

A jornada da USCSS* *Prometheus* a LV 223 e a dilatação do tempo

A .C. Tort[†]
Instituto de Física
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Caixa Postal 68.528; CEP 21941-972 Rio de Janeiro, Brazil

30 de Março de 2014

Resumo

A cultura popular moderna muitas vezes oferece-nos oportunidades de discutir temas de física em um contexto que pode revelar-se muito atraente para os alunos. O intrigante filme de ficção científica de Ridley Scott, *Prometheus* (2012) cuja temática é a busca das origens da humanidade em uma pequena lua de um planeta distante é uma dessas oportunidades. Dois dos aspectos do filme, a duração da viagem e a celeridade da nave são discutidos aqui à luz da relatividade restrita.

Abstract

Sometimes modern popular culture offer us excellent opportunities to discuss basic and advanced concepts of physics in a context that can be very alluring for the students. This is case of Riddler Scott's intriguing film *Prometheus* (2012) whose central plot is the search of the origins of the human race in a small moon of a distant planet. Amid the many controversial features of the film two attracted the attention of critics, the duration of the journey and the necessary speed to accomplish the mission in a reasonable stretch of time. Here we discuss these two features with the tools of special relativity.

PACS numbers: 03.050.De

Palavras-chave: Relatividade restrita; dilatação temporal

*A sigla USCSS significa *United States Commercial Starship*.

[†]email: tort@if.ufrj.br.

1 Introdução

No sistema binário *Zeta Reticuli* (na Constelação do Retículo) formado por duas estrelas similares ao nosso Sol, ζ^1 e ζ^2 , que giram em torno do seu centro de massa comum, a apenas 39 anos-luz distante da Terra, há um planeta gasoso de nome *Calpamos* que possui três luas: LV 223, LV 426, também conhecida como *Acheron*¹, e uma terceira lua cujo nome não consta na *Xenopedia* [1]. A LV-223 pode abrigar o segredo da origem da humanidade. A nave interestelar USCSS *Prometheus*² a serviço da Weyland Corporation recebe ordens para rumar com destino a LV 223 e investigar as pistas inicialmente obtidas por arqueólogos na exploração de pirâmides, monumentos e cavernas terrestres. Em uma caverna na Ilha de Sykes, na Escócia, uma pintura rupestre mostra um grupo de seres humanos apontando claramente para um grupo de estrelas que posteriormente foi localizado na constelação do Retículo, Figura 2. Mantendo sempre uma velocidade de cruzeiro constante de magnitude v em relação à Terra, a USCSS *Prometheus* executa a missão recebida. Durante a viagem, os 17 membros humanos da tripulação são mantidos no estado de hibernação por meio da técnica de *stasis*, monitorados por David 8, um andróide de última geração criado pelos cientistas da Weyland. As tarefas de David são mínimas e para passar o tempo, ele estuda línguas ancestrais, física clássica e joga um basquete solitário. Quase ao final de uma viagem de dois anos e quatro meses, entediado, David resolve exercitar seus conhecimentos de relatividade restrita e comparar a duração da viagem medida pelo relógio de bordo com a duração da viagem medida pelos controladores da missão na Terra para diversos valores do parâmetro de celeridade $\beta := v/c$. O cálculo lhe permitirá também verificar se as dúvidas levantadas em um programa de rádio na Terra patrocinado pelo *Skeptical's Guide to the Universe* têm sentido [2]. Os debatedores do programa concluem que a distância e o tempo de duração da jornada a LV 223 exigem celeridades supraluminais, embora isto não fique claro para o público em geral. A *Xenopedia* [1], no verbete *Prometheus*, informa que a nave é equipada com quatro potentes propulsores nucleares e tecnologia FLT³. David pretende fazer os cálculos ignorando deliberadamente a tecnologia FTL.

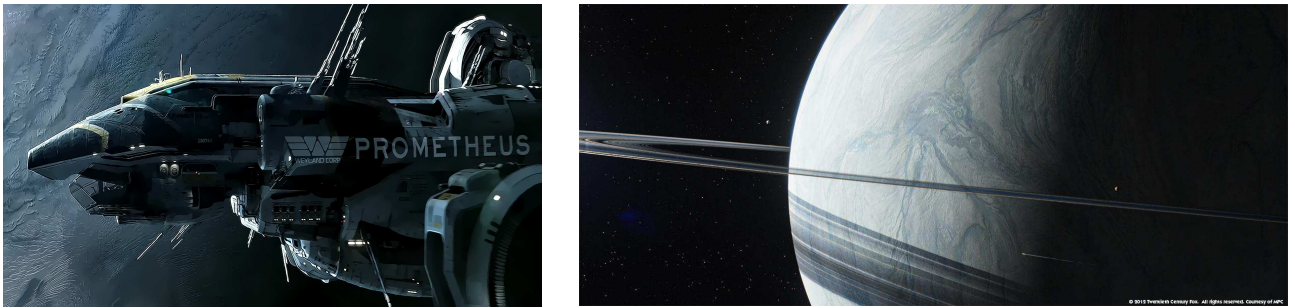


Figura 1: A USCSS *Prometheus* e o planeta *Calpamos* com suas três luas e seu sistema de anéis. O planeta é similar a Júpiter. (Imagens: Xenopedia.)

2 As soluções de David 8, o andróide

A distância $D = 39$ anos-luz é percorrida com uma velocidade de magnitude v durante o intervalo de tempo $\Delta t = D/v$. Esta é a duração da viagem medida pelos relógios de um observador inercial, por exemplo, o observador na Terra, que vê a nave percorrendo a distância entre a Terra e LV 223 em MRU. Os relógios de bordo marcam o *tempo próprio*, $\Delta\tau$. A relação entre o tempo próprio e o tempo coordenado é dada por

$$\Delta t = \gamma \Delta\tau, \quad (1)$$

¹No futuro, Acheron receberia uma colônia humana, *Hadley's Hope*, destruída posteriormente por xenomorfos [1].

²*Prometheus* era um semideus, um titã, filho de Iapetus e Clymene. Quando Zeus escondeu o fogo dos homens, Prometheus furtivamente o devolveu à humanidade.

³FTL = *Faster than Light* (mais rápido do que a luz).

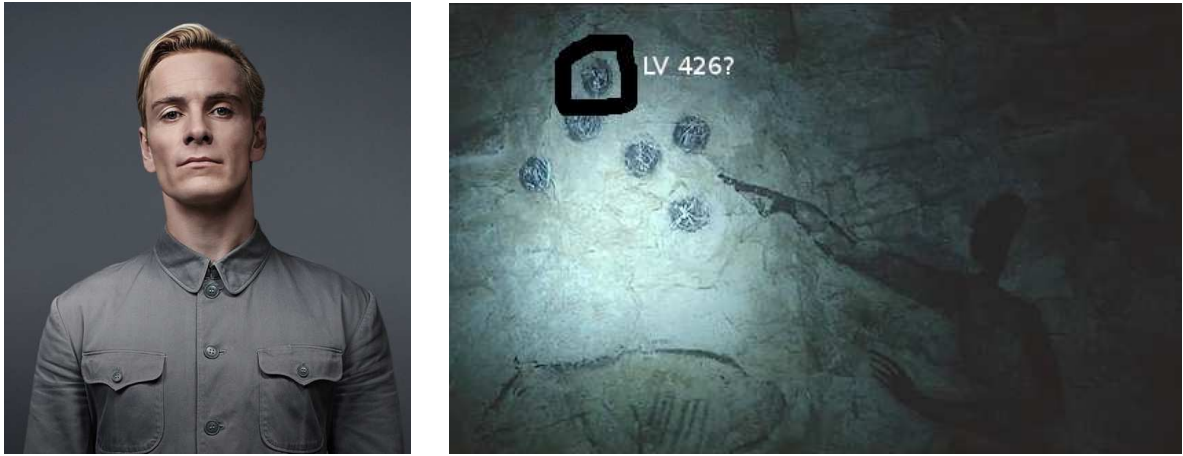


Figura 2: David 8, o estado da arte em andróides, criado pela Weyland Corporation. Pinturas rupestres encontradas pelos arqueólogos Elisabeth Shaw e Charles Holloway em uma caverna na Ilha de Sykes na Escócia em 2089.

onde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (2)$$

é o fator cinemático de Lorentz e $\beta = v/c$ e $0 \leq \beta \leq 1$ é o parâmetro de celeridade. Para obter um resultado para o tempo próprio que possa ser aplicado a um valor arbitrário de β , isto é: um valor arbitrário de v , David escreve

$$\Delta\tau = \frac{\Delta t}{\gamma} = \sqrt{1 - \beta^2} \Delta t = \sqrt{1 - \beta^2} \frac{D}{v}. \quad (3)$$

Multiplicando os dois lados deste resultado por c (isto é, David passa a medir o tempo próprio em unidades de comprimento), o andróide obtém:

$$c \Delta\tau = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta} D, \quad (4)$$

David percebe que convém rescrever este resultado na forma da razão:

$$\frac{c \Delta\tau}{D} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta}. \quad (5)$$

Da mesma forma, ele também rescreve o intervalo de tempo coordenado $\Delta t = D/v$ na forma da razão:

$$\frac{c \Delta t}{D} = \frac{1}{\beta}. \quad (6)$$

Agora fica mais simples gerar um gráfico como o da Figura 3. A curva em azul, construída com a Eq. (4), mostra essencialmente o intervalo de tempo próprio em função de β . A curva em vermelho, construída com a Eq. (6), faz a mesma coisa para o intervalo de tempo coordenado, isto é, para a duração da viagem medida pelo controle da missão na Terra. Observe que quando $\beta \rightarrow 0$, ou seja, $v \rightarrow 0$, as duas razões aproximam-se uma da outra, $c\Delta\tau/D \rightarrow c\Delta t/D$ e ambas aumentam desmesuradamente. Isto pode ser interpretado do seguinte modo: uma vez que D é fixo, se a magnitude da velocidade for a cada vez menor serão necessárias durações próprias e coordenadas a cada vez maiores para percorrer a distância D . No limite $\beta \rightarrow 0$ ou $v \rightarrow 0$, a duração da viagem medida tanto pelos relógios de bordo como pelos relógios terrestres tenderá ao infinito.

Quando $\beta \rightarrow 1$, isto é, $v \rightarrow c$, o intervalo de tempo próprio tende a zero, porém, o intervalo de tempo coordenado tende para valores diferentes de zero. Nesse limite, para David e a tripulação da Prometheus, a duração da viagem será *quase* instantânea, mas o andróide sabe que na relatividade de Einstein um corpo com massa não pode atingir a celeridade da luz⁴.

⁴A menos que empregue a tecnologia FTL!

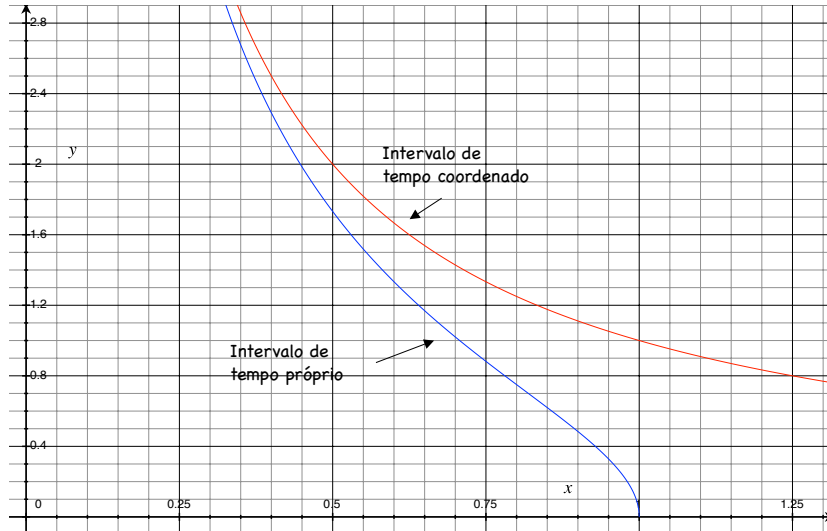


Figura 3: No eixo das abscissas, $x \equiv \beta$, no eixo das ordenadas $y \equiv c\Delta\tau/D$ para a curva em azul e $y \equiv c\Delta t/D$ para a curva em vermelho.

David percebe que o problema da duração da viagem pode ser também analisado como uma contração de Lorentz. No referencial da nave, a distância entre a Terra e a LV 223 é contraída pelo fator cinemático de Lorentz. De fato, no referencial da nave

$$D' = \frac{D}{\gamma'}, \quad (7)$$

onde γ' é o fator cinemático de Lorentz medido por David. Tratando a distância entre a Terra e LV 223 como se estivessem conectados por uma barra rígida, David faz uso das transformações de Lorentz para a componente u_x da velocidade para calcular a componente u'_x de uma das extremidade da barra em relação à nave:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} = -v, \quad (8)$$

já que $u_x = 0$. Portanto, $\gamma' = \gamma$, e no referencial da nave:

$$\Delta t' = \frac{D'}{\| -v \|} = \frac{D'}{v} = \frac{D}{\gamma v}. \quad (9)$$

Como no referencial da nave todos os relógios estão em repouso e sincronizados em relação ao relógio de David e este marca o tempo próprio, o andróide faz a identificação $\Delta t' = \Delta\tau$, logo

$$\Delta\tau = \frac{D'}{v} = \frac{D}{\gamma v}, \quad (10)$$

que é essencialmente a equação (4). Para testar suas fórmulas, David insere o valor $\beta = 4/5$, ou 80% da celeridade da luz, nas equações (5) e (6), e obtém $\Delta\tau = 29,25$ anos e $\Delta t = 48,75$ anos. A seguir, o andróide, por curiosidade⁵, supõe que a duração da viagem, 2 anos e quatro meses ou $7/3$ de anos-luz, é medida pelo controle da missão na Terra. Usando a equação (6), David conclui que $\beta \approx 16,7 > 1$! David então se volta para a equação (4) e a rescreve na forma

$$\beta = \frac{D}{\sqrt{D^2 + c^2 \Delta\tau^2}}. \quad (11)$$

A seguir, ele insere os dados nesta fórmula e obtém $\beta \approx 0,998 < 1$, em acordo com a relatividade restrita. Para este valor de β , os controladores da missão na Terra registram $\Delta t \approx 39$ anos como a duração da viagem.

⁵Andróides são projetados para imitar da melhor maneira possível o comportamento e a psicologia dos humanos para que estes fiquem à vontade em sua presença.

3 Os diagramas espaçotempo de David

David também constrói um diagrama espaçotempo com as coordenadas terrestres ct e x mostrando as linhas de universo da Terra, da Prometheus e de LV 223, veja a Figura 4. David também desenha as linhas de universo dos raios de luz emitidos simultaneamente em $x = 0$ e em $x = D$ quando $ct = 0$, para fins de comparação com as linhas de universo da Terra, LV 223 e da nave.

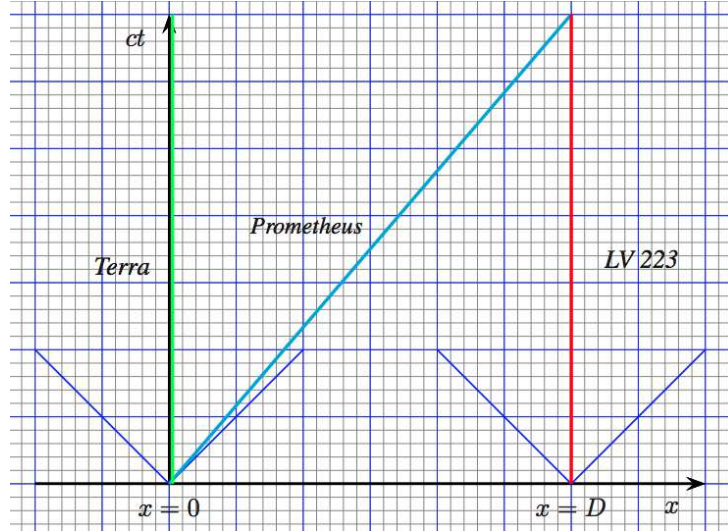


Figura 4: Diagrama espaçotempo construído com as coordenadas terrestres ct e x . Os raios de luz que definem os cones de luz são mostrados em azul. As linhas de universo devem estar dentro dos cones

Para construir o diagrama espaçotempo com um sistema de coordenadas inercial comóvel com a Prometheus, ct' e x' , David começa escrevendo as transformações de Lorentz entre os dois sistemas:

$$x' = \gamma (x - vt) . \quad (12)$$

e

$$t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) . \quad (13)$$

David supõe que no instante da partida, os dois referenciais inerciais se justapõem e os relógios dos dois sistemas estão sincronizados entre si. Para a Terra, $x_{\text{Terra}} = 0$, quando $t = 0$. Com as transformações de Lorentz, David conclui que $x'_{\text{Terra}} = 0$ e $t' = 0$. Para LV 223, $x_{\text{LV 223}} = D$ quando $t = 0$, logo, usando novamente as transformações de Lorentz, o andróide conclui que $x'_{\text{LV 223}} = D' = \gamma D$ e $t' = 0$.

Segue que no referencial da nave valem as relações: $x'_{\text{Terra}} = -vt'$ e $x'_{\text{LV 223}} = D' - vt'$, ou ainda:

$$ct' = -\frac{x'_{\text{Terra}}}{\beta} , \quad (14)$$

e

$$ct' = -\frac{D' - x'_{\text{LV 223}}}{\beta} , \quad (15)$$

LV 223 encontra a nave quando $x'_{\text{LV 223}} = 0$, isto é $ct' = D'/\beta$. Portanto, fazendo uma correção notacional, David substitui t' por $\Delta t'$ para indicar *duração* e escreve:

$$c \Delta t' = \frac{D'}{\beta} = \frac{\gamma D}{\beta} . \quad (16)$$

Como antes, no referencial da nave todos os relógios estão em repouso e sincronizados, logo, marcam o tempo próprio. David constrói um diagrama espaçotempo mostrando as linhas de universo da Terra, da nave Prometheus e de LV 223, mas agora com as coordenadas ct' e x' . Veja a Figura 5.

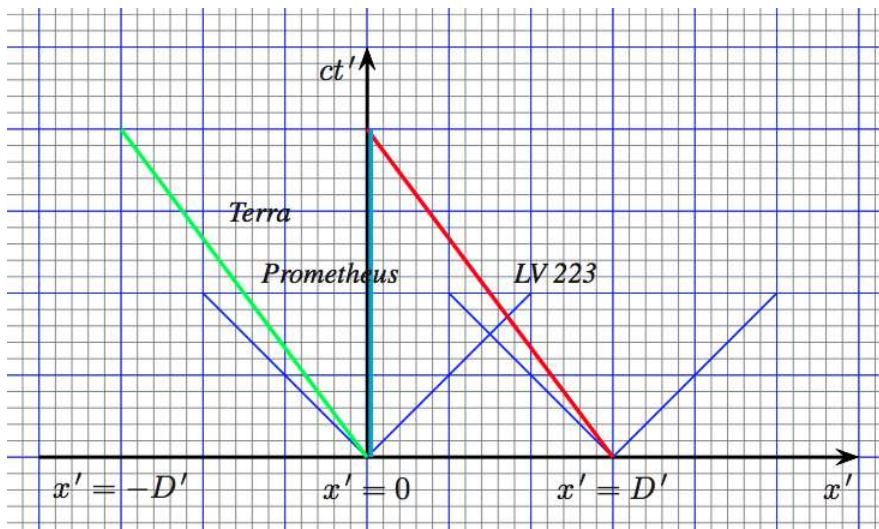


Figura 5: Diagrama espaçotempo desenhado por David 8 usando as coordenadas ct' e x' com origem na nave Prometheus. Os raios de luz que definem os cones de luz são mostrados em azul. As linhas de universo devem estar dentro dos cones.

4 Conclusões

David se pergunta se haverá tempo para pensar em algo mais, mas o computador de bordo está prestes a disparar a sirena eletrônica alertando-o para o fato que a hora de despertar a tripulação de seu sono hiperestático chegou. Naturalmente, os sistemas de bordo farão isto automaticamente, mas o andróide deve ser lembrado. A viagem da ida a LV 223 está no fim e a missão de exploração deve começar. David, o andróide, conseguiu mostrar que se os poderosos propulsores da nave conseguirem fazer com que esta alcance quase 100 % da celeridade da luz, e se a duração da jornada de dois anos e quatro meses for a duração em relação à própria nave, então não há necessidade de empregar a (duvidosa) tecnologia FTL. Mesmo para valores de β menores, a viagem poderá ser feita em um tempo próprio aceitável. Mas, antes de deixar seus cálculos totalmente de lado, David registra um lembrete na sua memória: resolver na primeira oportunidade, o problema com a Prometheus em movimento acelerado em relação à Terra. Será necessário um modelo para a aceleração e lembrar que movimentos acelerados aumentam o intervalo de tempo próprio.

Se você, leitor, quiser familiarizar-se ou relembrar os conceitos empregados aqui, David recomenda as referências [3, 4, 5, 6]. Elas poderão ser-lhe de grande valia.

Referências

- [1] *Xenopedia - The Aliens vs. Predators Wiki*. Inestimável fonte de informações sobre alienígenas, caçadores galácticos (predadores), xenomorfos, trilobitas, engenheiros cósmicos, terraformação de sistemas planetários e luas distantes, e muito mais. Misteriosamente, é um tanto omissa sobre os detalhes da tecnologia FTL. Quanto ao resto, é acessar e aproveitar! Um delírio! Eis o link: [Xenopedia - The Aliens vs. Predators Wiki](#).
- [2] *The Skeptics' Guide to the Universe*. Um antídoto contra a credulice. O link para o programa que discutiu a questão da duração da viagem e a celeridade da Prometheus é [Podcast 363](#).

- [3] J. Natário *A Geometria de Relatividade*. Notas de aula de um curso de duas semanas para alunos do ensino médio em Portugal, ministrado pelo Prof. José Natário com muitos exemplos resolvidos. Disponível gratuitamente em formato pdf no *link*: [Notas de aula \(2010\)](#). É só acessar e descarregar!
- [4] E. Taylor and J. A. Wheeler *Spacetime Physics* 1966 (Freeman: San Francisco). Se você quer saber como a Relatividade Restrita funciona com um mínimo de pré-requisitos e direto ao ponto, Taylor e Wheeler são os caras! Há uma segunda edição no mercado internacional.
- [5] R. Resnick *Introduction to Special Relativity*, 1968 (John Wiley: New York). Um pequeno clássico, na minha opinião. Você pode encontrá-lo em português em algum sebo da sua cidade.
- [6] R. de A. Martins *A Teoria de Relatividade Especial* (LF Editorial: São Paulo) 2012. Um texto que exige mais do leitor. Aborda as bases históricas da relatividade e alguns tópicos que são deixados de fora na maioria dos textos introdutórios, como por exemplo, a termodinâmica relativística. Muito interessante.