FÍSICA III – 1/2008 – Lista de Problemas 01
A lei de Coulomb

A C Tort*

8 de Março de 2008

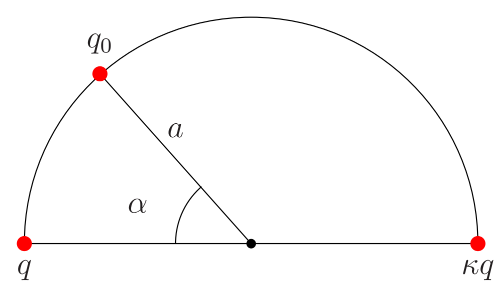
Problema 1 *H.M. Nussenzveig: Curso de Física básica, vol. 3, Eletromagnetismo, Cap. 2, problema 1.* Mostre que a razão da atração eletrostática para a atração gravitacional entre um elétron e um próton é independente da distância entre eles e calcule essa razão.

Problema 2 Uma certa carga Q deve ser dividida em duas partes $q_1 = Q - q$ e $q_2 = q$. As cargas q_1 e q_2 são fixas e separadas por uma distância d. Mostre que a magnitude da força entre as cargas pode ser escrita na forma:

$$F(x) = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0\, d^2}(1-x)\,x,$$

onde $x = q/Q$ e $0 \leq x \leq 1$. Para que valores de x a força é nula? Para que valores de x a força é máxima?

Problema 3 Considere o arranjo formado pelas três cargas puntiformes q, κq ($\kappa > 0$) e q_0 mostrados na figura abaixo. As cargas q e κq são fixas, mas q_0 pode mover-se sobre o semicírculo de raio a. Determine em função dos dados do problema o valor do ângulo α para o qual a carga q_0 permanece em equilíbrio e calcule o valor numérico de α para $\kappa = 8$.



*email: tort@if.ufrj.br

Problema 4 Alguns dos problemas que encontramos em eletrostática podem ser resolvidos com uma combinação de resultados analíticos e métodos numéricos. Eis um exemplo: suponha quatro cargas de mesma magnitude q e mesmo sinal algébrico. Suponha que queiramos colocar as cargas em equilíbrio sobre uma reta de comprimento $2a$. A simetria do problema pode ser-nos útil. Escolhendo a origem no ponto mediano da reta evidentemente podemos colocar um par de cargas, o par externo, nos pontos $x = \pm a$, respectivamente, e o outro par, o par interno, nos pontos $\pm x$.

(a) Comece mostrando que a força sobre a carga colocado no ponto $+x$ é dada por:

$$F(x) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(x+a)^2} + \frac{1}{(2x)^2} - \frac{1}{(x-a)^2} \right]$$

(b) Mostre que a exigência de que a carga esteja em equilíbrio leva à equação algébrica de quarta ordem:

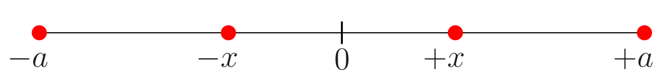
$$(a^2 - x^2)^2 = 16\, a\, x^3.$$

(c) Mostre que uma solução numérica nos dá $x = 0,36148\, a$. **Sugestão:** rescreva a equação acima na forma

$$\left(1 - u^2\right)^2 = 16\, u^3,$$

onde $u := x/a$. Dessa forma, a sua solução não dependerá do comprimento a. Agora considere o lado esquerdo e o lado direito como duas funções distintas. Nesse caso, a igualdade vale para um ou alguns valores de u apenas. Faça os gráficos correspondentes e determine os pontos de intersecção. Sinta-se a vontade no uso de softwares de computação algébrica ou dos recursos da sua calculadora científica, mas não deixe de apresentar os detalhes da sua solução.

(d) O par interno pode ser posto em equilíbrio mecânico por meios de forças puramente coulombianas, mas o par externo não. Como você explica o equilíbrio mecânico das cargas em $x = \pm a$?

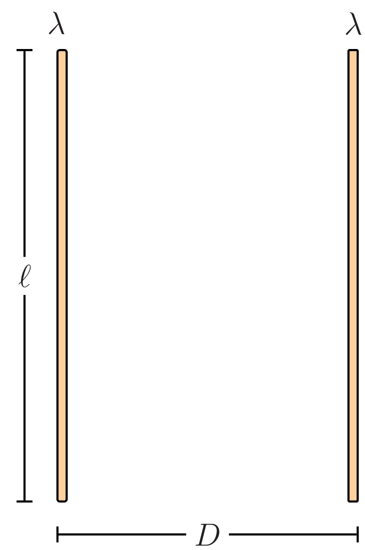


Problema 5 Considere dois bastões finos de mesmo comprimento finito ℓ, paralelos e separados por uma distância D. Um dos bastões é uniformemente carregado com uma densidade linear de carga λ e o outro com uma densidade linear de carga λ'.

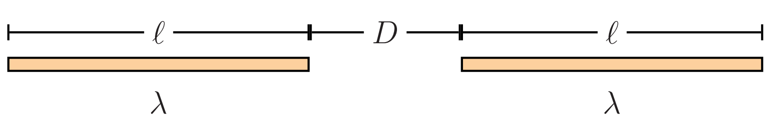
(a) Mostre que a magnitude da força entre os bastões é dada por:

$$\|\mathbf{F}\| = \frac{\lambda\,\lambda'}{2\pi\epsilon_0}\left[\sqrt{1+\frac{\ell^2}{D^2}}-1\right].$$

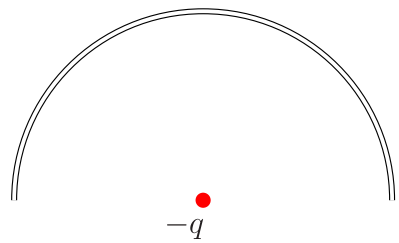
(b) Analise a situação em que $\ell/D \ll 1$ e mostre que recuperamos a lei de Coulomb.



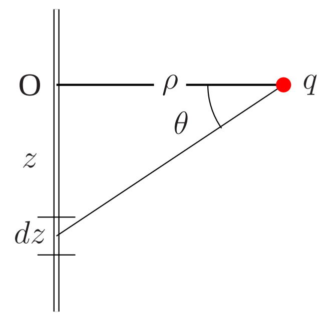
Problema 6 Considere dois bastões idênticos de material plástico de comprimento ℓ uniformemnte carregados com uma densidade de carga λ. Os dois bastões jazem sobre o eixo x positivo e suas extremidades mais próximas uma da outra estão separadas por uma distância fixa D. Determine a força eletrostática entre os dois bastões. Analise a força eletrostática entre os dois bastões no limite $D \gg \ell$. **Sugestão:** faça $x = 0$ na extremidade esquerda do bastão à esquerda.



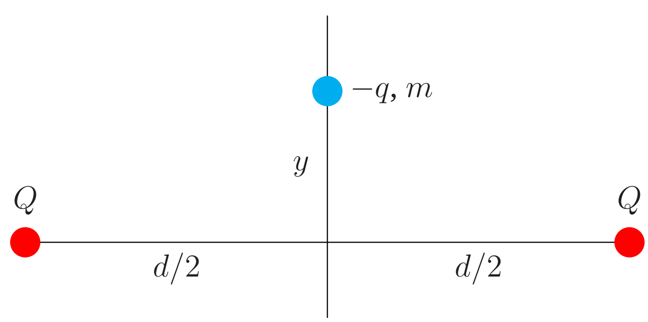
Problema 7 *H.M. Nussenzveig: Curso de Física básica, vol. 3, Eletromagnetismo, Cap. 2, problema 7.* Uma carga Q é distribuída uniformemente sobre um fio semicircular de raio a. Calcule a força que atua sobre uma carga de sinal oposto -q colocada no centro, veja a figura.



Problema 8 *H.M. Nussenzveig: Curso de Física básica, vol. 3, Eletromagnetismo, Cap. 2, problema 8.* Um fio retilíneo muito longo (trate-o como infinito) está eletrizado com uma densidade linear de carga λ. Calcule a força com que atua sobre uma carga puntiforme q colocada à uma distância ρ do fio. **Sugestão**: tome a origem em O (veja a figura) e o fio como o eixo z. Exprima a contribuição de um elemento dz do fio à distância z da origem em função do ângulo θ da figura. Use argumentos de simetria.



Problema 9 *H.M. Nussenzveig: Curso de Física básica, vol. 3, Eletromagnetismo, Cap. 2, problema 9.* Uma partícula de massa m e carga negativa $-q$ está vinculada a mover-se sobre a mediatriz do segmento que liga duas cargas positivas $+Q$, separadas por uma distância d, veja a figura. Inicialmente a partícula encontra-se a uma distância y do centro do segmento. Mostre que ela executa um movimento harmônico simples em torno do centro, e calcule a freqüência angular ω da oscilação.



Problema 10 Considere um anel de raio R uniformemente carregado com uma densidade de carga λ. Considere também uma carga puntiforme q colocada em um ponto P do plano que contém o anel, a uma distância D do centro geométrico do anel, veja a figura.

(a) Mostre que se $D > R$, a força que o anel exerce sobre a carga puntiforme é dada por:

$$\mathbf{F} = \frac{\lambda\, R\, q}{4\pi\epsilon_0\ D^2} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - p\ \cos\theta)\ d\theta}{(1 + p^2 - 2p\ \cos\ \theta)^{3/2}}\, \hat{\mathbf{e}}_r,$$

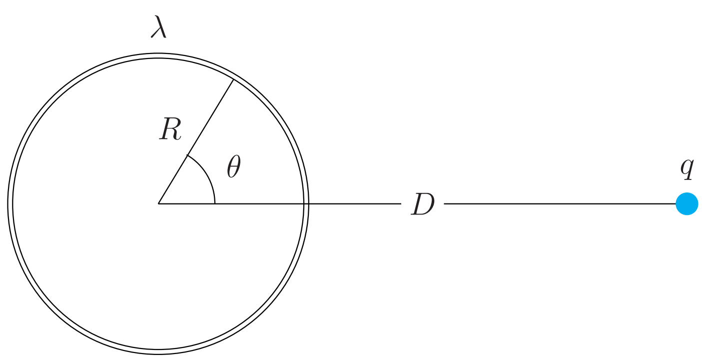
onde θ é a medida do ângulo entre a reta que une o centro do anel à carga e o raio do anel, $p := R/D$, e $\hat{\mathbf{e}}_r$ é o vetor unitário cuja reta suporte é a reta que une o centro do anel à carga.

(b) Suponha que a condição $D \gg R$ ou $p \to 0$, seja válida. Expanda o integrando acima em série de potências em p e obtenha uma expressão aproximada para a força sobre q.

(c) Suponha agora $D < R$. Mostre que a força sobre q é dada por:

$$\mathbf{F} = \frac{\lambda\, D\, q}{4\pi\epsilon_0\ R^2} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - p\ \cos\theta)\ d\theta}{(1 + p^2 - 2p\ \cos\ \theta)^{3/2}}\, \hat{\mathbf{e}}_r,$$

onde $p := D/R$.



Problema 11 Suponha que o universo (eletrostático) seja plano e tenha duas dimensões espaciais apenas, Neste caso, é possível argumentar que a lei de Coulomb poderia ter a forma:

$$\mathbf{F} = \kappa_2\, \frac{q_1\, q_2}{r}\, \hat{\mathbf{e}}_r,$$

onde κ_2 é uma constante com as dimensões apropriadas. Refaça o problema anterior e mostre que se a carga q localiza-se na região exterior ao anel, como na figura acima, este comporta-se como uma carga puntiforme de valor $q_{\text{anel}} = \lambda\, R$ concentrada no centro geométrico do anel. Por outro lado, se a carga q localiza-se na região interior ao anel, a força sobre ela é nula!