a crença de que as pirâmides foram contruídas com o auxílio de supostas civilizações extraterrestres. As pirâmides egípcias foram construídas como monumentos fúnebres para os faraós egípcios e os estudiosos não têm dúvidas que sua função era a de servir como um elo entre o mundo sobrenatural e o natural. Arqueólogos e historiadores têm evidências convincentes de que os homens encarregados de construir a Grande Pirâmide tinham conhecimentos práticos de astronomia e matemática, e também noções simples sobre as leis da mecânica. Mesmo o modo pelo qual as pirâmides foram construídas, embora não haja certeza absoluta, pode ser entendido com modelos verossímeis envolvendo cordas, roldanas e rampas, [4, 6, 7]. Veja também em [8], uma desrição bastante interessante sobre como o uso da proporção correta de água e areia – de uma parte de água para cinquenta de areia até a uma parte de água para vinte de areia – poderia ter reduzido à metade a força necessária para arrastar os blocos de rocha desde as pedreiras até o sítio da construção. Em suma, não há necessidade de explicações esdrúxulas.

O problema da construção da Grande Pirâmide de Giza que discutimos aqui é um ótimo de exemplo de problema interdisciplinar e como tal acreditamos que poderá ser discutido com proveito no nível universitário e com algumas simplificações ou adaptações, também no ensino médio.

References

[1] M. Seidel & R. Schulz *Egito* Coleção Arte e Arquitetura. (Dinalivro: Lisboa) 2006.

[2] A. P. French *Newtonian Mechanics* (Norton; New York) 1965. Ver Cap. 10 Problema 10.12.

[3] E. Moise *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint* (Addison-Wesley; Reading) 1963.

[4] H. Illig e F. Löhner *Der Bau der Cheops-Pyramide* (Mantis Verlag: Berlin) 1998 citado em **http://www.cheops-pyramide.ch/khufu-pyramid/khufu-numbers.html**. Último acesso em 15/07/2014.

[5] M/ Lehner *The Complete Pyramids of Egypt* (Thames and Hudson; New York) 1997.

[6] M. Cauley: **Probing Question: How were the Egyptian pyramids built?** Penn State News. Última atualização em 16 de abril 2014. Último acesso em 15/07/2014.

[7] H. Illig e F. Löhner *Der Bau der Cheops-Pyramide* (Mantis Verlag: Berlin) 1998 citado em **http://www.cheops-pyramide.ch/khufu-pyramid/pyramid-construction.html**. Último acesso em 15/07/2014.

[8] Sci 2 **http://sci2.tv/!/videos/961**. Último acesso em 15/07/2014.